제 2 교시

수학 영역 (B형)

5지선다형

1. $3^{\log_3 5} \times \frac{16}{5}$ 의 값은? [2점]

① 6 ② 9 ③ 13 ④ 16 ⑤ 18

2. 이차 정사각행렬 $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}$ 가 있다. A^2의 모든 성분의 합은? [2점]

① -1 ② 0 ③ 1 ④ 2 ⑤ 4

3. 곡선 $y = \ln(x^2+1)$ 위의 점 $(1, \ln 2)$에서의 접선의 기울기의 값은? [2점]

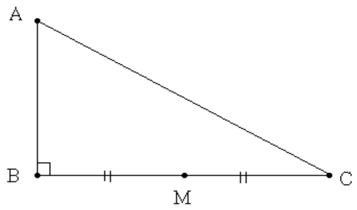
① 2 ② $\frac{5}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{3}{4}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

4. 서로 독립인 두 사건 A, B에 대하여 $P(B) = \frac{1}{4}$ 이고, $P(A \cap B) = 2P(A) - P(B)$ 일 때, $P(A)$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{16}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{9}$ ④ $\frac{1}{8}$ ⑤ $\frac{1}{7}$

5. 다음 그림과 같이 직각 삼각형 ABC가 있다.

$\overline{AC}=13$, $\overline{BM}=\overline{MC}=6$ 일 때, $\overrightarrow{AM}\circ\overrightarrow{AC}$ 의 값은? [3점]



① 78 ② 97 ③ 98 ④ 100 ⑤ 121

6. 남학생의 비율이 각각 40%, 50% 인 학교 A,B가 있다.
두 학교 모두 안경을 쓴 학생의 비율은 60% 이고. 학생의 수는 B 학교가 A학교보다 2배가 많다. A학교 학생 중 한명을 뽑았을 때, 그 학생이 안경을 쓴 남학생일 확률은 0.2 이고 A,B 학교 전체 여학생 중 안경을 쓴 학생의 비율은 50% 이다. 이때, B학교 남학생 중 한명을 뽑았을 때, 그 학생이 안경을 쓴 학생일 확률은? [3점]

① 0.8 ② 0.6 ③ 0.4 ④ 0.2 ⑤ 0.1

7. 일차변환 f, g를 나타내는 행렬이 각각

$\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{pmatrix}$ 일 때, 점 $A(1,0)$가 $f\circ g$에 의해

n번 옮겨진 점의 y좌표를 y_n이라 하자. y_4의 값은? [3점]

① 16 ② 8 ③ -4 ④ -8 ⑤ -16

8. 어느 지역에 살고 있는 사람의 수의 변화를 조사한 결과 지금으로부터 t년 후 사람의수를 N이라 하면 등식

$$\log N = k + t\log\frac{1}{10} \quad (\text{단, } k\text{는 상수})$$

가 성립한다고 한다. 이 지역의 사람의 수가 현재 4000명 일때, 이 지역 사람이 4명이 되는 해는 지금으로부터 n년 후이다. n의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

9. $a_{2^n} = 2a_n$인 수열 a_n이 $a_{n+1} \geq a_n$,$a_1 = 1$을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} a_k$ 의 최댓값을 구하시오. [3점]

① 33 ② 44 ③ 47 ④ 53 ⑤ 59

10. 다음은 $\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k! = n(n+1)!$ 임을 풀어가는 과정이다 .

$(k^2+1)k!$에서 $k^2+1=(k+1)^2-\boxed{(가)}$ 로 바꾸면
$[(k+1)^2-\boxed{(가)}]k!$ 이다..
위의 식을 전개하면
$\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2 k! - \sum_{k=1}^{n}\boxed{(가)}k!$ 을 얻는다.
위식에서
$(k+1)^2 k! = (k+1)(k+1)! = (k+2-1)(k+1)!$ 으로
변형한 후, $\boxed{(가)}$식도 이와 비슷하게 변형 하면
$\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k! = \sum_{k=1}^{n}(k+2)! - 3(k+1)! + \boxed{(나)}$ …… (*)

(*)에서
k=1부터 대입하면, $\sum_{k=1}^{n}(k^2+1)k! = n(n+1)!$을
얻는다.

