정답 및 해설

수학 영역

정 답

1	②	2	①	3	①	4	②	5	⑤
6	⑤	7	①	8	④	9	④	10	②
11	②	12	①	13	③	14	⑤	15	④
16	④	17	⑤	18	⑤	19	③	20	③
21	②	22	9	23	24	24	18	25	4
26	47	27	20	28	12	29	50	30	141

해 설

1. [출제의도] 로그 계산하기
$\log 4+\log 25=\log 100=\log 10^2=2$

2. [출제의도] 함수의 극한 계산하기
$\lim\limits_{x\to 1}(3x^2+2)=5$

3. [출제의도] 거듭제곱근 계산하기
$\sqrt[3]{-8}+\sqrt[4]{81}=\sqrt[3]{(-2)^3}+\sqrt[4]{3^4}=-2+3=1$

4. [출제의도] 삼각함수의 뜻과 그래프 이해하기
$\cos\frac{2}{3}\pi=\cos\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2}$

5. [출제의도] 함수의 극한 이해하기
$\lim\limits_{x\to -1-}f(x)+\lim\limits_{x\to 1+}f(x)=1+2=3$

6. [출제의도] 부채꼴의 넓이 계산하기
부채꼴의 반지름의 길이를 r $(r>0)$이라 하면
$\frac{1}{2}\times r^2\times\frac{\pi}{4}=8\pi$, $r^2=64$
따라서 $r=8$

7. [출제의도] 수열의 귀납적 정의 이해하기
$a_4=31$, $a_4=2a_3+1$ 이므로 $a_3=15$
$a_3=15$, $a_3=2a_2+1$ 이므로 $a_2=7$

8. [출제의도] 로그의 뜻과 성질 이해하기
$\log_2 a=\log_8 b=\log_{2^3}b=\frac{1}{3}\log_2 b$ 이므로 $b=a^3$
따라서 $\log_a b=\log_a a^3=3$

9. [출제의도] 등비수열 이해하기
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면
$a_3=4a_1+3a_2$ 이므로 $a_1r^2=4a_1+3a_1r$
$a_1(r^2-3r-4)=0$, $a_1(r-4)(r+1)=0$
모든 항이 양수이므로 $a_1>0$, $r>0$
따라서 $r=4$ 이므로 $\frac{a_6}{a_4}=r^2=16$

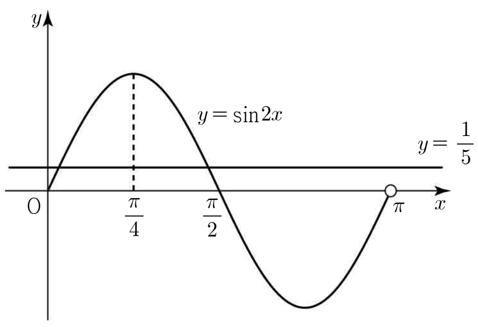
10. [출제의도] 사인법칙과 코사인법칙 이해하기
삼각형 ABC에서
$\overline{BC}=a$, $\overline{CA}=b$, $\overline{AB}=c$라 하면
사인법칙에 의하여 $\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{c}{\sin C}$
이므로 $a:b:c=2:3:4$
$a=2k$, $b=3k$, $c=4k$ $(k>0)$이라 하면
코사인법칙에 의하여
$\cos C=\frac{4k^2+9k^2-16k^2}{12k^2}=-\frac{1}{4}$

11. [출제의도] 등비수열의 합 이해하기
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r $(r>0)$이라 하면
$a_4=4a_2$ 이므로 $r^2=4$, $r=2$
$\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{3}{13}\sum_{k=1}^{n}{a_k}^2$ 이므로
$$\frac{\frac{1}{5}(2^n-1)}{2-1}=\frac{3}{13}\times\frac{\left(\frac{1}{5}\right)^2\{(2^2)^n-1\}}{2^2-1}$$
$2^n+1=65$
따라서 $n=6$

12. [출제의도] 삼각함수의 성질을 활용하여 문제 해결하기
$\sin^2x-4\sin x-5k+5\ge 0$
$\sin x=t$ $(-1\le t\le 1)$이라 하면
$t^2-4t-5k+5\ge 0$
$(t-2)^2-5k+1\ge 0$
$f(t)=(t-2)^2-5k+1$ $(-1\le t\le 1)$이라 하면
함수 $f(t)$는 $t=1$에서 최솟값을 가지므로
$1-5k+1\ge 0$, $k\le\frac{2}{5}$
따라서 k의 최댓값은 $\frac{2}{5}$

