수학 영역

공통 과목				선택 과목					
				확률과 통계		미 적 분		기 하	
1	①	12	③	23	①	23	①	23	④
2	③	13	④	24	③	24	②	24	⑤
3	④	14	⑤	25	④	25	⑤	25	②
4	①	15	①	26	②	26	④	26	①
5	⑤	16	27	27	⑤	27	③	27	③
6	①	17	32	28	②	28	②	28	②
7	②	18	20	29	151	29	8	29	15
8	③	19	3	30	984	30	6	30	12
9	②	20	21						
10	④	21	28						
11	②	22	200						

1. 정답) ①

$$\sin\frac{\pi}{3}\times\tan\frac{\pi}{6}=\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{2}$$

2. 정답) ③

$$\lim_{x\to 3}\frac{x^2+1}{x-2}=\frac{3^2+1}{3-2}=10$$

3. 정답) ④

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$a_4=a_2+2d=5+2d=9 \quad\Rightarrow\quad d=2$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$a_8=a_4+4d=9+8=17$$

이다.

4. 정답) ①

함수 $f(x)=x^3+x^2-2x$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{f(1-2h)-f(1)}{3h}&=\lim_{h\to 0}\left\{\frac{f(1-2h)-f(1)}{-2h}\times\left(-\frac{2}{3}\right)\right\}\\&=-\frac{2}{3}f'(1)\end{aligned}$$

이다. 함수 $f(x)$의 도함수가 $f'(x)=3x^2+2x-2$이므로 구하는 값은 $-\frac{2}{3}f'(1)=-2$이다.

5. 정답) ⑤

함수 $f(x)$가

$$\begin{aligned}f(x)&=\int f'(x)\,dx\\&=\int(3x^2-4x)\,dx\\&=x^3-2x^2+C\ (C\text{는 적분상수})\end{aligned}$$

이므로

$$f(1)=-1+C=5 \quad\Rightarrow\quad C=6$$

이다. 따라서 함수 $f(x)=x^3-2x^2+6$이므로 구하는 값은 $f(2)=6$이다.

6. 정답) ①

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$\frac{a_4}{a_2}=r^2=4 \quad\Rightarrow\quad r=2\ (\because r>0)$$

이다. 또한,

$$\begin{aligned}S_8-S_5&=a_6+a_7+a_8\\&=a_6(1+r+r^2)\\&=7a_6\\&=42\end{aligned}$$

이므로 $a_6=6$이다. 따라서 구하는 값은

$$a_{10}=a_6\times r^4=6\times 16=96$$

이다.

7. 정답) ②

$n-4$의 n제곱근 중 실수의 개수가 2가 되려면 n은 짝수이고 $n-4>0$이어야 한다. 따라서 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 n은 6, 8, 10이므로 구하는 값은 $6+8+10=24$이다.

8. 정답) ③

함수 $f(x)=x^4-8x^3+18x^2+4$의 그래프 위의 점 $(a,\ f(a))$에서의 접선이 y축과 수직이 되려면 접선의 기울기가 0이어야 한다. 즉, 함수 $f(x)$의 도함수

$$f'(x)=4x^3-24x^2+36x$$

에 대하여 $f'(a)=0$이므로

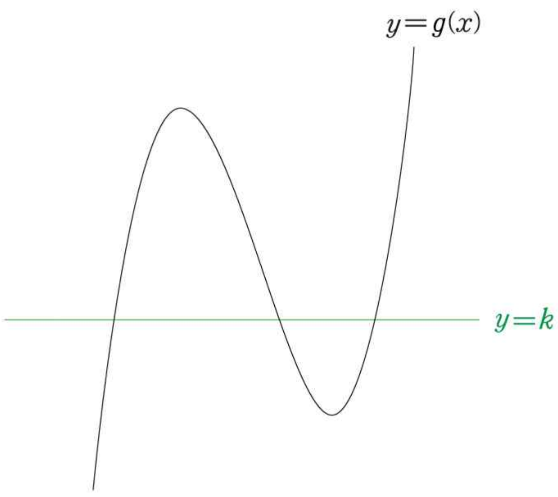
$$\begin{aligned} f'(a)=4a^3-24a^2+36a=0 &\Rightarrow 4a(a^2-6a+9)=0 \\ &\Rightarrow 4a(a-3)^2=0 \\ &\Rightarrow a=0 \text{ 또는 } a=3 \end{aligned}$$

이다. 따라서 구하는 값은 $0+3=3$이다.