위의 과정에서 (가)에 알맞은 식을 $f(k)$, (나)에 알맞은 식을 $g(k)$이라 할 때, $f(5)+g(3)$의 값은? [3점]

① 13 ② 17 ③ 20 ④ 22 ⑤ 25

11. 모든 실수 x에서 정의된 함수 $f(x)$가 $\int_a^x f(t)dt = x^3 - 4x$를 만족할 때, $\int_0^{2a} f(t)dt$의 값은? (단, a는 양의 상수) [3점]

① 15 ② 32 ③ 48
④ 64 ⑤ 81

12. 모든 실수 x에서 정의된 함수

$$f(x) = \sin 2x + 2\sin x - 2\cos x$$

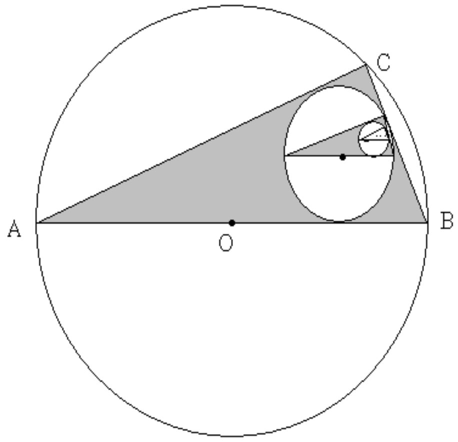
의 최솟값은? [3점]

① $5+2\sqrt{2}$ ② $4-3\sqrt{2}$ ③ $4+2\sqrt{2}$
④ $-1-2\sqrt{2}$ ⑤ $5-2\sqrt{2}$

13. 좌표평면 위에 타원 $\frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$와 포물선 $y^2=8x$가 1사분면에서 만나는 점을 P 라고 할 때, 타원의 두 초점을 각각 F', F 라고 하면, $\overline{FP}$의 값은? (단, $\overline{FP} > \overline{F'P}$이다.) [3점]

① $\frac{14}{3}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ 6 ④ $\frac{13}{2}$ ⑤ 7

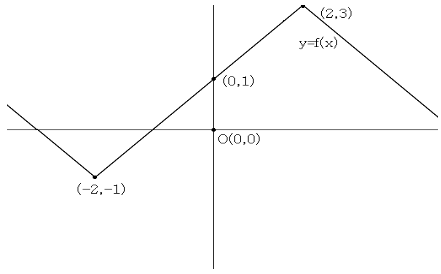
14. 그림과 같이 $\angle BAC = \frac{\pi}{6}$, $\overline{AB} = 2$인 직각 삼각형 ABC를 원 O에 내접 시킨다. 이때, 삼각형 ABC에 내접하는 원의 중심을 O_2라고 하고, O_2에 내접하고 삼각형ABC 닮음이 되도록 하는 삼각형을 $A_2B_2C_2$이라 하자. 마찬가지 방법으로 삼각형을 얻을 때 그 삼각형을 $A_3B_3C_3$ 이라 하자. 이와 같은 시행을 n번 반복할 때, 얻어지는 삼각형$A_nB_nC_n$의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ 의 값은?(단, 삼각형 $ABC = A_1B_1C_1$)[4점]



① $\frac{3}{4}$ ② $2-\sqrt{3}$ ③ 1
④ $\sqrt{3}$ ⑤ $1+\sqrt{3}$

15. 함수 $y = f(x)$가 다음과 같다.

$$f(x) = \begin{cases} -x-3 & (x \le -2) \\ x+1 & (-2 < x < 2) \\ -x+5 & (x \ge 2) \end{cases}$$



$\int_{-3}^{3} x^2 f(x)dx$ 의 값은? [4점]

① 15 ② 18 ③ 21
④ 24 ⑤ 27

16. 두 이차정사각행렬 A, B 가

$$ABA+A=E,\ A^2B^2=A$$

를 만족시킬 때, 옳은 것만을 <보기>에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

<보 기>

ㄱ. $AB=BA$

ㄴ. $BAB=E$

ㄷ. $AB=B^2-E$

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

17. 삼차함수 $y=f(x)$의 역함수를 $g(x)$라고 하자.

