선입견을 깨고

수학 바로 보기

기하와 벡터

김현우 | 백경린

smart is sexy
Orbi

Contents

첫 번째, 무엇을 한 평면을 결정하는가?

두 번째, 벡터란 무엇인가?

세 번째, 무엇을 기본 벡터로 볼 것인가?

네 번째, 무엇이 고정돼 있는가?

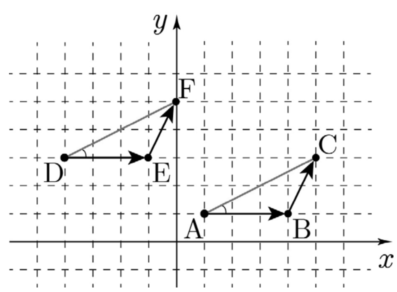
두 번째, 벡터란 무엇인가!

벡터는 '크기와 함께 방향을 가지는 양'이라는 개념은 물리 법칙을 설명하는 데는 적합할지 몰라도 도형을 다룰 때는 오히려 선입견을 갖게 만들곤 한다. 각의 크기나 변의 길이를 파악할 때, 방향을 함께 고려한다는 것은 상당히 어색한 시각이기 때문이다.

벡터는 본래 물리적인 현상을 설명하기 위해 도입되었지만, 도형을 나타내는 도구로 확장시킬 수 있다.

그런데, 도형 내부의 각이나 선분의 길이를 결정하는 것은 도형의 경계를 이루는 점들의 절대적인 위치가 아니라 **'점들 사이의 상대적인 위치'** 라는 사실을 떠올려 보면 도형을 다루는 데 **'벡터'** 만큼 효율적인 도구가 없음을 이해할 수 있다.

예를 들어, 좌표평면에서 세 꼭짓점이 각각 $\mathrm{A}(1, 1)$, $\mathrm{B}(4, 1)$, $\mathrm{C}(5, 3)$인 삼각형 ABC와 세 꼭짓점이 각각 $\mathrm{D}(-4, 2)$, $\mathrm{B}(-1, 3)$, $\mathrm{C}(0, 5)$인 삼각형 DEF에서 꼭짓점 사이의 상대적인 위치를 비교해 보자.



'점 A에서 바라본 점 B의 상대적인 위치' 는 x축 방향으로만 3만큼 떨어져 있고, **'점 D에서 바라본 점 E의 상대적인 위치'** 도 x축 방향으로만 3만큼 떨어져 있으므로 이를

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}} = (3, 0)$$

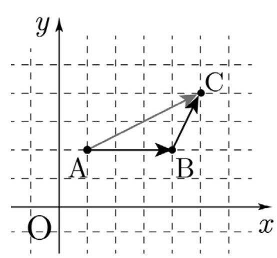
이라고 나타낼 수 있다.

'상대적인 위치'의 관점에서 벡터 AB는 벡터 DE와 완전히 같다!!

마찬가지로 '점 B에서 바라본 점 C의 위치'와 '점 E에서 바라본 점 F의 위치'는

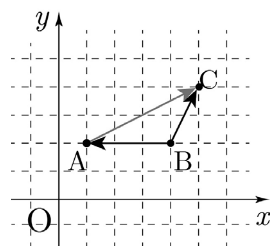
$$\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}} = (1, 2)$$

로 나타낼 수 있다.



이때, '점 A에서 바라본 점 C의 위치'는 x축 방향으로는 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 x성분에서 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 x성분을 더한 것과 같고, y축 방향

으로는 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$의 y성분에서 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$의 y성분을 더한 것과 같으므로



벡터의 뺄셈도 같은 방식으로 정의할 수 있다!

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} + \overrightarrow{\mathrm{BC}} = (3,\ 0) + (1,\ 2) = (4,\ 2)$$

라고 표현할 수 있고, ‘점 D에서 바라본 점 E의 위치’도

$$\overrightarrow{\mathrm{DF}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}} + \overrightarrow{\mathrm{EF}} = (3,\ 0) + (1,\ 2) = (4,\ 2)$$

로 표현할 수 있다.

