**<빠른 정답>**

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | ② | 2 | ④ | 3 | ④ | 4 | ② | 5 | ① |
| 6 | ③ | 7 | ⑤ | 8 | ③ | 9 | ⑤ | 10 | ④ |
| 11 | ② | 12 | ① | 13 | ③ | 14 | ③ | 15 | ① |
| 16 | ④ | 17 | ② | 18 | ③ | 19 | ① | 20 | ⑤ |
| 21 | ⑤ | 22 | 5 | 23 | 80 | 24 | 7 | 25 | 80 |
| 26 | 10 | 27 | 383 | 28 | 5 | 29 | 8 | 30 | 20 |

**<해설>**

1. 정답 ②

$$\lim_{x\to 0}\frac{2^x-1}{3^x-1}=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{2^x-1}{x}}{\frac{3^x-1}{x}}=\frac{\ln 2}{\ln 3}=\log_3 2$$

2. 정답 ④

${}_nP_2=n(n-1)$이므로 $n(n-1)=20$

$n^2-n-20=(n-5)(n+4)=0$

$\therefore n=5$

3. 정답 ④

$f(x)=\sin x+\cos 2x$

$f'(x)=\cos x-2\sin 2x$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right)=\cos\frac{\pi}{6}-2\sin\frac{\pi}{3}$

$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$

4. 정답 ②

곡선 $y=\log_a(nx)$가 $x$축과 만나는 점의 좌표는 $\left(\frac{1}{n},\,0\right)$이므로 $x_1=\frac{1}{n}$이고 $y=2$와 만나는 점의 $x$좌표 $x_2=\frac{a^2}{n}$이다.

$2x_1=x_2$에서 $\frac{2}{n}=\frac{a^2}{n}$이므로

$a^2=2$, $a>0\ (a\neq 1)$

$\therefore a=\sqrt{2}$

5. 정답 ①

$P(A\cap B^C)=0$에서 $A\subset B$이므로 $A\cap B=A$

$P(A|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{P(A)}{P(B)}$

$\therefore P(A|B)=\frac{3}{5}$

6. 정답 ③

$A=\{a_1,\,a_2,\,a_3,\,a_4\}$를 공집합이 아닌 서로소인 2개의 부분집합으로 분할하는 방법은

(ⅰ) $\{1\}$, $\{2,\,3,\,4\}$와 같이 원소의 개수가 1개, 3개인 경우 : ${}_4C_1=4$

(ⅱ) $\{1,\,2\}$, $\{3,\,4\}$와 같이 원소의 개수가 2개, 2개인 경우 : ${}_4C_2\times{}_2C_2\times\frac{1}{2!}=3$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 7가지이다.

7. 정답 ⑤

$\cos\left(x+\frac{\pi}{2}\right)=-\sin x$, $\cos(x+\pi)=-\cos x$이므로

$f(x)=-\sin x-(-\cos x)^2=-\sin x-\cos^2 x$

$=-\sin x-(1-\sin^2 x)$

$=\sin^2 x-\sin x-1$

$\sin x=t$라고 하면 $-1\leq t\leq 1$이고

$y=t^2-t-1=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{5}{4}$이고

$t=\frac{1}{2}$이므로 $\sin x=\frac{1}{2}$이다.

따라서 $x=\frac{\pi}{6}$, $\pi-\frac{\pi}{6}$이고 $x$좌표의 합은 $\pi$이다.

8. 정답 ③

$(a,\,b)$가 서로소인 경우는

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $(1,1)$ | $(1,2)$ | $(1,3)$ | $(1,4)$ | $(1,5)$ | $(1,6)$ |
| $(2,1)$ | | $(2,3)$ | | $(2,5)$ | |
| $(3,1)$ | $(3,2)$ | | $(3,4)$ | $(3,5)$ | |
| $(4,1)$ | | $(4,3)$ | | $(4,5)$ | |
| $(5,1)$ | $(5,2)$ | $(5,3)$ | $(5,4)$ | | $(5,6)$ |
| $(6,1)$ | | | | $(6,5)$ | |

이고 $a \geq b$ 인 경우는 빗금 친 부분이므로 구하는 확률은 $\frac{12}{23}$이다.

9. 정답 ⑤

초점의 $x$좌표가 $(\pm 5, 0)$이고 주축의 길이가 8이므로 쌍곡선의 방정식은 $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$이고 점근선의 방정식은 $y = \pm \frac{3}{4}x$이다.

원의 방정식은 $x^2 + y^2 = 25$이므로 점 P의 좌표는 $(4, 3)$이다.