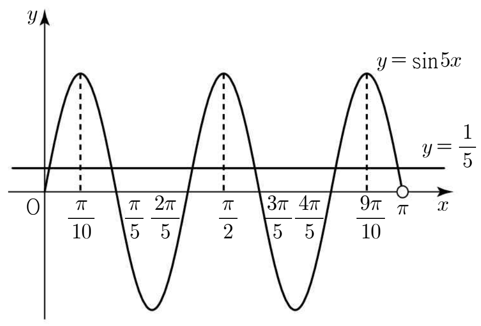
13. [출제의도] 여러 가지 수열의 합 이해하기
원의 중심 $(n,0)$과
직선 $a_n(x+1)-y=0$ $(a_n>0)$ 사이의 거리는
원 O_n의 반지름의 길이인 1과 같으므로
$\frac{|a_n(n+1)|}{\sqrt{{a_n}^2+(-1)^2}}=1$, $\{a_n(n+1)\}^2={a_n}^2+1$
${a_n}^2(n^2+2n)=1$, ${a_n}^2=\frac{1}{n(n+2)}$
따라서
$$\sum_{n=1}^{5}{a_n}^2=\sum_{n=1}^{5}\frac{1}{n(n+2)}=\frac{1}{2}\left\{\sum_{n=1}^{5}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)\right\}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}-\frac{1}{6}-\frac{1}{7}\right)=\frac{25}{42}$$

14. [출제의도] 삼각함수의 그래프 이해하기
$y=\sin nx$의 주기는 $\frac{2\pi}{n}$
(ⅰ) $n=2$일 때, $y=\sin 2x$의 주기는 π



$0\le x<\pi$에서 방정식 $\sin 2x=\frac{1}{5}$은
직선 $x=\frac{\pi}{4}$에 대하여 대칭인 해를
2개 가지므로 $f(2)=\frac{\pi}{4}\times 2=\frac{\pi}{2}$

(ⅱ) $n=5$일 때, $y=\sin 5x$의 주기는 $\frac{2\pi}{5}$



$0\le x<\pi$에서 방정식 $\sin 5x=\frac{1}{5}$은
세 직선 $x=\frac{\pi}{10}$, $x=\frac{\pi}{2}$, $x=\frac{9\pi}{10}$에
대하여 각각 대칭인 해를 2개씩 가지므로
$f(5)=\frac{\pi}{10}\times 2+\frac{\pi}{2}\times 2+\frac{9\pi}{10}\times 2=3\pi$

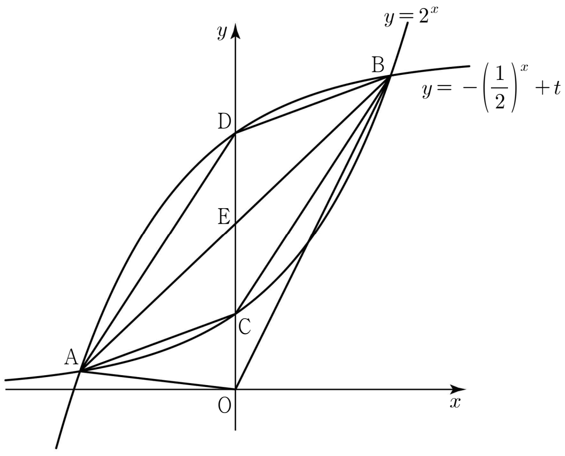
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $f(2)+f(5)=\frac{7}{2}\pi$

15. [출제의도] 로그함수의 그래프 이해하기
함수 $f(x)=-\log_3(mx+5)$는
$-1\le x\le 1$에서 정의되므로 $-5<m<5$
$f(-1)<f(1)$이므로 $m<0$
따라서 $-5<m<0$인 모든 정수 m의 개수는 4

16. [출제의도] 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기
$\overline{AD}=\overline{CE}=a$ $(a>0)$이라 하면
삼각형 ADE에서 코사인법칙에 의하여
$(\sqrt{13})^2=a^2+(a+1)^2-2a(a+1)\cos\frac{\pi}{3}$
$a^2+a-12=0$, $(a+4)(a-3)=0$, $a=3$
($\triangle$ADE의 넓이) $=\frac{1}{2}\times 4\times 3\times\sin\frac{\pi}{3}=3\sqrt{3}$
($\triangle$ABE의 넓이) $=\frac{1}{2}\times 4\times 1\times\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$
따라서 ($\triangle$BDE의 넓이)
$=$ ($\triangle$ADE의 넓이) $-$ ($\triangle$ABE의 넓이)
$=2\sqrt{3}$

17. [출제의도] 등차수열의 성질을 활용하여 문제 해결하기
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면
조건 (가)에 의하여 $a_7=a_1+6d=37$
조건 (나)에 의하여 $a_{13}\ge 0$이고 $a_{14}\le 0$
$a_1+12d\ge 0$, $37+6d\ge 0$, $-\frac{37}{6}\le d$
$a_1+13d\le 0$, $37+7d\le 0$, $d\le-\frac{37}{7}$
$-\frac{37}{6}\le d\le-\frac{37}{7}$이고 d는 정수이므로
$d=-6$, $a_1=73$
따라서
$$\sum_{k=1}^{21}|a_k|=|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_{21}|$$
$$=a_1+a_2+\cdots+a_{13}+(-a_{14})+(-a_{15})+\cdots+(-a_{21})$$
$$=(a_1+a_2+\cdots+a_{13})-(a_{14}+a_{15}+\cdots+a_{21})$$
$$=\sum_{k=1}^{13}a_k-\left(\sum_{k=1}^{21}a_k-\sum_{k=1}^{13}a_k\right)$$
$$=2\sum_{k=1}^{13}a_k-\sum_{k=1}^{21}a_k$$
$$=2\times\frac{13\{2\times 73+12\times(-6)\}}{2}-\frac{21\{2\times 73+20\times(-6)\}}{2}=689$$