(가) $g(0)=1$

(나) $f(f(x))=(x-2)^2h(x)$ 인 다항함수 h(x)가 존재한다

(다) $\int_1^2 f(x)dx \ge \frac{1}{2}$

위 조건을 만족하는 $f(x)$에 대하여, $f(4)$의 값은? [4점]

① 5　② 9　③ 11
④ 13　⑤ 17

18. 구간 $[-3,3]$에서 임의의 값을 취하는 확률변수 X의 확률 밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족한다.

(가) $f(-x)=f(x)$

(나) $\int_{-3}^{3} x^2 f(x)dx=4$

$V(X)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

19. $f(x)=3x^4-8x^3+6x^2$ 가 있다.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq 1, x \leq \frac{1}{3}) \\ h(x) & (\frac{1}{3} \leq x \leq 1) \end{cases}$$

함수 $g(x)$는 모든 실수에서 미분 가능하고, $h(x)$는 구간 $(\frac{1}{3},1)$에서 $h'(x)>0, h''(x)<0$ 을 만족할 때, 임의의 $h(x)$에 대하여 항상 $\int_{\frac{1}{3}}^{1} g(x)dx < k$ 을 만족시키도록 하는 k의 최솟값은? [4점]

① $\frac{15}{32}$ ② $\frac{109}{33}$ ③ $\frac{46}{81}$ ④ $\frac{69}{50}$ ⑤ $\frac{123}{36}$

20. 쌍곡선 $\frac{x^2}{4}-\frac{y^2}{12}=1$에서 1사분면 위의 한 점 P와 쌍곡선의 두 초점 F', F에 대하여 삼각형 $PF'F$ 내접하는 원의 반지름이 2일 때, 삼각형 $PF'F$의 넓이는? [4점]

① 24 ② 32 ③ 39 ④ 45 ⑤ 64

21. 사차함수 $f(x)=x(x-2)^3$이 있다.

연속함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x) \geq mx-3) \\ mx-3 & (f(x) < mx-3) \end{cases}$ 로 정의한다.

$g(x)$가 오직 한 점에서만 미분 불가능하도록 하는 m의 값은? [4점]

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 1 ⑤ 2

단답형

22. 분수방정식 $\frac{1}{x}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{5}$ 의 모든 실근의 합을 구하시오. [3점]

23. 좌표공간 $\mathrm{B}(2,\ 2,\ 4)$, $\mathrm{C}(2,\ 3,\ 3)$ 을 지나는 직선과 점 $O(0,0,0)$ 사이의 거리를 d라 할 때, d^2의 값을 구하시오. [3점]

24. 구간 $-\pi < x < \pi$에서 삼각방정식 $\sin x\cos x=\sin^2 x-\frac{1}{2}$의 모든 실근의 합은 $\frac{\pi}{a}$이다. a의 값은? [3점]

25. 10명의 회원들에게 사이트 자유이용권 15장을 모두 나누어 주려고 한다. 모든 회원이 적어도 1개 이상의 이용권을 받고, 반장회원과 부반장 회원은 적어도 2개 이상씩 받도록 한다. 이때, 이용권을 나누어 주는 방법의 수는? [3점]

26. 좌표 공간에서 구 $x^2+y^2+z^2=36$이 평면

$$2x-y+z-2\sqrt{30}=0$$

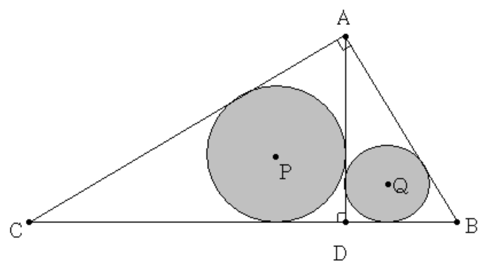
과 만나서 생기는 원을 C라고 하자.
구 위의 두 점 A, B에서 원 C를 포함하는 평면에 내린 수선의 발을 각각 P, Q라고 하자.