9. 정답) ②

함수 $f(x)=|x^3-6x^2+9x-k|$가 극대 또는 극소가 되는 실수 x의 개수가 5가 되려면 방정식 $x^3-6x^2+9x-k=0$이 서로 다른 세 실근을 가져야 한다.

이때, 함수 $g(x)=x^3-6x^2+9x$라 하면 곡선 $y=g(x)$와 직선 $y=k$의 교점의 개수가 3이어야 한다.



함수 $g(x)$의 극댓값을 M, 극솟값을 m이라 하면 $m<k<M$이어야 한다. 함수 $g(x)$의 도함수가

$$g'(x)=3x^2-12x+9=3(x-1)(x-3)$$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=1$에서 극댓값 4, $x=3$에서 극솟값 0을 갖는다.

따라서 구하는 실수 k의 범위는 $0<k<4$이므로 $\alpha+\beta=0+4=4$이다.

10. 정답) ④

$$f(m)=\frac{2^m\times m}{(m+2)!},\quad g(m)=2^m(m+2)$$

이므로 $f(2)=\dfrac{2^2\times 2}{4!}=\dfrac{1}{3}$, $g(4)=2^4\times 6=96$이다.

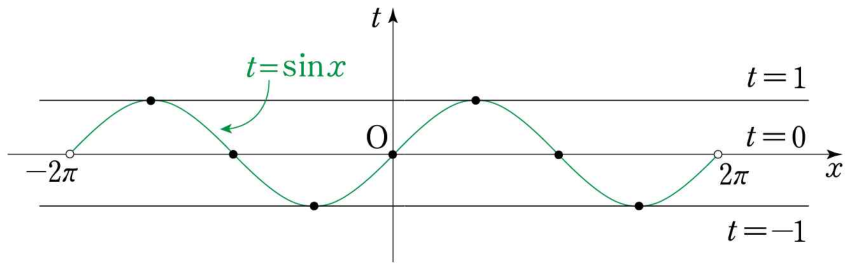
따라서 구하는 값은 $f(2)g(4)=32$이다.

11. 정답) ②

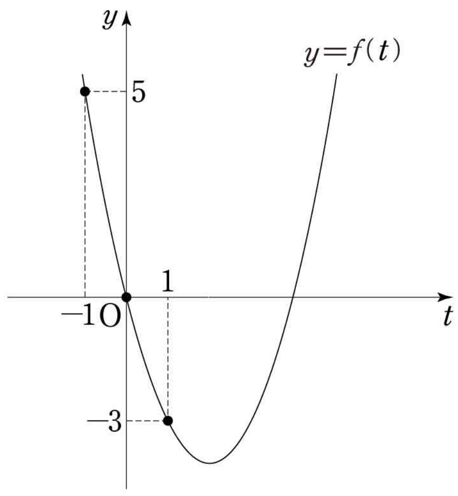
$\sin x=t\ (-1\le t\le 1)$이라 하면 주어진 방정식은

$$\sin^2 x-4\sin x-k=0 \Rightarrow t^2-4t=k$$

이다. 이때, 방정식 $\sin^2 x-4\sin x-k=0$에 대하여 $t=1$ 또는 $t=-1$이면 서로 다른 실근의 개수가 2이고, $t=0$이면 서로 다른 실근의 개수가 3이므로 가능한 실수 t의 범위는 $-1<t<1$이고 $t\ne 0$이다.



$f(t)=t^2-4t$라 하면 함수 $y=f(t)$의 그래프는 다음과 같다.



$f(1)=-3$, $f(-1)=5$이고 $f(0)=0$이므로 가능한 정수 k의 범위는

$$-3<k<0 \text{ 또는 } 0<k<5$$

이다. 따라서 구하는 정수 k의 개수는 6이다.

12. 정답) ③

수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n}+a_{2n+1}=2a_n$을 만족시키므로

$$\sum_{k=1}^{15}a_k=a_1+\sum_{k=1}^{7}(a_{2k}+a_{2k+1})=a_1+\sum_{k=1}^{7}2a_k$$

이다. 이때,

$$\sum_{k=1}^{7}a_k=a_1+\sum_{k=1}^{3}(a_{2k}+a_{2k+1})=a_1+\sum_{k=1}^{3}2a_k$$

이므로 $\displaystyle\sum_{k=1}^{15}a_k=3a_1+4\times\sum_{k=1}^{3}a_k$이다.

한편, $a_{2n}+a_{2n+1}=2a_n$에 $n=1$을 대입하면

$a_2+a_3=2a_1$이므로

$$\sum_{k=1}^{3} a_k = a_1+a_2+a_3=3a_1$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=1}^{15} a_k = 3a_1+4\times 3a_1=15a_1=60$$

이므로 구하는 값은 $a_1=4$이다.