$\angle PF'F = \theta$이면 $\angle POF = 2\theta$이다.

$\therefore \cos 2\theta = \frac{4}{5}$

10. 정답 ④

$\int_{-1}^{1} \{f'(2x) + f''(2x)\}dx$

$= \int_{-1}^{1} f'(2x)dx + \int_{-1}^{1} f''(2x)dx$

$2x = t$라고 하면

$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{2}$, $\begin{cases} x = -1, & t = -2 \\ x = 1, & t = 2 \end{cases}$ 이므로

$\int_{-1}^{1} \{f'(2x) + f''(2x)\}dx$

$= \int_{-2}^{2} \frac{1}{2} f'(t)dt + \int_{-2}^{2} \frac{1}{2} f''(t)dt$

$= \frac{1}{2}\{f(2) - f(-2)\} + \frac{1}{2}\{f'(2) - f'(-2)\}$

그런데 조건 (가)에 의하여 $f(2) = f(-2)$

$f(x) = f(-x)$의 양변을 미분하면

$f'(x) = -f'(-x)$이다.

$\therefore \int_{-1}^{1} \{f'(2x) + f''(2x)\}dx$

$= \frac{1}{2}(10 - 10) + \frac{1}{2}(6 + 6) = 6$

11. 정답 ②

부채꼴 $AOP$의 호의 길이가 $\frac{2}{3}\pi$, 반지름은 2이므로 $\angle AOP = \frac{\pi}{3}$이다.

따라서 $\triangle AOP$는 정삼각형이고 $\overline{AP} = 2$,

$\angle OAP = \frac{\pi}{3}$이다.

삼각형 $ABP$의 넓이를 $S$라고 하면

$S = \frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{AP} \times \sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \frac{1}{2} \times 4 \times 2 \times \left\{\sin\frac{\pi}{4}\cos\frac{\pi}{3} + \cos\frac{\pi}{4}\sin\frac{\pi}{3}\right\}$

$= \sqrt{2} + \sqrt{6}$

12. 정답 ①

$A(0, 0)$, $B\left(\frac{8}{3}, 0\right)$, $C(\alpha, \beta)$라고 하면

$\beta = \log_2(\alpha + 1)$ … ①

$\beta = \log_{\frac{1}{2}}\left(\alpha - \frac{5}{3}\right)$ … ②

①에서 $\alpha + 1 = 2^\beta$, $\alpha = 2^\beta - 1$

②에서 $\alpha - \frac{5}{3} = \left(\frac{1}{2}\right)^\beta$, $\alpha = \left(\frac{1}{2}\right)^\beta + \frac{5}{3}$이므로

$2^\beta - 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^\beta + \frac{5}{3}$, $2^\beta - 2^{-\beta} - \frac{8}{3} = 0$이다.

여기서 $2^\beta = t$라고 하면 $t - \frac{1}{t} - \frac{8}{3} = 0$

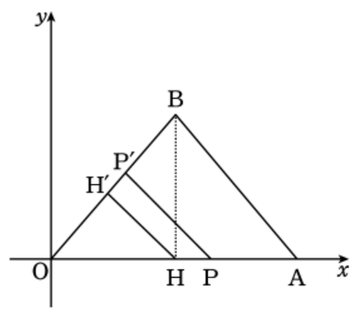
양변에 $t$를 곱하여 정리하면 $(3t+1)(t-3) = 0$,

$t > 0$이므로 $t = 3$이고 $\beta = \log_2 3$이다.

따라서 $\triangle ABC$의 넓이는

$\frac{1}{2} \times \frac{8}{3} \times \log_2 3 = \frac{4}{3}\log_2 3$이다.

13. 정답 ③



점 P의 $x$좌표를 $(1+h,\,0)$이라 하면 $a=1+h$ 이고

$\square HPP'H' = \triangle OPP' - \triangle OHH'$

$$= \frac{1}{2}(1+h)^2\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\text{이므로}$$

$$\lim_{a\to 1+}\frac{S(a)}{a-1} = \lim_{h\to 0+}\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}\{(1+h)^2-1^2\}}{h} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\therefore \lim_{a\to 1+}\frac{S(a)}{a-1} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

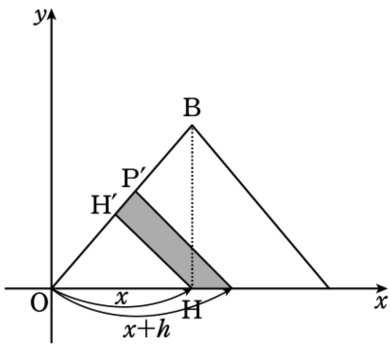
(참고)

$T(x) = \triangle OHH'$의 면적

$$= \frac{1}{2}x^2\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}x^2\text{이라 하면}$$

$T'(x) = \lim\limits_{h\to 0}\dfrac{S(x+h)-S(x)}{h}$이고

$T(x+h)-T(x)$는




와 같은 사다리꼴의 면적이 된다.