18. [출제의도] 지수함수의 성질을 활용하여 문제 해결하기



점 A, B의 x좌표를 각각 α, β $(\alpha<0<\beta)$라 하면

α, β는 방정식 $(2^x)^2-t\times 2^x+1=0$의 두 근이므로 $2^\alpha+2^\beta=t$, $2^\alpha\times 2^\beta=1$

따라서 $\alpha+\beta=0$, $\beta=-\alpha$

네 점 $\mathrm{A}(\alpha,\ 2^\alpha)$, $\mathrm{B}(\beta,\ 2^\beta)$, $\mathrm{C}(0,\ 1)$, $\mathrm{D}(0,\ t-1)$에 대하여

ㄱ. $\overline{\mathrm{CD}}=t-2$ (참)

ㄴ. $\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(-\alpha)^2+(-2^\alpha+1)^2}$
$=\sqrt{\beta^2+(2^\beta-t+1)^2}=\overline{\mathrm{DB}}$ (참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{\alpha^2+(2^\alpha-t+1)^2}$
$=\sqrt{(-\beta)^2+(-2^\beta+1)^2}=\overline{\mathrm{CB}}$

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{DB}}$, $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CB}}$이므로 사각형 ACBD는 평행사변형이고 두 대각선의 교점을 E라 하면

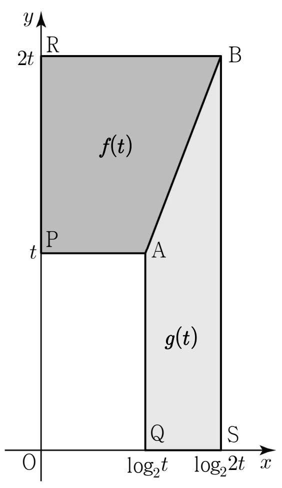
$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{DE}}$이므로 점 E의 좌표는 $\left(0,\ \frac{t}{2}\right)$

(△ABD의 넓이)
$=$(△AED의 넓이)$+$(△BDE의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times(-\alpha)\times\overline{\mathrm{DE}}+\frac{1}{2}\times\beta\times\overline{\mathrm{DE}}$
$=\frac{1}{2}\left(\frac{t-2}{2}\right)(-\alpha+\beta)$
$=\frac{(t-2)(-\alpha+\beta)}{4}=\frac{\beta(t-2)}{2}$

(△AOB의 넓이)
$=$(△OEA의 넓이)$+$(△OBE의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times(-\alpha)\times\overline{\mathrm{OE}}+\frac{1}{2}\times\beta\times\overline{\mathrm{OE}}$
$=\frac{t(-\alpha+\beta)}{4}=\frac{\beta t}{2}$

따라서 삼각형 ABD의 넓이는 삼각형 AOB의 넓이의 $\frac{t-2}{t}$배이다. (참)

19. [출제의도] 로그의 성질을 활용하여 문제 해결하기



두 점 A, B의 좌표는 $(\log_2 t,\ t)$, $(\log_2 2t,\ 2t)$이므로 두 사각형의 넓이 $f(t)$, $g(t)$는

$f(t)=\frac{1}{2}(\log_2 t+\log_2 2t)(2t-t)=\frac{t}{2}\log_2 2t^2$

$g(t)=\frac{1}{2}(t+2t)(\log_2 2t-\log_2 t)=\frac{3}{2}t$

$\frac{f(t)}{g(t)}=\frac{1}{3}\log_2 2t^2$

$\frac{1}{3}\log_2 2t^2=n$ (n은 자연수)라 하면

$2t^2=2^{3n}$이므로 $t=2^{\frac{3n-1}{2}}$

$1<t<100$을 만족시키는 자연수 n의 값은 1, 2, 3, 4

따라서 t의 값은 2, $2^{\frac{5}{2}}$, 2^4, $2^{\frac{11}{2}}$이므로 모든 t의 값의 곱은 2^{13}

20. [출제의도] 수학적 귀납법을 활용하여 추론하기

다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}\quad\cdots\cdots\quad(\bigstar)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

($\bigstar$)에서

$S_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$이라 하자.

(i) $n=1$일 때,

$S_1=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$, $T_1=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$

$S_1=\boxed{\frac{1}{2}}=T_1$이므로 ($\bigstar$)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때,

($\bigstar$)이 성립한다고 가정하면 $S_m=T_m$이다.

$n=m+1$일 때, ($\bigstar$)이 성립함을 보이자.

$S_{m+1}=S_m+\frac{1}{2m+1}+\boxed{\left(-\frac{1}{2m+2}\right)}$,

$T_{m+1}=T_m+\boxed{\left(-\frac{1}{m+1}\right)}$
$+\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m+2}$이다.

$S_{m+1}-T_{m+1}$
$=S_m-T_m+\frac{1}{m+1}-\frac{2}{2m+2}$
$=S_m-T_m$

$S_m=T_m$이므로 $S_{m+1}=T_{m+1}$이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 ($\bigstar$)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여

모든 자연수 n에 대하여 ($\bigstar$)이 성립한다.