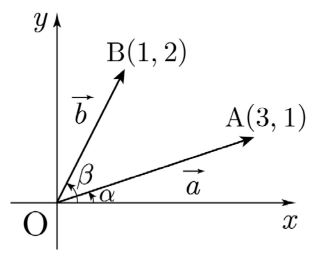
즉, $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{DE}}$와 $\overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{EF}}$를 통해 $\overrightarrow{\mathrm{AC}} = \overrightarrow{\mathrm{DF}}$는 자동으로 보장된다.

이를테면, 3차 방정식으로 풀어야 할 문제를 2차 방정식으로도 풀 수 있게 되었다는 뜻

이것은 곧, **삼각형을 나타내는 데 필요한 정보의 개수가 3개(세 점의 좌표)에서 2개(두 벡터)로 줄어들 수 있다**는 뜻이다!

이러한 벡터의 효율성은 ‘벡터의 내적’을 통해 극대화된다.

가령, 두 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$에 대하여 두 직선 OA와 OB가 이루는 각의 크기 θ를 구하는 과정을 살펴보자.



θ는 두 벡터 $\vec{a} = (3,\ 1)$, $\vec{b} = (1,\ 2)$가 이루는 각의 크기와 같다. 이때, 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 각각 α, β라고 하면

$$\cos\alpha = \frac{3}{\sqrt{3^2+1^2}},\ \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{3^2+1^2}}$$

$$\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}},\ \sin\beta = \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2}}$$

삼각함수에 관한 정리들은 기본적으로 ‘각과 길이의 관계’를 나타내준다!

이므로 삼각함수의 덧셈정리에 의해

$$\begin{aligned}\cos\theta &= \cos(\beta-\alpha) = \cos\beta\cos\alpha + \sin\beta\sin\alpha \\ &= \frac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}\cdot\frac{3}{\sqrt{3^2+1^2}} + \frac{2}{\sqrt{1^2+2^2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3^2+1^2}} \\ &= \frac{3\cdot1+1\cdot2}{\sqrt{3^2+1^2}\cdot\sqrt{1^2+2^2}}\end{aligned}$$

이와 같이, 두 벡터 $\vec{a} = (3,\ 1)$, $\vec{b} = (1,\ 2)$가 이루는 각을 구할 때는 항상 두 벡터의 x성분끼리의 곱과 y성분끼리의 곱을 서로 더한 ‘$3\cdot1+1\cdot2$’의 계산이 필요하게 된다. 이것을 두 벡터의 **내적**이라 하고 기호로

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = 3\cdot1+1\cdot2$$

라고 표현할 수 있다. (내적은 곱한 결과가 스칼라이므로 ‘스칼라곱’이라고도 한다.)

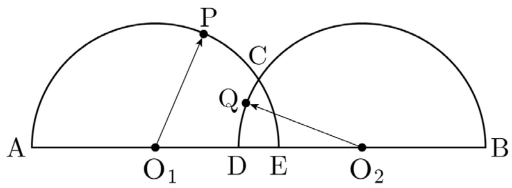
2-01

17 평가원

그림과 같이 선분 AB 위에 $\overline{AE}=\overline{DB}=2$인 두 점 D, E가 있다. 두 선분 AE, DB를 각각 지름으로 하는 두 반원의 호 AE, DB가 만나는 점을 C라 하고, 선분 AB 위에 $\overline{O_1A}=\overline{O_2B}=1$인 두 점을 O_1, O_2라 하자.