따라서 $T(x) = \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$이면

$\lim\limits_{a\to 1+}\dfrac{S(a)}{a-1} = T'(1) = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$이다.

14. 정답 ③

조건 (나)에서 $f(n+1)-f(n)=3$이므로 $(f(n),\,f(n+1))$의 순서쌍은 $(1,\,4)$, $(2,\,5)$가 존재한다.

( i ) $(1,\,4)$인 경우

$(f(1),\,f(2))$, $(f(2),\,f(3))$, $(f(3),\,f(4))$, $(f(4),\,f(5))$에 대응시키는 방법은 나머지 함숫값을 대응시키는 경우의 수는 $3!$가지이므로 $4\times 3!$이다.

( ii ) $(2,\,5)$인 경우도 $4\times 3!$ 가지이다.

그런데 ( i ), ( ii )에서

| $f(1)$ | $f(2)$ | $f(3)$ | $f(4)$ |
|---|---|---|---|
| 1 | 4 | 2 | 5 |

와 같은 경우의 수를 중복하여 세어지게 된다.

( iii ) 이 교집합의 경우의 수는 6가지

$\therefore$ ( i ), ( ii ), ( iii )에서 구하는 경우의 수는

$2\times 4\times 3! - 6 = 42$가지

15. 정답 ①

$x+t=u$라고 두면 $\dfrac{dt}{du}=1$이고

$\begin{cases} t=0\text{일 때, } u=x \\ t=1\text{일 때, } u=x+1 \end{cases}$ 이므로

$$\int_0^1 f(x+t)dt = \int_x^{x+1} f(u)du$$

$$\therefore \int_x^{x+1} f(u)du = \frac{e^x}{x}$$

양변을 미분하면

$$f(x+1)-f(x) = \frac{e^x x - e^x}{x^2} = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

$$\therefore f(3)-f(2) = \frac{e^2}{4}$$

16. 정답 ④

$f(x) = e^{-\frac{x^2}{a}}$ 에서

$$f'(x) = -\frac{2}{a}xe^{-\frac{x^2}{a}}$$

$$f''(x) = -\frac{2}{a}e^{-\frac{x^2}{a}} + \frac{4}{a^2}x^2e^{-\frac{x^2}{a}}$$

$$= \left(-\frac{2}{a}+\frac{4}{a^2}x^2\right)e^{-\frac{x^2}{a}}$$

따라서 $f''(x)=0$ 에서 $x=\pm\sqrt{\dfrac{a}{2}}$

그런데 $y=f(x)$는 $y$축에 대하여 대칭이므로

변곡점 $\left(-\sqrt{\dfrac{a}{2}},\, f\left(-\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)\right)$, $\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}},\, f\left(\sqrt{\dfrac{a}{2}}\right)\right)$

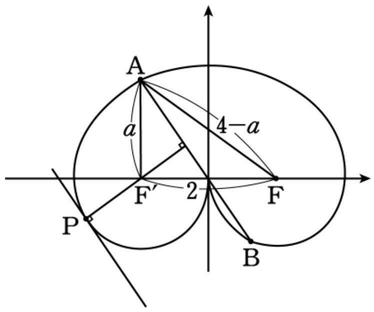
사이의 거리는 $2\sqrt{\frac{a}{2}}$ 이다.

$\left(\because f\left(-\sqrt{\frac{a}{2}}\right)=f\left(\sqrt{\frac{a}{2}}\right)\right)$

$\therefore 2\sqrt{\frac{a}{2}} \le 10$ 에서 $a \le 50$

따라서 $a$의 최댓값은 $50$이다.

17. 정답 ②




$\overline{AF'}=a$라고 하면 타원의 정의에 의하여

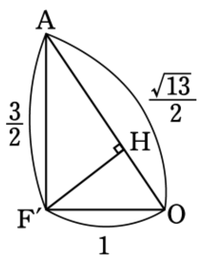
$\overline{AF}=4-a$이고 $\triangle AFF'$는 직각삼각형이므로

$a^2+4=(4-a)^2$에서 $a=\frac{3}{2}$이다.