$a=\frac{1}{2}$, $f(m)=-\frac{1}{2m+2}$, $g(m)=-\frac{1}{m+1}$

따라서 $a+\frac{g(5)}{f(14)}=\frac{11}{2}$

21. [출제의도] 로그함수의 성질을 활용하여 추론하기

$$f(x)=\begin{cases}x+2 & (0\le x<1)\\ -2x+5 & (1\le x\le 2)\end{cases}$$

$f(-x)=f(x)$, $f(x)=f(x+4)$이므로

함수 $y=f(x)$의 그래프는

y축에 대하여 대칭이고 주기는 4이다.

$1\le f(x)\le 3$이므로

$\log_{2^n}(x+2n)=1$, $x+2n=2^n$, $x=2^n-2n$

$\log_{2^n}(x+2n)=2$, $x+2n=2^{2n}$, $x=2^{2n}-2n$

$\log_{2^n}(x+2n)=3$, $x+2n=2^{3n}$, $x=2^{3n}-2n$

함수 $y=\log_{2^n}(x+2n)$의 그래프는 세 점 $(2^n-2n,\ 1)$, $(2^{2n}-2n,\ 2)$, $(2^{3n}-2n,\ 3)$을 지난다.

(i) $n=1$일 때,

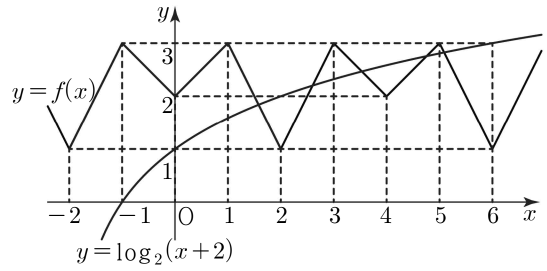
함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프는

세 점 $(0,\ 1)$, $(2,\ 2)$, $(6,\ 3)$을 지난다.

함수 $y=f(x)$의 그래프와

함수 $y=\log_2(x+2)$의 그래프가

만나는 점의 개수는 5



따라서 $a_1=5$

(ii) $n=2$일 때,

함수 $y=\log_4(x+4)$의 그래프는

세 점 $(0,\ 1)$, $(12,\ 2)$, $(60,\ 3)$을 지난다.

$1\le f(x)<2$일 때,

$0\le x\le 4$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와

함수 $y=\log_4(x+4)$의 그래프가

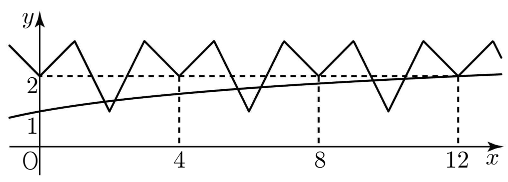
만나는 점의 개수는 2이고

함수 $y=f(x)$는 주기가 4이므로

$0\le x<12$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와

함수 $y=\log_4(x+4)$의 그래프가

만나는 모든 점의 개수는 $2\times\frac{12}{4}=6$



$2\le f(x)\le 3$일 때,

$12\le x\le 16$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와

함수 $y=\log_4(x+4)$의 그래프가

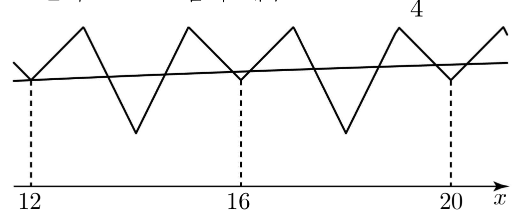
만나는 점의 개수는 4이고

함수 $y=f(x)$는 주기가 4이므로

$12\le x\le 60$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와

함수 $y=\log_4(x+4)$의 그래프가

만나는 모든 점의 개수는 $4\times\frac{60-12}{4}=48$



따라서 $a_2=6+48=54$

(iii) $n=3$일 때,

함수 $y=\log_8(x+6)$의 그래프는

세 점 $(2,\ 1)$, $(58,\ 2)$, $(506,\ 3)$을 지난다.

$1\le f(x)<2$일 때,

$2\le x\le 6$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와

함수 $y=\log_8(x+6)$의 그래프가

만나는 점의 개수는 2이고

함수 $y=f(x)$는 주기가 4이므로

$2\le x<58$에서 함수 $y=f(x)$의 그래프와

함수 $y=\log_8(x+6)$의 그래프가

만나는 모든 점의 개수는 $2\times\frac{58-2}{4}=28$

$2 \le f(x) \le 3$일 때,
$58 \le x \le 62$에서 함수 $y = f(x)$의 그래프와
함수 $y = \log_8(x+6)$의 그래프가
만나는 점의 개수는 4이고
함수 $y = f(x)$는 주기가 4이므로
$58 \le x \le 506$에서
함수 $y = f(x)$의 그래프와
함수 $y = \log_8(x+6)$의 그래프가
만나는 모든 점의 개수는
$4 \times \dfrac{506-58}{4} = 448$
따라서 $a_3 = 28 + 448 = 476$

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여
$a_1 + a_2 + a_3 = 5 + 54 + 476 = 535$