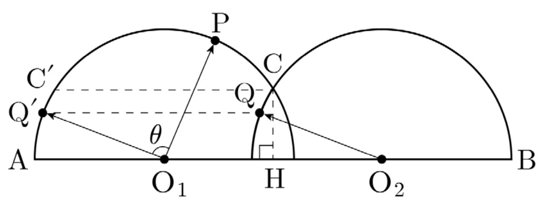
호 AC 위를 움직이는 점 P와 호 DC 위를 움직이는 점 Q에 대하여 $\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}\right|$의 최솟값이 $\frac{1}{2}$일 때, 선분 AB의 길이는 $\frac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오.

(단, $1<\overline{O_1O_2}<2$이고, p와 q는 서로소인 자연수이다.)



두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$의 크기는 모두 1로 정해져 있으므로 $\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}$의 크기가 최소이려면 두 벡터가 이루는 각의 크기가 최대이어야 한다.

여기서 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_2Q}$가 이루는 각을 파악하려면 두 벡터의 시점 또는 종점을 일치시킬 필요가 있다.



그런데, 점 Q를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AC와 만나는 점을 Q′이라고 하면, **'O_2에서 바라본 Q의 위치'** 는 **'O_1에서 바라본 Q′의 위치'** 와 같으므로

$$\overrightarrow{O_2Q}=\overrightarrow{O_1Q'}$$

한편, 점 C를 지나고 선분 AB에 평행한 직선이 호 AC와 만나는 점을 C′이라고 할 때, 두 점 P, Q′은 각각 호 AC, 호 AC′ 위를 움직이므로 두 벡터 $\overrightarrow{O_1P}$, $\overrightarrow{O_1Q'}$가 이루는 각의 크기는 두 점 P와 Q′이 각각 두 점 C와 A 위에 있을 때 최대임을 알 수 있다!

따라서 점 C에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면

내적의 기하학적 의미

$$\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2Q} \geq -\left|\overrightarrow{O_1H}\right| \cdot \left|\overrightarrow{O_1A}\right|$$

이므로

$$\left|\overrightarrow{O_1P}+\overrightarrow{O_2Q}\right|^2 = \left|\overrightarrow{O_1P}\right|^2 + \left|\overrightarrow{O_2Q}\right|^2 + 2\left(\overrightarrow{O_1P} \cdot \overrightarrow{O_2Q}\right)$$

$$\geq 1+1-2\left(\left|\overrightarrow{O_1H}\right| \cdot \left|\overrightarrow{O_1A}\right|\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$\therefore \left|\overrightarrow{O_1H}\right| = \frac{7}{8} \quad \left(\because \left|\overrightarrow{O_1A}\right| = 1\right)$$

결국, 선분 AB의 길이는

$$\overline{AB} = 2\overline{AH} = 2\left\{\left|\overrightarrow{O_1A}\right| + \left|\overrightarrow{O_1H}\right|\right\} = 2\left(1+\frac{7}{8}\right) = \frac{15}{4}$$

$$\therefore p=4,\ q=15$$

따라서 구하는 값은 $p+q=19$이다.

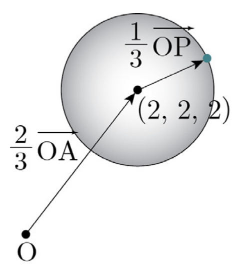
2-02
09 수능

좌표공간의 점 $A(3, 3, 3)$과 중심이 원점 O인 구 $x^2+y^2+z^2=9$ 위를 움직이는 점 P에 대하여 $\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right|$의 최댓값은 $a+b\sqrt{3}$이다. $10(a+b)$의 값을 구하시오. (단, a, b는 유리수이다.)

이 문제도 **두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP}$가 (두 점 A, P의 절대적인 위치가 아니라) 점들 사이의 상대적인 위치를 나타내고 있음**을 이해하면 간단히 해결할 수 있다.