즉 $A$점의 좌표는 $\left(-1,\ \frac{3}{2}\right)$이다.

직선 AB의 기울기가 $-\frac{3}{2}$이므로 $\triangle APB$의 면이 최대가 되려면 기울기가 $-\frac{3}{2}$인 직선이 $P$에 접하는 경우이다. 이 때, $\overline{PF'}$의 기울기는 $\frac{2}{3}$이다.

$\overline{PF'}=1$이고




직각삼각형 $AF'O$에서 $\overline{F'H}=\frac{3\sqrt{13}}{13}$이다.

$\therefore \overline{PH}=1+\frac{3\sqrt{13}}{13}$

18. 정답 ③

$V=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx$이다.

$$\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin^2 x}{x^2}dx=\left[-\frac{\sin^2 x}{x}\right]_{\pi}^{2\pi}+\int_{\pi}^{2\pi}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx$$

여기서 $\int_{\pi}^{2\pi}\frac{2\sin x\cos x}{x}dx=\int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin 2x}{x}dx$이다.

$2x=t$라고 두면 $\frac{dx}{dt}=2$, $\begin{cases} x=\pi, & t=2\pi \\ x=2\pi, & t=4\pi \end{cases}$

$\therefore \int_{\pi}^{2\pi}\frac{\sin 2x}{x}dx=\int_{2\pi}^{4\pi}\frac{\sin t}{t}dt$

따라서 $V=\left[-\frac{\sin^2 x}{x}\right]_{\pi}^{2\pi}+\int_{2\pi}^{4\pi}\frac{\sin x}{x}dx$

$\therefore \int_{2\pi}^{4\pi}\frac{\sin}{x}dx=V$

19. 정답 ①

$f(x)=xe^{\sin x}$

$f(\pi-x)=(\pi-x)e^{\sin(\pi-x)}$

그런데 $\sin(\pi-x)=\sin x$이므로

$f(\pi-x)=(\pi-x)e^{\sin x}$

$\therefore$ (가) $=\sin x$

한편 $\int_0^{\pi}f(\pi-x)dx$에서 $t=\pi-x$라고 하면,

$\frac{dt}{dx}=-1$이고 $x=0$이면 $t=\pi$, $x=\pi$이면 $t=0$

이므로 $\int_0^{\pi}f(x)dx=\int_0^{\pi}f(\pi-x)dx$가 성립한다.

$$\int_0^{\pi}xe^{\sin x}dx=\int_0^{\pi}(\pi-x)e^{\sin x}dx$$
$$=\int_0^{\pi}\pi e^{\sin x}dx-\int_0^{\pi}xe^{\sin x}dx$$

이 때, $\int_0^{\pi}e^{\sin x}dx=\pi\int_0^{\pi}e^{\sin x}dx=\pi A$

$\therefore$ (나) $=\pi$

$2\int_0^{\pi} xe^{\sin x}dx = \pi A$

$\therefore \int_0^{\pi} xe^{\sin x}dx = \dfrac{\pi}{2}A \quad \therefore$ (다) $= \dfrac{\pi}{2}$

그러므로 $g(x) = \sin x$, $a = \pi$, $b = \dfrac{\pi}{2}$

$\therefore \dfrac{a}{b}\cdot g\left(\dfrac{\pi}{6}\right) = 1$

20. 정답 ⑤

$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$이므로

곡선 위의 점 $P(t, \ln t)$에서의 접선의 방정식은

$y - \ln t = \dfrac{1}{t}(x - t)$이다.

$x = 0$일 때, $y = -1 + \ln t$,

$y = 0$일 때 $x = t - t\ln t$,

$0 < t < e$에서 $-1 + \ln t < 0$이므로

$f(t) = \dfrac{1}{2}(1 - \ln t)(t - t\ln t)$

$= \dfrac{1}{2}t(1 - \ln t)^2$이다.

$f'(t) = \dfrac{1}{2}\left\{(1-\ln t)^2 + 2t(1-\ln t)\left(-\dfrac{1}{t}\right)\right\}$

$= \dfrac{1}{2}(1 - \ln t)(-1 - \ln t)$

$= \dfrac{1}{2}(\ln t + 1)(\ln t - 1)$

$f'(t) = 0$에서 $\ln t = 1$ 또는 $\ln t = -1$이므로

| $t$ | $0$ | $\cdots$ | $\dfrac{1}{e}$ | $\cdots$ | $e$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(t)$ | | ↗ | $\dfrac{2}{e}$ | ↘ | $0$ | ↗ |

따라서 $0 < t < e$에서 $f(t)$는 $t = \dfrac{1}{e}$일 때,

최댓값은 $\dfrac{2}{e}$이다.