22. [출제의도] 지수 계산하기

$3^4 \times 9^{-1} = 81 \times \dfrac{1}{9} = 9$

23. [출제의도] 등차수열 이해하기

$2y = 7 + 13$, $y = 10$
공차가 3이므로 $x = 7 - 3 = 4$
따라서 $x + 2y = 4 + 20 = 24$

24. [출제의도] $\sum$의 성질을 활용하여 수열의 합 이해하기

$2\sum_{n=1}^{6}(a_n - b_n) = 56$, $\sum_{n=1}^{6}(a_n - b_n) = 28$

$a_6 - b_6 = \sum_{n=1}^{6}(a_n - b_n) - \sum_{n=1}^{5}(a_n - b_n)$
$= 28 - 10 = 18$

25. [출제의도] 삼각함수 사이의 관계 이해하기

$\dfrac{\pi}{2} < \theta < \pi$인 θ에 대하여

$\tan\theta = -\dfrac{4}{3}$이므로 $\sin\theta = \dfrac{4}{5}$

$5\sin(\pi+\theta) + 10\cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right)$
$= -5\sin\theta + 10\sin\theta = 5\sin\theta = 4$

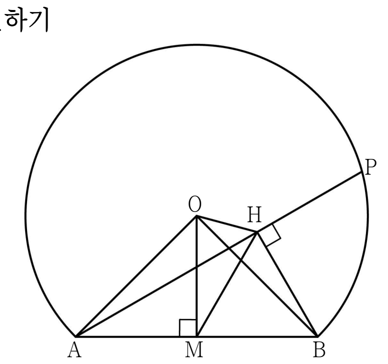
26. [출제의도] 지수함수의 성질을 활용하여 문제 해결하기

지수함수 $y = 5^x$의 그래프를
x축의 방향으로 a만큼,
y축의 방향으로 b만큼 평행이동한 그래프를
나타내는 함수는 $y = 5^{x-a} + b$이다.

$5^{-a} = \dfrac{1}{9} \times 5^{-1}$, $b = 2$이다.

$5^a = 45$이고 $b = 2$
따라서 $5^a + b = 47$

27. [출제의도] 코사인법칙을 활용하여 문제 해결하기



점 O에서 선분 AB에 내린
수선의 발을 M이라 하면
삼각형 OAB는 직각이등변삼각형이므로
$\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{BM}}$
삼각형 OAM에서
$\overline{\mathrm{OA}} = 2$, $\angle\mathrm{OAM} = \dfrac{\pi}{4}$이므로
$\overline{\mathrm{AM}} = \overline{\mathrm{OM}} = \overline{\mathrm{BM}} = \sqrt{2}$
삼각형 ABH에서
$\angle\mathrm{BAH} = \dfrac{\pi}{6}$이므로 $\overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{2}$
삼각형 BHM에서
$\overline{\mathrm{BM}} = \overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{2}$, $\angle\mathrm{ABH} = \dfrac{\pi}{3}$이므로
삼각형 BHM은 정삼각형
따라서 $\overline{\mathrm{HM}} = \sqrt{2}$, $\angle\mathrm{BMH} = \dfrac{\pi}{3}$
삼각형 OMH에서
$\angle\mathrm{OMH} = \dfrac{\pi}{6}$, $\overline{\mathrm{OM}} = \overline{\mathrm{HM}} = \sqrt{2}$이므로
코사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{OH}}^2 = (\sqrt{2})^2 + (\sqrt{2})^2 - 2 \times \sqrt{2} \times \sqrt{2} \times \cos\dfrac{\pi}{6}$
$= 4 - 2\sqrt{3}$
$m = 4$, $n = -2$
따라서 $m^2 + n^2 = 20$

28. [출제의도] 지수함수의 성질을 활용하여 문제 해결하기

$\left(\dfrac{1}{4}\right)^x - (3n+16) \times \left(\dfrac{1}{2}\right)^x + 48n \le 0$

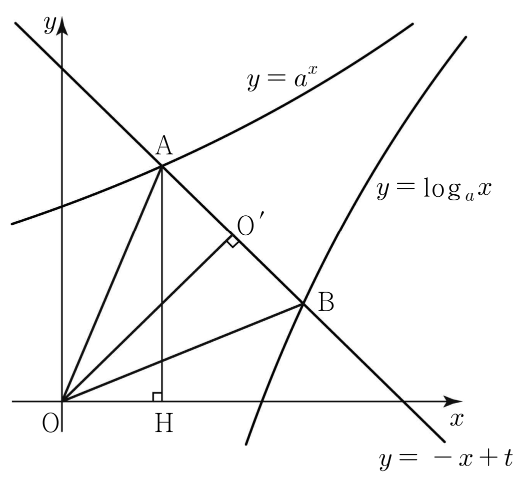
$\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 3n\right\}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^x - 16\right\} \le 0$

(ⅰ) $3n \le 16$일 때,
$3n \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \le 16$을 만족시키는
정수 x의 개수가 2가 되도록 하려면
$2^2 < 3n \le 2^3$, $n = 2$

(ⅱ) $3n > 16$일 때,
$16 \le \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \le 3n$을 만족시키는
정수 x의 개수가 2가 되도록 하려면
$2^5 \le 3n < 2^6$, $n = 11, 12, \cdots, 21$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n의 개수는 12