즉, $\overrightarrow{OA}$는 **'원점 O에서 바라본 점 A의 위치'** 를 나타내므로

$$\frac{2}{3}\overrightarrow{OA} = \frac{2}{3}(3, 3, 3) = (2, 2, 2)$$



$\overline{OP}=3$

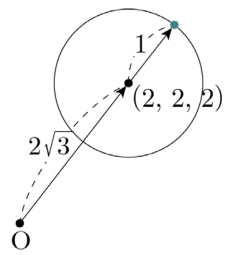
이때, $\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$는 **'점 $(2, 2, 2)$에서 바라봤을 때 거리가 1인 점의 위치'** 를 나타내므로 벡터 $\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}$의 크기는 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OP}$의 방향이 같을 때 최대임을 알 수 있다!

즉,

$$\left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right| \le \left|\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}\right|+\left|\frac{1}{3}\overrightarrow{OP}\right| = 2\sqrt{3}+1$$

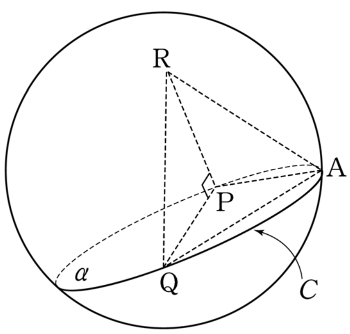
$$\therefore\ a=1,\ b=2$$

이므로 구하는 값은 $10(a+b)=30$이다.



2-03
09 수능

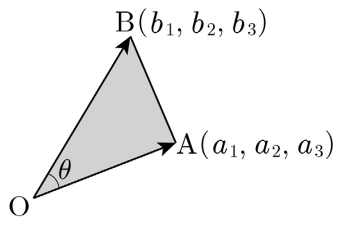
좌표공간에서 구 S : $x^2+y^2+z^2=4$와 평면 α : $y-\sqrt{3}z=2$가 만나서 생기는 원을 C라 하자. 원 C 위의 점 $\mathrm{A}(0,\ 2,\ 0)$에 대하여 원 C의 지름의 양 끝점 P, Q를 $\overline{\mathrm{AP}}=\overline{\mathrm{AQ}}$가 되도록 잡고, 점 P를 지나고 평면 α에 수직인 직선이 구 S와 만나는 또 다른 점을 R라 하자. 삼각형 ARQ의 넓이를 s라 할 때, s^2의 값을 구하시오.



내적은 '내각의 크기'와 '선분의 길이'에 대한 정보를 담고 있으므로..

일반적으로 벡터의 내적을 이용하면 삼각형의 '넓이'를 간단히 구할 수 있다.

즉, 삼각형 OAB에서 두 벡터 $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$가 이루는 각의 크기를 θ라고 하면 삼각형 OAB의 넓이 S는



$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$$

$$=\frac{1}{2}|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\sqrt{1-\left(\frac{\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}}{|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|}\right)^2}$$

$$\therefore\ S=\frac{1}{2}\sqrt{\left(|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OB}|\right)^2-\left(\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\right)^2}$$

주어진 삼각형 ARQ의 넓이를 구하기 위해서는 두 벡터 $\overrightarrow{QA}$, $\overrightarrow{QR}$의 성분만 찾으면 된다.

축의 방향은 문제의 조건을 이용하기에 가장 유리한 쪽으로 잡으면 된다.

이때, 원 C의 중심 C에 대하여 $\overrightarrow{PQ}$를 x축 방향, $\overrightarrow{CA}$를 y축 방향, $\overrightarrow{PR}$을 z축 방향으로 잡으면 **'점 Q에서 바라본 점 A의 위치'** 와 **'점 Q에서 바라본 점 R의 위치'** 를 쉽게 파악할 수 있다.

평면 PQR은 원 C의 중심을 지나고 평면 α에 수직이므로 구 S의 중심 O를 포함한다.