13. 정답) ④

함수 $f(x)=-(x+1)^2(x-5)$이므로 방정식

$$f(x)=g(x) \quad \Rightarrow \quad f(x)-g(x)=0$$

에서

$$\begin{aligned} f(x)-g(x) &= -(x+1)^2(x-5)-f'(n)(x+1) \\ &= -(x+1)\{(x+1)(x-5)+f'(n)\} \end{aligned}$$

이다. 방정식 $f(x)=g(x)$가 서로 다른 세 실근을 가지려면 $f'(n)\neq 0$이어야 하고, 방정식 $(x+1)(x-5)+f'(n)=0$의 판별식 D에 대하여 $D>0$이어야 한다.

한편, 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x)=-3x^2+6x+9=-3(x+1)(x-3)$$

이므로 $f'(n)=-3(n+1)(n-3)$이다. 즉,

$$f'(n)\neq 0 \quad \Rightarrow \quad n\neq -1 \text{ 또는 } n\neq 3$$

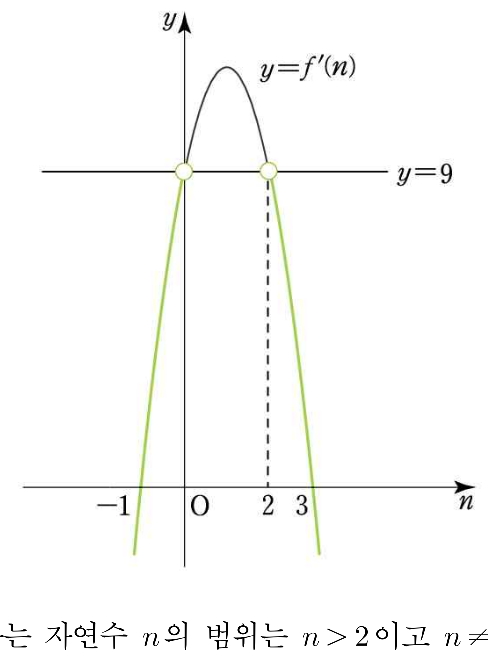
이고,

$$(x+1)(x-5)+f'(n)=x^2-4x-5+f'(n)$$

이므로 방정식 $x^2-4x-5+f'(n)=0$의 판별식 D에 대하여

$$\frac{D}{4}=(-2)^2-\{-5+f'(n)\}=9-f'(n)>0 \quad \Rightarrow \quad f'(n)<9$$

이므로 $n<0$ 또는 $n>2$이다.



따라서 구하는 자연수 n의 범위는 $n>2$이고 $n\neq 3$이므로 n의 최솟값은 4이다.

14. 정답) ⑤

조건 (가)에 따라 $f(x+6)=-\frac{1}{2}f(x)$, $g(x+6)=2g(x)$이다.

또한, 조건 (나)에서

$$\int_0^6 f(x-3)\,dx=\int_{-3}^3 f(x)\,dx=12$$

이고,

$$\begin{aligned} \int_3^9 f(x)g(x)\,dx &= \int_{-3}^3 f(x+6)g(x+6)\,dx \\ &= -\int_{-3}^3 f(x)g(x)\,dx \\ &= -\frac{1}{2} \\ &\Rightarrow \int_{-3}^3 f(x)g(x)\,dx=\frac{1}{2} \end{aligned}$$

이다. 따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned} &\int_{-3}^{15}\{f(x)-2f(x)g(x)\}\,dx \\ &= \int_{-3}^{3}\{f(x)-2f(x)g(x)\}\,dx+\int_{3}^{15}\{f(x)-2f(x)g(x)\}\,dx \\ &= (12-1)+\int_{-3}^{9}\{f(x+6)-2f(x+6)g(x+6)\}\,dx \\ &= 11+\int_{-3}^{3}\left\{-\frac{1}{2}f(x)+2f(x)g(x)\right\}dx \\ &\qquad +\int_{3}^{9}\left\{-\frac{1}{2}f(x)+2f(x)g(x)\right\}dx \\ &= 11+(-6+1)+\int_{-3}^{3}\left\{-\frac{1}{2}f(x+6)+2f(x+6)g(x+6)\right\}dx \\ &= 6+\int_{-3}^{3}\left\{\frac{1}{4}f(x)-2f(x)g(x)\right\}dx \\ &= 6+(3-1) \\ &= 8 \end{aligned}$$

이다.