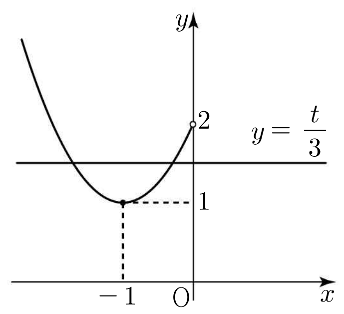
29. [출제의도] 지수함수와 로그함수의 성질을 활용하여 추론하기



점 A의 좌표를 (p, q) $(q > p)$라 하면
$q = a^p$, $p + q = t$ ⋯ ㉠
함수 $y = \log_a x$는 함수 $y = a^x$의 역함수이므로
점 B의 좌표는 (q, p)
$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2(q-p)^2} = \sqrt{2}(q-p)$
조건 (가)에 의하여
$2\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{AB}}$, $2p = \sqrt{2}(q-p)$,
$q = (1+\sqrt{2})p$ ⋯ ㉡
원점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 O′이라
하면 조건 (가)에 의하여 $\overline{\mathrm{OH}} = \overline{\mathrm{BO'}}$이고
$\overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{OB}}$, $\angle\mathrm{OHA} = \angle\mathrm{BO'O} = \dfrac{\pi}{2}$이므로
$\triangle\mathrm{AOH} \equiv \triangle\mathrm{OBO'}$ ⋯ ㉢
$\angle\mathrm{AOB} = \theta$라 하면
$\angle\mathrm{AOH} = \angle\mathrm{O'OH} + \angle\mathrm{AOO'} = \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2}$
$\angle\mathrm{OBO'} = \dfrac{\pi}{2} - \angle\mathrm{BOO'} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}$
㉢에 의하여 $\angle\mathrm{AOH} = \angle\mathrm{OBO'}$이므로
$\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\theta}{2} = \dfrac{\pi}{2} - \dfrac{\theta}{2}$, $\theta = \dfrac{\pi}{4}$
사인법칙에 의하여
$\overline{\mathrm{AB}} = 2 \times \dfrac{\sqrt{2}}{2} \times \sin\dfrac{\pi}{4} = 1 = 2p$, $p = \dfrac{1}{2}$
㉡에 의하여 $q = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
㉠에 의하여
$t = 1 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$, $a = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = \dfrac{3}{4} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$
따라서 $200(t-a) = 50$

30. [출제의도] 함수의 극한을 활용하여 문제 해결하기

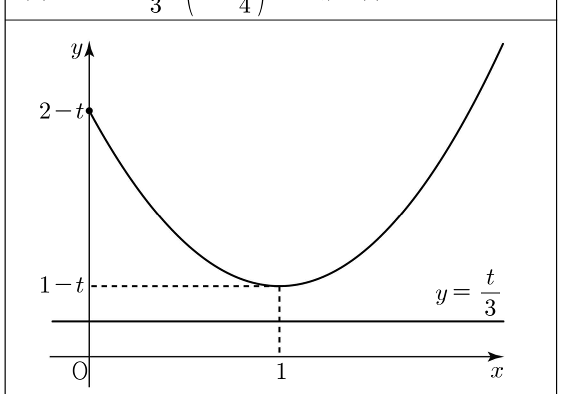
(ⅰ) 함수 $y = f(x)$ $(x < 0)$의 그래프와
직선 $y = \dfrac{t}{3}$가 만나는
서로 다른 점의 개수를 $r(t)$라 하면



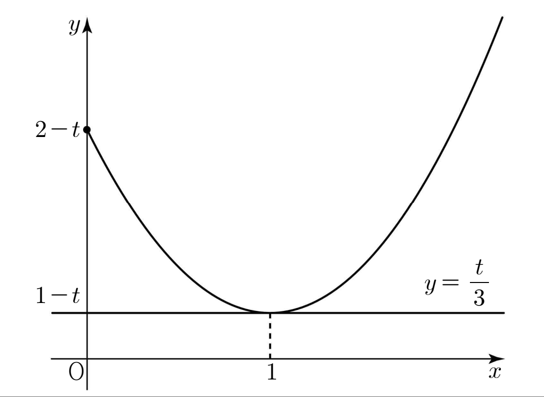
$$r(t) = \begin{cases} 0 & (t < 3) \\ 1 & (t = 3) \\ 2 & (3 < t < 6) \\ 1 & (t \ge 6) \end{cases}$$

(ⅱ) 함수 $y = |f(-x) - t|$ $(x \ge 0)$의 그래프와
직선 $y = \dfrac{t}{3}$가 만나는
서로 다른 점의 개수를 $s(t)$라 하자.
$f(-x) - t = x^2 - 2x + 2 - t$
$= (x-1)^2 + 1 - t$
함수 $y = f(-x) - t$의 그래프의
꼭짓점의 좌표는 $(1, 1-t)$,
y축과 만나는 점의 y좌표는 $2 - t$