즉, 주어진 구 S와 평면 α의 방정식에 의해

$\overline{OC}=1$ (∵ 원점 O에서 평면 α까지의 거리)

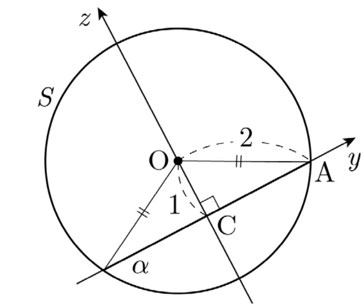
$\overline{CA}=\overline{CP}=\overline{CQ}=\sqrt{3}$ (∵ $\overline{AP}=\overline{AQ}$)

$\overline{PR}=2\overline{CO}=2$ (∵ $\overline{PR}$의 수직이등선이 O를 지남)

이므로

$\overrightarrow{QA}=(-\sqrt{3},\ \sqrt{3},\ 0)$, $\overrightarrow{QR}=(-2\sqrt{3},\ 0,\ 2)$

임을 쉽게 알 수 있다!



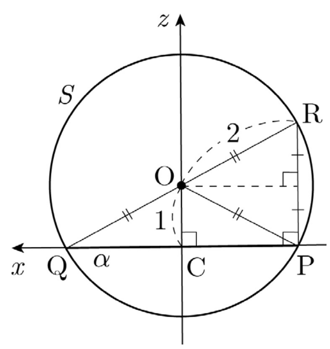
따라서 삼각형 ARQ의 넓이 s는

$$s=\frac{1}{2}\sqrt{\left(|\overrightarrow{QA}||\overrightarrow{QR}|\right)^2-\left(\overrightarrow{QA}\cdot\overrightarrow{QR}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sqrt{6}\cdot\sqrt{16}\right)^2-(6+0+0)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{60}$$

$\therefore\ s^2=15$

즉, 구하는 값은 15이다.

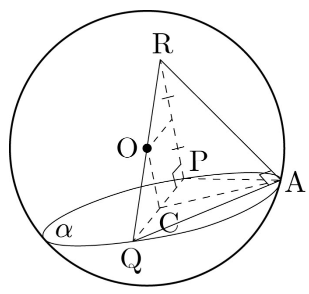


벡터는 도형의 여러 가지 성질을 암기해야 하는 수고를 덜어준다.

#1 이 문제는 '원주각의 성질' 을 이용하면 좀 더 간단히 해결할 수 있다.

즉, 선분 QR이 구 S의 지름이므로 원주각의 성질에 의해 $\angle QAR=90^\circ$이다.

$\therefore\ s=\frac{1}{2}\overline{AQ}\cdot\overline{AR}$



이때, 두 직각삼각형 ACQ, APR에서

$\overline{AQ}=\sqrt{2}\,\overline{CQ}=\sqrt{6}$ (∵ $\overline{OC}=1$, $\overline{OQ}=2$)

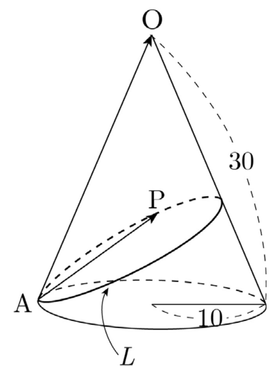
$\overline{AR}=\sqrt{\overline{AP}^2+\overline{PR}^2}=\sqrt{(\sqrt{6})^2+2^2}=\sqrt{10}$ (∵ $\overline{AP}=\overline{AQ}$)

이므로

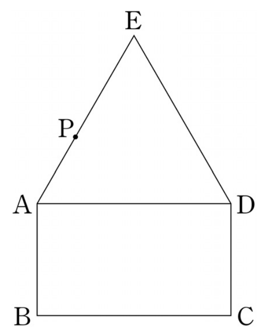
$$s=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{10}=\sqrt{15}\qquad\therefore\ s^2=15$$

두 번째, 연습해 보기

01 밑면의 반지름의 길이가 10, 모선의 길이가 30이고 꼭지점이 O인 직원뿔이 있다. 밑면의 둘레 위의 한 점 A에서 출발하여 원뿔의 옆면을 한 바퀴 돌아 점 A로 되돌아오는 최단경로를 L이라 하자. L 위를 움직이는 점 P에 대하여 점 B가 $\overrightarrow{AB}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AO}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AP}$를 만족시킬 때, 점 B의 자취의 길이는?



