

[수학 1]

1. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족한다.

- (가) $a_1 = a, a_2 = b$ (단, a 와 b 는 0 이상 11 이하의 정수이다.)
(나) $S_n = a_1 + \dots + a_n$ 일 때, a_{n+1} 은 S_n 을 12로 나눈 나머지이다.

$\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 이 존재하는 순서쌍 (a, b) 의 개수는?

2. 수열 $\{a_n\}$ 이 다음 조건을 만족한다.

- (가) $a_n \geq 0$
(나) 서로 다른 자연수 m, n 에 대하여, m 이 n 의 배수이면 $a_m + a_n \leq 1$ 이다.

$a_2 + a_3 + \dots + a_{13} + a_{14}$ 의 최댓값을 구하여라.

[수학 2]

1. 사차함수 $h(x)$ 와 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

- (가) $h(x)$ 와 $g(x)$ 의 그래프는 한 점에서 만난다.
(나) $h(x)$ 는 y 축에 대칭이고 $h(x) + h(-x) = 2x^4 - 4x^2 + 2$ 이다.
(다) $h(g(x))$ 는 $x = 0$ 에서 x 축에 접한다.

$h(2) + g(1)$ 을 구하시오.

2. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

- (가) $(x-3)f(x) = g(x)$ 라 두면, 모든 실수 x 에 대해 $g(x) \geq 0$ 이다.
(나) $3 - g(x)$ 는 $x = 0$ 에서 x 축에 접한다.

$f(6)$ 을 구하여라.

3. 각각 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$, 이차함수 $g(x)$ 와 다항함수 $h(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

- (가) $f(x)$ 는 세 실근을 갖고, $g(x)$ 는 한 실근을 갖는다.
(나) $f(x) = f(-x)$
(다) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{f(x)}{x-4} = k$ (단, k 는 실수이다.)
(라) $\frac{f(x)}{g(x)} + f'(x) = \int_0^x g(x) + h(x)$

$h(k)$ 의 값을 구하시오.

4. $h(x) = (x+1)(x+2)(x^2 + ax + b)$ 가 다음 조건을 만족한다.

- $z(x) = \begin{cases} h(x) & (x \geq 0) \\ h(-x) & (x < 0) \end{cases}$ 이고, $g(k)$ 는 $z(x) = kx + h(0)$ 의 실근의 개수로 정의할 때
모든 실수 p 에 대해 $\lim_{x \rightarrow p} g(x)$ 가 존재하며 $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq g(0)$ 이다.

$h(2)$ 를 구하시오.

5. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $g(x)$ 와 최고차항의 계수가 k 인 이차함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

(가) $g(2-x) = g(2+x)$

(나) $g(x)$ 는 세 실근을 갖는다.

(다) $x = a$ 에서 $g(x)$ 와 $f(x)$ 모두 극값을 갖는 실수 a 가 존재한다.

(라) $g(x)$ 의 한 극값과 $-f(x)$ 의 한 극값이 같다.

(마) $h(x) = \begin{cases} g(x) & \alpha \leq x \leq \beta \\ |f(x)| & x < \alpha, \beta < x \end{cases}$ 일 때, $h(x)$ 는 미분가능하며 연속이다.

$g(\beta+1) + f(k-16)$ 의 값을 구하시오.

[확률과 통계]

1. 집합 $A = \{ 2^x 3^y \mid x \text{와 } y \text{는 } 1 \text{ 이상 } 4 \text{ 이하의 정수} \}$ 의 부분집합 B 중 다음 조건을 만족하는 집합 B 의 개수는?

(가) $n(B) \geq 2$

(나) $x < y$ 인 B 의 서로 다른 임의의 두 원소 x, y 에 대해, y 는 x 의 배수가 아니다.

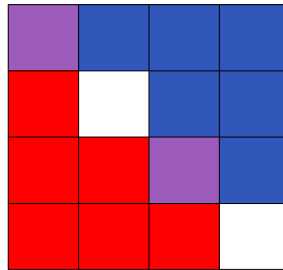
2. $n \times n$ 정사각형 판에 다음 조건을 만족하도록 파란색, 빨간색, 보라색을 칠하는 경우의 수를 a_n 이라 하자. (단, 색이 칠해지지 않은 칸이 있을 수 있다.)

(가) 빨간색 칸의 바로 아래와 바로 왼쪽 칸은 빨간색이다.

(나) 파란색 칸의 바로 위와 바로 오른쪽 칸은 파란색이다.

(다) 보라색 칸의 바로 아래와 바로 왼쪽 칸은 보라색 또는 빨간색이고, 보라색 칸의 바로 위와 바로 오른쪽 칸은 파란색이다.

예를 들어, 아래와 같은 색칠은 조건을 만족한다.



$25 \frac{a_5}{a_4}$ 의 값을 구하시오.

[미적분]

1. 함수 $f(x) = k \int_0^x \ln((x-b)^2 + c) dx$ 와 함수 $g(x) = \int_0^x |f'(x)| dx + f(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

(가) $x \geq a$ 에서 $\int_{-x}^a g(x) dx = g(x)$ 이다. (단, $a > 0$)

(나) $f(x)$ 는 $x = \frac{1}{4}a, \frac{3}{4}a$ 에서 극값을 갖는다.

$4(a+b+c)$ 의 값을 구하시오.

2. 연속함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족한다.

(가) $[0,1]$ 에서 $f(x) = a(3x^2 - 4x + 1) + b$ 이다. (단, $a, b \geq 0$)

(나) 임의의 두 실수 x, y 에 대해 $0 \leq f(y+1)f(x) = f(y)f(x+1)$ 이 성립한다.

(다) $\alpha \geq 0$ 에서 정의된 함수 $g(\alpha) = \int_0^\alpha f(x) dx$ 의 치역은 $\{x \mid 0 \leq x < 4\}$ 이다.

$\int_0^1 f(x) dx$ 의 최대를 구하여라.