21. 정답 ⑤

$f(x) = \ln(2 - \sin x)$

$f'(x) = \dfrac{-\cos x}{2 - \sin x}$

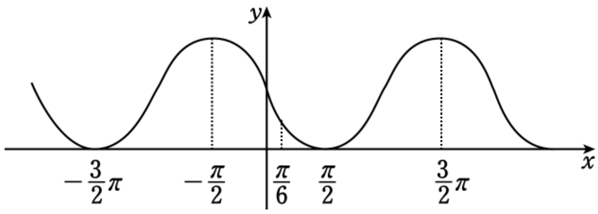
$f''(x) = \dfrac{\sin x(2 - \sin x) + \cos x(-\cos x)}{(2 - \sin x)^2}$

$= \dfrac{2\sin x - 1}{(2 - \sin x)^2}$

$f'(x) = 0$에서 $x = 2n\pi \pm (-1)^n\dfrac{\pi}{2}$이고,

$f''(x) = 0$에서 $x = n\pi \pm (-1)^n\dfrac{\pi}{6}$이므로

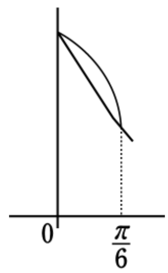
$y = f(x)$의 그래프 개형은 다음과 같다.




(ㄱ) $f'(0) = \dfrac{-\cos 0}{2 - \sin 0} = -\dfrac{1}{2} < 0 \quad \therefore$ 참

(ㄴ) $y = f(x)$는 구간 $\left(0, \dfrac{\pi}{6}\right)$에서 위로

볼록하다.




따라서 $\int_0^{\frac{\pi}{6}} f(x)dx \ge \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\left(f(0) + f\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right)$

$= \dfrac{\pi}{12}\left(\ln 2 + \ln\dfrac{3}{2}\right) = \dfrac{\pi}{12}\ln 3 \quad \therefore$ 참

(ㄷ) $g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$라 두면

$g'(x) = \dfrac{f'(x)x - f(x)}{x}$이고

구간 $\left(\dfrac{\pi}{6}, \dfrac{\pi}{3}\right)$에서 $f'(x) < 0$, $x > 0$, $f(x) > 0$

이므로 $g'(x) < 0$이다.

따라서 $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{f(x)}{x}dx < \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{6}}$이고

$\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{3}} \dfrac{f\left(\frac{\pi}{6}\right)}{\frac{\pi}{6}} < \ln\dfrac{3}{2}$이다. $\quad \therefore$ 참

22. 정답 ⑤

$f(x)=\dfrac{\ln x}{x^2+1}$

$f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}(x^2+1)-(\ln x)(2x)}{(x^2+1)^2}$

$=\dfrac{\frac{(x^2+1)}{x}-2x\cdot\ln x}{(x^2+1)^2}$

$\therefore f'(1)=\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$

$\therefore 10f'(1)=5$

23. 정답 80

$(x^2+2x)^5=\sum_{r=0}^{5}{}_5C_r(x^2)^r(2x)^{5-r}$

$=\sum_{r=0}^{5}{}_5C_r x^{5+r}(2)^{5-r}$

$5+r=6$이므로 $r=1$이다.

$\therefore x^6$의 계수$=2^4\times{}_5C_1=80$

24. 정답 7

$a<b<c$가 되도록 카드를 뽑는 경우의 수는 구분 없이 카드를 3장 뽑는 경우의 수와 같으므로 $q={}_{10}C_3$이다.

$\dfrac{q}{p}=\dfrac{{}_{10}C_3}{{}_{10}P_3}=\dfrac{1}{3!}=\dfrac{1}{6}$이므로

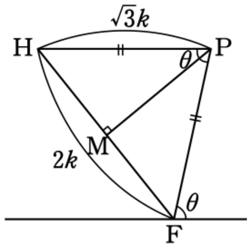
$\therefore p+q=7$

25. 정답 20

포물선의 정의에 의하여 $\overline{PF}=\overline{PH}$이고

$\angle HPF=\theta$라 하면

직선 PF의 기울기는 $\tan\theta$이다.




$\triangle PHF$는 이등변 삼각형이므로

$\angle HPM=\dfrac{\theta}{2}$이다.