02 평면에서 그림과 같이 $\overline{AB}=1$이고 $\overline{BC}=\sqrt{3}$인 직사각형 ABCD와 정삼각형 EAD가 있다. 점 P가 선분 AE위를 움직일 때, 옳은 것만을 〈보기〉에서 있는 대로 고르면?



〈보 기〉

ㄱ. $|\overrightarrow{CB}-\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 1이다.

ㄴ. $\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CP}$의 값은 일정하다.

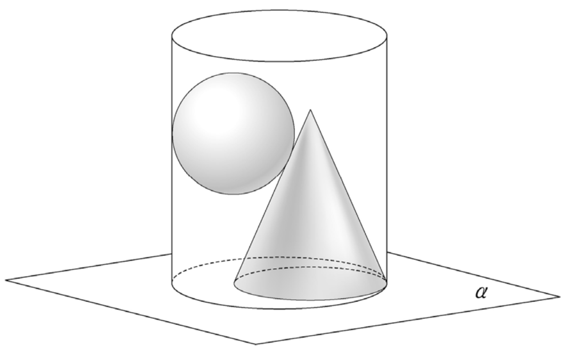
ㄷ. $|\overrightarrow{DA}+\overrightarrow{CP}|$의 최솟값은 $\frac{7}{2}$이다.

정답 및 해설 106p

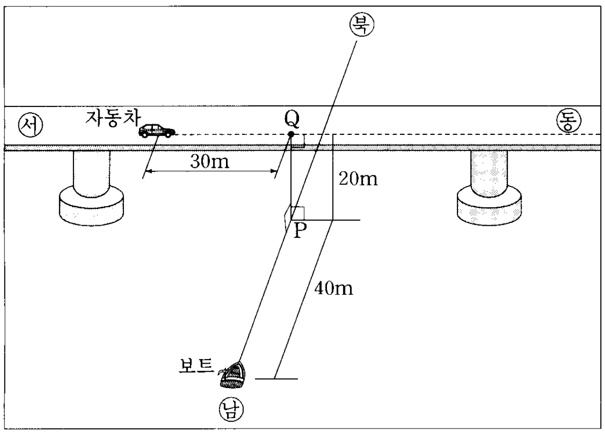
03 그림과 같이 밑면의 반지름의 길이가 7인 원기둥과 밑면의 반지름의 길이가 5이고 높이가 12인 원뿔이 평면 α위에 놓여 있고, 원뿔의 밑면의 둘레가 원기둥의 밑면의 둘레에 내접한다. 평면 α와 만나는 원기둥의 밑면의 중심을 O, 원뿔의 꼭짓점을 A라 하자. 중심이 B이고 반지름의 길이가 4인 구 S가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 구 S는 원기둥과 원뿔에 모두 접한다. (나) 두 점 A, B의 평면 α 위로의 정사영이 각각 A$'$, B$'$ 일 때, $\angle$A$'$OB$'=180°$이다.

직선 AB와 평면 α가 이루는 예각의 크기를 θ라 할 때, $\tan\theta = p$이다. $100p$의 값을 구하시오. (단, 원뿔의 밑면의 중심과 점 A$'$은 일치한다.)



04 보트가 남쪽에서 북쪽으로 $10m$/초의 등속도로 호수 위를 지나가고 있다. 수면 위 $20m$의 높이에 동서로 놓인 다리 위를 자동차가 서쪽에서 동쪽으로 $20m$/초의 등속도로 달리고 있다. 아래의 그림과 같이 지금 보트는 수면위의 점 P에서 남쪽 $40m$, 자동차는 다리위의 점 Q에서 서쪽 $30m$ 지점에 각각 위치해 있다. 보트와 자동차 사이의 거리가 최소가 될 때의 거리는? (단, 자동차와 보트의 크기는 무시하고, 선분 PQ는 보트와 자동차의 경로에 각각 수직이다.)

