21. $f(x) = -\frac{kx^3}{x^2+1}$ $(k>1)$

일단 이 식을 보았으면 그래프 개형을 그릴 생각을 해야 한다. 개형은 그래프 그리기에 익숙한 사람이라면 미분 없이 바로 이렇게 그릴 수 있다. for 유베이스

//

for 노베이스

대부분 잘 알겠지만 혹시 미분 사용하지 않고 그래프 그리기가 어색한 사람을 위해 간단한 tip들을 적어본다면....

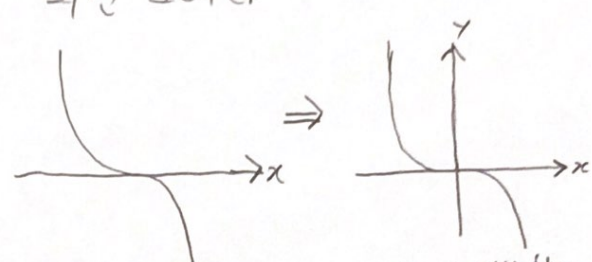
1. $x\to\infty$, $x\to-\infty$ 로 보낼 때 어디로 가지?
2. $x=\alpha$ 에서 함수가 정의 되지 않을 때 $x\to\alpha+$, $x\to\alpha-$ 로 보낼 때 어디로 가지?
3. x축과의 교점은 몇 개일까?

(※ 절대 직접적인 해를 구하면 안됨. 시간이 오래 걸림. 필요할 때 구한다.)

4. 사실 위 3개 정도 표시하면 그래프가 왠지 이럴 것 같은데? 하면 대체로 맞다.
5. 이외에 많이 쓰이는 추가 성질에는 우함수, 기함수가 있다. 그래프 식에 다항함수가 껴있다면 충분히 의심해봐야 한다.

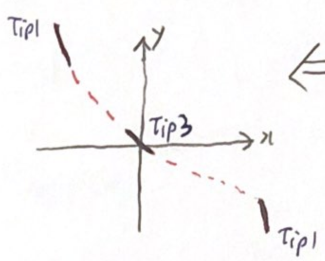
이런 것들이 있다. 사실 내가 생각 한건 아니고 '교과서'에 있다. "반드시 그래프 개형을 알아야 할 함수"들은 추후 칼럼에서 정리하도록 하겠다. Tip들 순서대로 $f(x)=\frac{-kx^3}{x^2+1}$ 그래프를 그린다면 ..

1. $\lim_{x\to\infty} f(x) = -\infty$ $\lim_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
2. 모든 x에 대해 정의됨 $(x^2+1>0)$
3. x축과 교점은 1개인데 그게 0이다. 0인게 너무 딱보이면 표시해주도록 하자. 참고로 그래프 그릴 때 "절대" y축은 먼저 그리지 마라. 원점 위치가 확정되면 그려라.



Tip 1, 2 + x절편 1개　　(0,0) 위치 확정

4. 그래서 결국 위처럼 그렸다.



⇐ 파란색 표시만이 사실 순수히 Tip1,2,3을 적용한 것이다. 하지만 이 정도 그렸으면 곡선들을 잇고 싶지 않은가?

5. 사실 이 함수는 기함수 였다. 이게 바로 보였다면 Tip1~4을 굳이 순서대로 안 따라도 되겠지만 기함수, 우함수 판별이 안된다면 Tip1~4를 순서대로 따라주자. 여기에서 그래프 개형 파악하기를 끝내도록 하자. //

$y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 가 만나는 점의

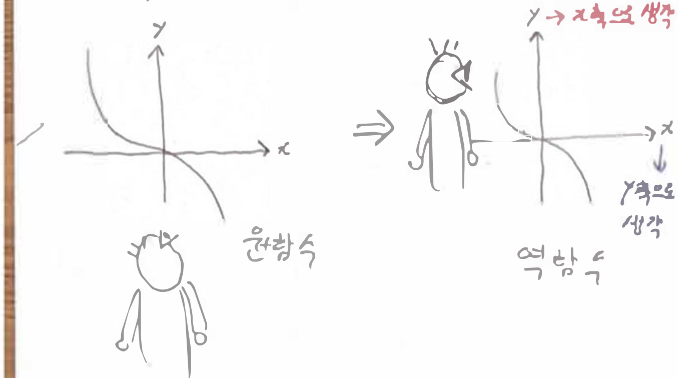
x좌표가 α, β 라고 한다 $(\alpha < \beta)$

사실 역함수 그래프는 고개를 오른쪽으로

$90°$ 꺾고 원함수 그래프 바라보면

파악이 된다 단, y축을 x축처럼 생각하고

x축을 y축으로 생각해야 한다



그림으로 표현하면 이 느낌이다.

하지만 나는 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$ 교점을

표시해야 하기에 $y=f^{-1}(x)$를 그려주겠다.

그나저나 나는 $f^{-1}(x)$라는 표현을 싫어한다

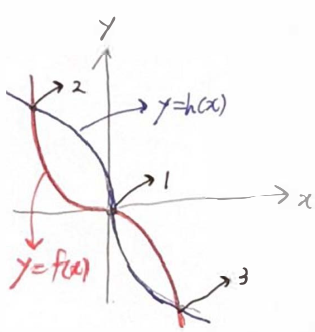
빽대가려여서 $f^{-1}(x)$를 $\frac{1}{f(x)}$로 가끔 착각하기

때문이다 따라서 나는 $f^{-1}(x)$를 $g(x)$로

하고 싶지만 g가 이미 쓰였기에 $h(x)$ 라고

해놓을거다. 내 마음이다 !!!