(가) $\overline{AB}=6$이고, 원 C와 평행하다.

(나) $\overrightarrow{OP} \circ \overrightarrow{OQ}=18$

원 C를 포함하는 평면과 삼각형 OPQ가 이루는 각의 크기를 θ라 할 때, $7\tan^2\theta$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이다.) [4점]

27. 다음 그림과 같이 $\overline{AC}=5$, $\angle ACB=\frac{\theta}{2}$인 직각삼각형$ABC$가 있다.



원P의 넓이를 $f(\theta)$, 원Q의 넓이를 $g(\theta)$라고 할때, $\lim_{\theta \to 0+} \frac{g(\theta)}{\theta^2 f(\theta)}$ 의 값은 a이다. $40a$의 값을 구하시오. [4점]

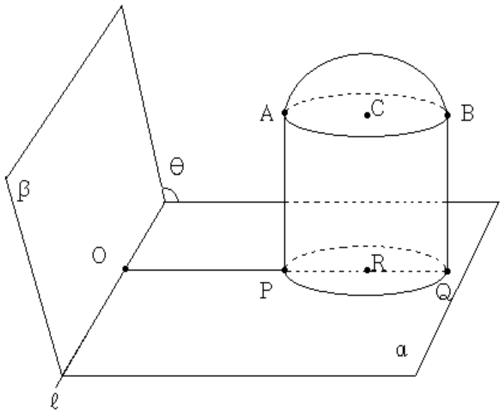
28. $F(x)=\int_0^x f(t)dt$ 인 함수 $F(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 양수 a에 대하여, $\int_0^a (F(x)+3)f(x)dx=20$

(나) 모든 실수 x에 대하여, $f(x)>0$

$\int_0^a f(x)dx$ 의 값을 구하시오. [4점]

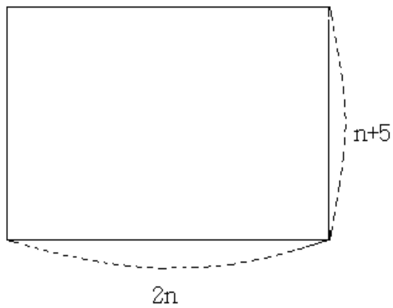
29. 다음 그림과 같이 이루는 각이 θ인 두 평면 α, β가 있다. 평면 α 위에 반지름이 $2\sqrt{3}$, 높이가 8인 원기둥을 올려놓고 그 위에 중심이 C와 일치하도록 반지름이 $2\sqrt{3}$인 반구를 올려놓는다.



(가)교선 ℓ 위의 한 점 O에 대하여 네점 O,P,R,Q 는 한직선 위에 있고, $2\overline{OP}=\overline{OQ}$, $\overline{OP}\perp\ell$ 을 만족한다. (나) 반구를 평면 β위에 정사영한 도형의 넓이는 9π이다.

점 A와 평면 β사이의 거리를 구하시오.(단, 점 C와 R은 각각 원기둥의 윗면과 밑면의 중심이고 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$ 이다.) [4점]

30. 아래 그림과 같이 가로의 길이가 $2n$, 세로의 길이가$n+5$인 직사각형이 있다. 한 변의 길이가 k인 정사각형을 아래 직사각형 속에 넣을 때, 넣을 수 있는 정사각형의 최대 개수가 1이 되도록 하는 최소의 자연수 k를 a_n이라 하자. 예를 들어 $a_2=4$이고 $a_3=5$이다. $\sum_{n=2}^{10} a_n$을 구하시오. [4점]



＊ 확인 사항 ◦ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

정답

1. ④
2. ④
3. ③
4. ⑤
5. ②
6. ①
7. ②
8. ③
9. ⑤
10. ④
11. ③
12. ④
13. ①
14. ③
15. ②
16. ⑤
17. ②
18. ④
19. ③
20. ①
21. ⑤
22. 14
23. 22
24. 2
25. 220
26. 20
27. 10
28. 4
29. 10
30. 65