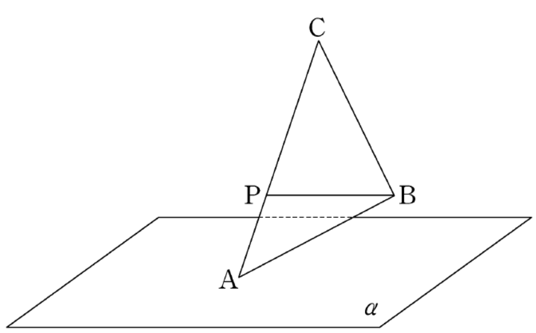


05 좌표공간에서 두 점 $\mathrm{A}(0,\ -1,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$이 있고, xy평면 위에 원 $x^2+y^2=13$이 있다. 이 원 위의 점 $(a,\ b,\ 0)$ $(a<0)$을 지나고 z축에 평행한 직선이 직선 AB와 만날 때, $a+b$의 값은?

정답 및 해설 106p

06 구 $x^2+y^2+z^2=4$와 평면 $z=-1$이 만나서 생기는 원을 C라 하자. x축을 포함하는 평면 α와 구 $x^2+y^2+z^2=4$가 만나서 생기는 원이 C와 오직 한 점에서 만날 때, 평면 α의 한 법선벡터를 $\vec{n}=(a,\ 3,\ b)$라 하자. a^2+b^2의 값을 구하시오.

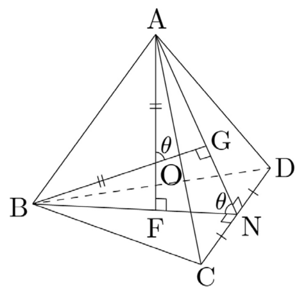
07 그림과 같이 평면 α 위에 점 A가 있고, α로부터의 거리가 각각 1, 3인 두 점 B, C가 있다. 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점 P에 대하여 $\overline{\mathrm{BP}}=4$이다. 삼각형 ABC의 넓이가 9일 때, 삼각형 ABC의 평면 α 위로의 정사영의 넓이를 S라 하자. S^2의 값을 구하시오.



첫 번째, 무엇이 한 평면을 결정하는가! p.22

01) 답 ㄴ, ㄷ

ㄱ. 선분 CD의 중점을 N이라 할 때, 두 직선 AF와 BG는 모두 한 평면 ABN 위에 있으므로 꼬인 위치에 있지 않다. (거짓)



ㄴ. 반지름의 길이가 1인 원에 내접하는 정삼각형의 한 변의 길이는 $\sqrt{3}$ 이므로 넓이는 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ 이다.

그런데, 주어진 <u>구의 중심 O를 포함하는 단면</u>(반지름의 길이가 1인 원)은 평면 ABN 위에 있으므로 <u>정삼각형 ABC를 포함하는 단면</u>의 반지름의 길이는 1보다 작음을 알 수 있다.

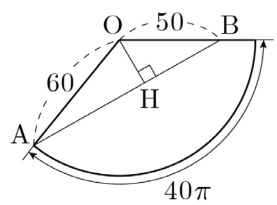
따라서 정삼각형 ABC의 한 변의 길이는 $\sqrt{3}$ 보다 작으므로 넓이도 $\dfrac{3\sqrt{3}}{4}$ 보다 작다. (참)

ㄷ. <u>두 직각삼각형 AOG, ANF</u>는 서로 닮음이고, 점 F는 선분 BN을 2 : 1로 내분하므로

$$\cos\theta = \frac{\overline{GO}}{\overline{AO}} = \frac{\overline{FN}}{\overline{AN}} = \frac{\overline{FN}}{\overline{BN}} = \frac{1}{3} \ \text{(참)}$$

02) 답 $\dfrac{400}{\sqrt{91}}$

그림과 같이 <u>직원뿔의 전개도</u>에서 부채꼴의 꼭짓점을 O라고 할 때, O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하면 선분 HB가 내리막길이 된다.