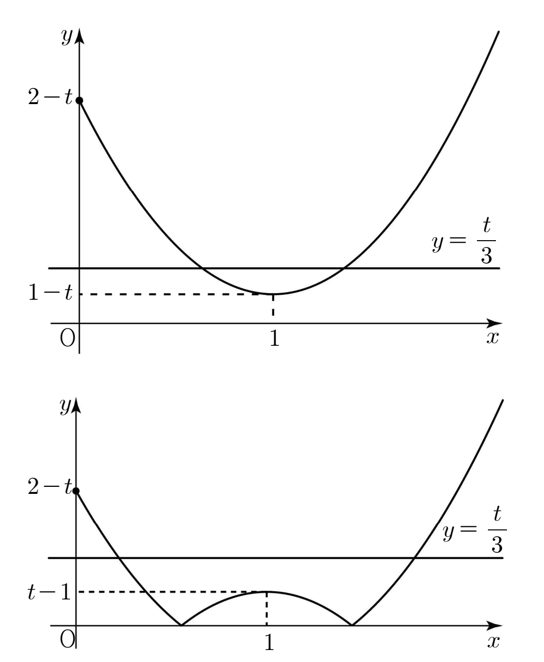
(1) $1 - t > \dfrac{t}{3}$ $\left(t < \dfrac{3}{4}\right)$일 때, $s(t) = 0$



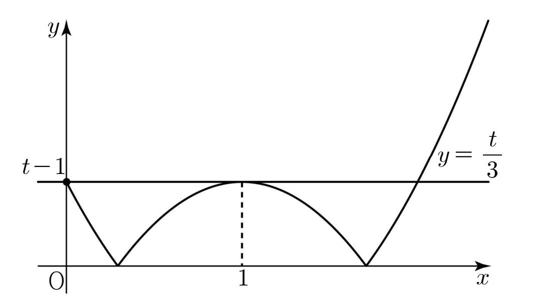
(2) $1-t=\dfrac{t}{3}$ $\left(t=\dfrac{3}{4}\right)$일 때, $s(t)=1$



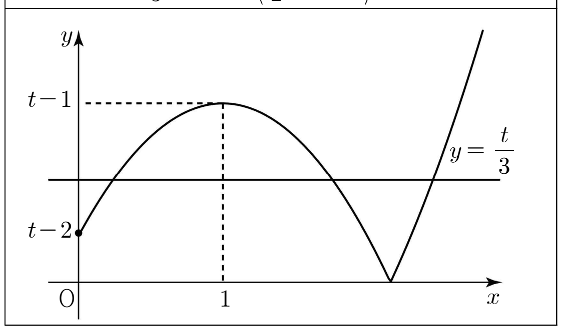
(3) $|1-t|<\dfrac{t}{3}<2-t$ $\left(\dfrac{3}{4}<t<\dfrac{3}{2}\right)$일 때, $s(t)=2$



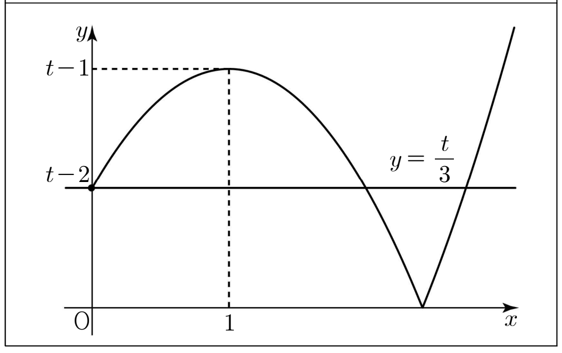
(4) $t-1=\dfrac{t}{3}=2-t$ $\left(t=\dfrac{3}{2}\right)$일 때, $s(t)=3$



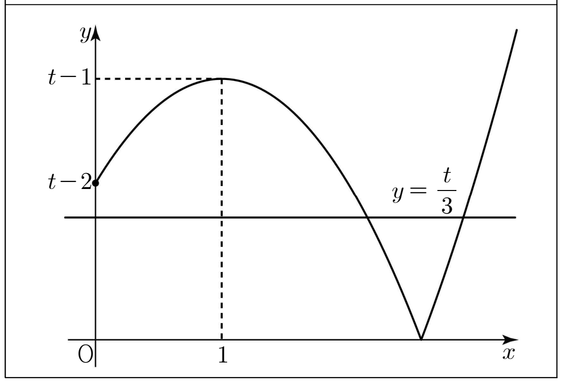
(5) $t-2<\dfrac{t}{3}<t-1$ $\left(\dfrac{3}{2}<t<3\right)$일 때, $s(t)=3$



(6) $\dfrac{t}{3}=t-2$ $(t=3)$일 때, $s(t)=3$



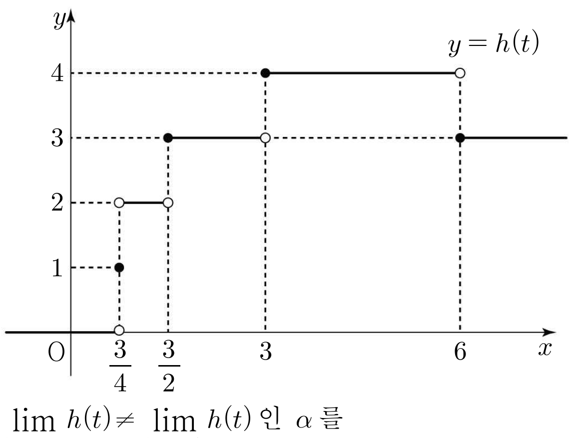
(7) $\dfrac{t}{3}<t-2$ $(t>3)$일 때, $s(t)=2$



$$s(t)=\begin{cases} 0 & \left(t<\dfrac{3}{4}\right) \\ 1 & \left(t=\dfrac{3}{4}\right) \\ 2 & \left(\dfrac{3}{4}<t<\dfrac{3}{2}\right) \\ 3 & \left(\dfrac{3}{2}\le t\le 3\right) \\ 2 & (t>3) \end{cases}$$