빠르고 직관적 풀이 (1)



참고로 $f'(0)=0$ 이 0이므로

$h(x)$는 $(0,0)$ 에서

미분 불가능이다

19 6평 21번,

17 9평 30번,

15 수능 30번 미분가능성

관련 문제 때문에 짚고 넘어간다

$y=f(x)$, $y=h(x)$는 $(0,0)$ 에서 만나고

유베이스라면 $(0,0)$ 이외에 짝수개의 교점이

$y=-x+k$ 위에 있다는 사실을 잘 안다 이를

바탕으로 교점들을 바라보면 교점 2, 3이

$y=-x$ 위에 있는 듯하다. 직관

이를 정확히 증명하자면 ......

교점 2 (a,b)라 하고 $a \neq -b$ 라 하자

$f(x)$는 (a,b)를 지나고 기함수 이므로 $(-b,-a)$를

지난다 하지만 기울기를 구하면 ....

$\frac{b+a}{a+b}=1$ 이다 !!! 이런 일은 있을 수 없다.

그 이유는 평균값 정리에서 알수 있다

평균값 정리는 나중에 미적분 ㄱ,ㄴ,ㄷ

관련해서 다룰것이다 (대표기출은 17년도 수능

20번이다) $f'(x) \leq 0$ 이므로 오류가 발생한다

따라서 $a=-b$ 이고 교점 2, 3은 $y=-x$ 위에

존재 한다 이로 부터 한가지 사실을 정리하자

기존 지식

* $f(x)$가 증가함수이고, $f^{-1}(x)$와의 교점이 있다면 100% 교점 전부가 $y=x$ 위에 존재한다. ($f(x)$, $f^{-1}(x)$ 교점이 없을 수도 있다.)

* $f(x)$가 감소 함수라면, $y=x$ 위에 $f^{-1}(x)$와의 교점이 '딱' 1개 존재하고, 그 이외에는 짝수개의 교점들이 $y=-x+k$ 위에 있다. $y=-x+k$ 위에 꼭 $y=f(x)$, $y=x$ 교점이 있을 필요는 없다. (짝수는 0, 2, 4, ...)

결국 $\alpha=-\beta$ 이다. $(\alpha<0)$

$p(x)=f(x+2\alpha)+2\alpha$, $p^{-1}(x)=g(x)$

새로 정의했다. 이습관도 은근 많이 중요하다.
계산을 많이 줄이거나 문제 파악이 쉬워진다.

남은 조건들

$f'(-\alpha)=2g'(\alpha)$, $f(\alpha)=-\alpha$

$f'(-\alpha)$는 뭐 그냥 쉽다. 대입이다

$g'(\alpha)$는 어떻게 구할까? for 노베이스

역함수 관계 일때는 꼭 $g(p(x))=x$

나 $p(g(x))=x$를 쓰라 이건 필수!

또 $p(-\alpha)=f(\alpha)+2\alpha=\alpha \Rightarrow p(-\alpha)=\alpha$

라고 알면 $g(\alpha)=-\alpha$를 꼭 써주자

4도 역함수 잘 못했는데 위의 빨간 밑줄들

내용을 필요할 때나 없을 때나 다 써서

실력이 많이 늘었다. (필요없을 때는 거의 없는듯)

$g(p(x))=x$ 이므로 $g'(p(x))p'(x)=1$

$x=-\alpha$를 대입하면 $g'(\alpha)=\dfrac{1}{p'(-\alpha)}$

$p'(x)=f'(x+2\alpha) \Rightarrow p'(-\alpha)=f'(\alpha)$

$f'(-\alpha)=f'(\alpha)$ 이고, ($f(x)$가 기함수 이므로)

$g'(\alpha)=\dfrac{1}{f'(\alpha)}$ 이므로 $(f'(\alpha))^2=2$ 이다.

계산, 생략 가능.

$f'(\alpha)<0$ 이므로 $f'(\alpha)=-\sqrt{2}$

이제 $f(x)=-x$ $f'(\alpha)=-\sqrt{2}$를 이용해 k를

구하자. $-\dfrac{kx^3}{x^2+1}=-x$ $f'(x)=-\dfrac{k(3x^2(x^2+1)-2x^4)}{(x^2+1)^2}$

$$\sqrt{2}=\frac{k\alpha^2(\alpha^2+3)}{(\alpha^2+1)^2}$$

$kx^3=x^3+x$ $(k-1)x^3-x=0$

$x((k-1)x^2-1)=0$ $\alpha<0$ 이므로

$\alpha=-\sqrt{\dfrac{1}{k-1}}$ 이다. 이를

$\sqrt{2}=\dfrac{k\alpha^2(\alpha^2+3)}{(\alpha^2+1)^2}$에 대입하면

$$\boxed{\therefore k=\frac{6+2\sqrt{2}}{7}}$$

자 이제 평가원 기출과 연관지어보자

문과 수학 나형 19년도 6월 29을 한번

봐보라. 이만 마무리 짓겠다. ㅃㅃ~