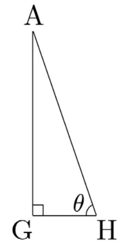
이때, 부채꼴의 중심각의 크기는 $\angle AOB = \dfrac{40\pi}{60} = \dfrac{2}{3}\pi$ 이므로 $\angle BOH = \theta$ 라고 하면 <u>두 직각삼각형 AOH, BOH</u>에서

$$\overline{OH} = 60\cos\left(\frac{2}{3}\pi - \theta\right) = 50\cos\theta \qquad \therefore \tan\theta = \frac{8}{\sqrt{27}}$$

따라서 $\sin\theta = \dfrac{8}{\sqrt{91}}$ 이므로 $\overline{HB} = 50\sin\theta = \dfrac{400}{\sqrt{91}}$

03) 답 $\dfrac{\sqrt{3}}{9}$

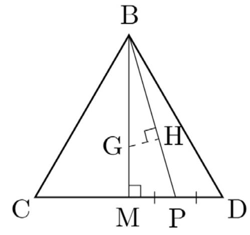
<u>두 평면 ABP, BCD의 교선</u>은 직선 BP이므로 꼭짓점 A에서 밑면 BCD에 내린 수선의 발을 G, 다시 점 G에서 직선 BP에 내린 수선의 발을 H라고 하면 삼수선의 정리에 의해



$\overline{AH} \perp \overline{GH}$

이므로 직각삼각형 AHG에서

$$\cos\theta = \frac{\overline{GH}}{\overline{AH}} \quad \cdots \text{㉠}$$



이때, 정사면체의 한 변의 길이를 4라 하고, 선분 CD의 중점을 M이라고 하면 두 직각삼각형 BGH, BPM은 서로 닮음이므로

$$\overline{GH} = \overline{PM} \cdot \frac{\overline{BG}}{\overline{BP}} = 1 \cdot \frac{\frac{4}{3}\sqrt{3}}{\sqrt{13}} = \frac{4}{\sqrt{39}}$$

또, $\overline{AG} = \overline{AB} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{8}{\sqrt{6}}$ 이므로 직각삼각형 AHG에서

$$\overline{AH} = \sqrt{\overline{AG}^2 + \overline{HG}^2} = \frac{12}{\sqrt{13}}$$

이상의 결과를 ㉠에 대입하면

$$\cos\theta = \frac{4}{\sqrt{39}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{12} = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

04) 답 162

직선 AP는 평면 BCD에 수직이고 직선 AQ는 선분 BC에 수직이므로 삼수선의 정리에 의해

$\overline{PQ} \perp \overline{BC}$

따라서 두 평면이 이루는 각의 크기는 두 직선 AQ, PQ가 이루는 각의 크기와 같으므로 삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하면

$$\cos(\angle AQP) = \frac{k}{S} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

이때, 삼각형 ABC의 넓이 S는

$$S = \frac{1}{2}\overline{AB} \cdot \overline{BC} \sin(\angle ABC) = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot 12 \sqrt{1 - \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2} = 18\sqrt{6}$$

이므로

$$\frac{k}{18\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{3}}{6} \qquad \therefore\ k = 9\sqrt{2}$$

결국, 구하는 값은 $k^2 = 162$

05) 답 $\frac{2\sqrt{3}}{3}\pi + \frac{3}{4}$

그림과 같이 두 원판 중 평면 α에 가까운 쪽에 있는 원판의 중심을 A, 먼 쪽에 있는 원판의 중심을 B, 직선 l을 포함하고 평면 α에 수직인 평면과 중심이 B인 원판의 교선이 이 원판의 경계와 만나는 점을 C라고 하자.