(i), (ii)에 의하여
함수 $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=\dfrac{t}{3}$가 만나는 서로 다른 점의 개수 $h(t)=r(t)+s(t)$

$$h(t)=\begin{cases} 0 & \left(t<\dfrac{3}{4}\right) \\ 1 & \left(t=\dfrac{3}{4}\right) \\ 2 & \left(\dfrac{3}{4}<t<\dfrac{3}{2}\right) \\ 3 & \left(\dfrac{3}{2}\le t<3\right) \\ 4 & (3\le t<6) \\ 3 & (t\ge 6) \end{cases}$$



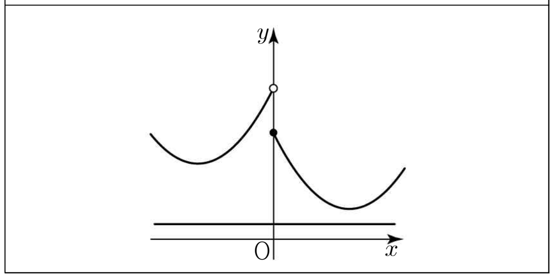
$\lim\limits_{t\to\alpha-}h(t)\neq\lim\limits_{t\to\alpha+}h(t)$인 α를
작은 수부터 크기순으로 나열하면
$\alpha_1=\dfrac{3}{4}$, $\alpha_2=\dfrac{3}{2}$, $\alpha_3=3$, $\alpha_4=6$이고
$h(\alpha_1)=1$, $h(\alpha_2)=3$, $h(\alpha_3)=4$, $h(\alpha_4)=3$

따라서

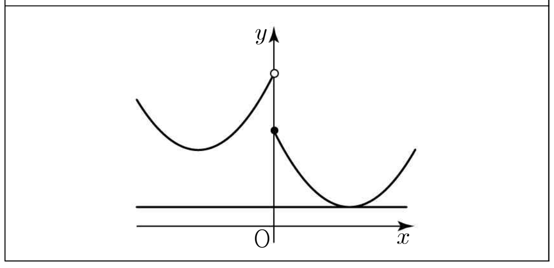
$$\sum_{k=1}^{m}\{4\alpha_k\times h(\alpha_k)\}$$
$$=4\times\left(\dfrac{3}{4}\times1+\dfrac{3}{2}\times3+3\times4+6\times3\right)=141$$

(참고)
실수 t에 대하여 직선 $y=\dfrac{t}{3}$와
함수 $y=g(x)$의 그래프는 다음과 같다.

(i) $t<\dfrac{3}{4}$일 때,

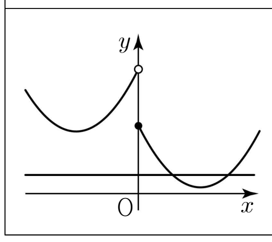


(ii) $t=\dfrac{3}{4}$일 때,

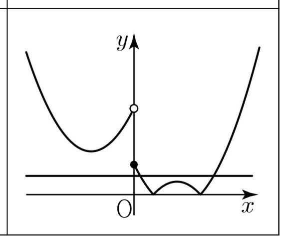


(iii) $\dfrac{3}{4}<t<\dfrac{3}{2}$일 때,

$\dfrac{3}{4}<t\le1$

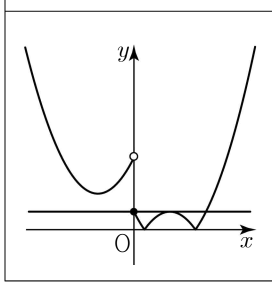


$1<t<\dfrac{3}{2}$

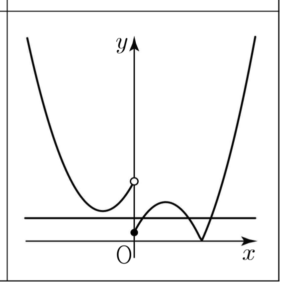


(iv) $\dfrac{3}{2}\le t<3$일 때,

$t=\dfrac{3}{2}$

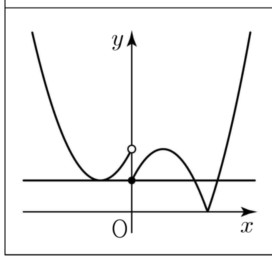


$\dfrac{3}{2}<t<3$

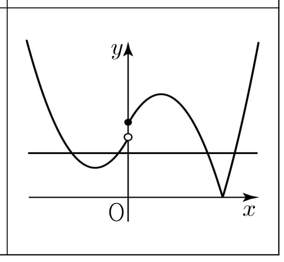


(v) $3\le t<6$일 때,

$t=3$



$3<t<6$



(vi) $t\ge6$일 때,