따라서 $\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$이고 $\tan\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$이다.

$\therefore$ 직선 PF의 기울기

$=\tan\theta=\dfrac{2\tan\frac{\theta}{2}}{1-\tan^2\frac{\theta}{2}}=2\sqrt{2}$

$\therefore\ 10m^2=80$

26. 정답 10

$g'(0)=\lim_{h\to0}\dfrac{g(0+h)-g(0)}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{g(h)}{h}=e$이다.

$g(0)=0$이고 $g'(0)=e>0$이므로

충분히 작은 양수 $h$에 대하여

$g(h)>0,\ g(-h)<0$이다.

따라서

$\lim_{h\to0+}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0+}\dfrac{|g(kh)|-\pi|h|}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{g(kh)-\pi h}{h}$ $\cdots$ ①

$=\lim_{h\to0-}\dfrac{f(0+h)-f(0)}{h}=\lim_{h\to0-}\dfrac{|g(kh)|-\pi|h|}{h}$

$=\lim_{h\to0}\dfrac{-g(kh)+\pi h}{h}$ $\cdots$ ②

이고 $\lim_{h\to0}\dfrac{g(h)}{h}=\lim_{h\to0}\dfrac{g(kh)}{kh}\times k=ke$ 이므로

①=②에서 $ke-\pi=-ke+\pi$

$\therefore k=\dfrac{\pi}{e}$

$a=1$ 이므로 $10a=10$ 이다.

27. 정답 383

약수가 짝수개인 경우 → 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10

약수가 홀수개인 경우 → 1, 4, 9

이므로 $y$축에 대하여 대칭이동할 확률은 $\frac{3}{10}$

$x$축에 대하여 대칭이동할 확률은 $\frac{7}{10}$.

1사분면 위의 점이 3번의 대칭이동으로 4사분면으로 이동하기 위해서는

( i ) $x$축에 대한 대칭이동 3번

( ii ) $y$축에 대한 대칭이동 2번, $x$축에 대해 1번

따라서 ( i )의 경우는 $\left(\frac{7}{10}\right)^3$,

( ii )의 경우는 $\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)\times 3$

따라서 구하는 확률은

$\left(\frac{7}{10}\right)^3+\left(\frac{3}{10}\right)^2\left(\frac{7}{10}\right)\times 3=\frac{133}{250}$

$\therefore p+q=383$

28. 정답 5

$y=\sin 2x$와 $y=k\cos x$의 교점의 $x$좌표를 $a$라 하면 $\sin 2a=k\cos a$에서

$2\sin a\cos a=k\cos a$, $\cos a>0$이므로

$\sin a=\frac{k}{2}$이다.

두 곡선으로 둘러싸인 넓이

$=\int_a^{\frac{\pi}{2}}(\sin 2x-k\cos x)dx$

$=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x-k\sin x\right]_a^{\frac{\pi}{2}}$

$=-\frac{1}{2}\cos\pi-k+\frac{1}{2}\cos 2a+k\sin a$

$=\frac{1}{2}-k+\frac{1}{2}(1-2\sin^2 a)+k\sin a$

$k^2-4k+2=0$에서 $k=2\pm\sqrt{2}$이고

$0<k<1$이므로 $k=2-\sqrt{2}$이다.

$a=2$, $b=-1$이므로 $a^2+b^2=5$이다.

29. 정답 8

점 $D$에서 $\overline{PB}$ 위에 내린 수선의 발을 $H$라고 두고, $\overline{PH}=a$, $\overline{DH}=h$라고 하자.

$\angle BPA$는 $\angle BAC$와 호$AB$에 대한 원주각으로 같으므로

$\angle BPD=\frac{\pi}{6}$이다.

따라서 $h=a\tan\frac{\pi}{6}=(4\cos\theta-a)\tan\theta$

($\because \overline{BH}=4\cos\theta$), $a=\dfrac{4\cos\theta\tan\theta}{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\theta}$

$\therefore \lim_{\theta\to 0+}\frac{S(\theta)}{\theta}=\frac{1}{2\theta}\times 4\cos\theta\times\left(\dfrac{4\cos\theta\tan\theta}{\tan\frac{\pi}{6}+\tan\theta}\times\tan\frac{\pi}{6}\right)$

$=\frac{1}{2}\cdot 16\cdot\cos^2\theta\cdot\tan\frac{\pi}{6}\left(\dfrac{\tan\theta}{\theta\left(\tan\frac{\pi}{6}+\tan\theta\right)}\right)=8$

30. 정답 20