15. 정답) ①

[해설강의 참고]

16. 정답) 27

$$\log_2 k \times \log_3 4 = \log_2 k \times 2\log_3 2 = 2\log_3 k = 6$$
$$\Rightarrow \log_3 k = 3$$

이므로 구하는 값은 $k = 3^3 = 27$이다.

17. 정답) 32

방정식 $x^2 - x - 2 = -2x^2 - x + 10$에서

$$(x^2 - x - 2) - (-2x^2 - x + 10) = 0$$
$$\Rightarrow 3(x+2)(x-2) = 0$$

이므로 두 곡선 $y = x^2 - x - 2$, $y = -2x^2 - x + 10$은 $x = -2$와 $x = 2$에서 만난다. 따라서 구하는 값은

$$\int_{-2}^{2} |3x^2 - 12|\,dx = \int_{-2}^{2} (-3x^2 + 12)\,dx = \left[-x^3 + 12x\right]_{-2}^{2} = 32$$

이다.

18. 정답) 20

부채꼴의 반지름의 길이를 r, 호의 길이를 l이라 하면 이 부채꼴의 넓이는 $\frac{1}{2}rl = 25$이므로 $rl = 50$이다.

이때, 이 부채꼴의 둘레의 길이는 $2r + l$이므로 산술평균과 기하평균의 관계에 의해

$$2r + l \geq 2\sqrt{2rl} = 2\sqrt{2 \times 50} = 20$$

(단, 등호는 $2r = l$일 때 성립한다.)

이므로 구하는 부채꼴의 둘레의 길이의 최솟값은 20이다.

19. 정답) 3

수직선 위를 움직이는 점 P의 속도가 $v(t) = t^3 - at^2$이므로 점 P의 위치 $x(t)$는

$$x(t) = \frac{1}{4}t^4 - \frac{a}{3}t^3 + C \ (C\text{는 적분상수})$$

이다. 두 시각 $t = 0$, $t = 4$에서 점 P의 위치가 서로 같으므로 $x(0) = C$, $x(4) = 64 - \frac{64a}{3} + C$에서

$$C = 64 - \frac{64a}{3} + C \ \Rightarrow \ a = 3$$

이다.

20. 정답) 21

$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)\{1 - f(x)\}}{x} = 1$에서 $x \to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다. 즉, $f(0) = 0$ 또는 $1 - f(0) = 0$이다.

함수 $f(x)$를 $f(x) = x^2 + ax + b$ (a, b는 상수)라 하면 모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$이므로 방정식 $f(x) = 0$의 판별식 D가 $D = a^2 - 4b \leq 0$이어야 한다. 즉, $a^2 \leq 4b$여야 한다.

(i) $f(0) = 0$인 경우

$f(0) = b = 0$이므로 함수 $f(x) = x^2 + ax$이다. 이때,

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^2 + ax)(1 - x^2 - ax)}{x} = \lim_{x \to 0} (x + a)(1 - x^2 - ax) = a = 1$$

이므로 $a^2 \leq 4b$를 만족시키지 않는다.

(ii) $1 - f(0) = 0 \Rightarrow f(0) = 1$인 경우

$f(0) = b = 1$이므로 함수 $f(x) = x^2 + ax + 1$이다. 이때,

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x^2 + ax + 1)(-x^2 - ax)}{x} = \lim_{x \to 0} (x^2 + ax + 1)(-x - a) = -a = 1$$
$$\Rightarrow a = -1$$

이므로 $a^2 \leq 4b$이다.

따라서 함수 $f(x) = x^2 - x + 1$이므로 구하는 값은 $f(5) = 21$이다.

21. 정답) 28

[해설강의 참고]

22. 정답) 200

[해설강의 참고]

MENTOR

수학 영역(확률과 통계)

AJOODA LAB

23. 정답) ①

$_6\Pi_2 + _3H_6 = 6^2 + _8C_6 = 36 + 28 = 64$

24. 정답) ③

회전하여 일치하는 것을 고려하여 각 접시에 서로 다른 6개의 반찬을 하나씩 담는 경우의 수는

$\frac{6!}{2} = 360$

이다.

25. 정답) ④

연필 3자루를 받을 학생을 정하는 경우의 수는 $_3C_1 = 3$이고, 이 학생에게 나누어 줄 연필 3자루를 정하는 경우의 수는 $_5C_3 = 10$이다. 이때, 나머지 두 명의 학생에게 남은 2자루의 연필을 나누어 주는 경우의 수는 $2^2 = 4$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $3 \times 10 \times 4 = 120$이다.

26. 정답) ②

서로 다른 세 상자에 들어 있는 공에 적혀 있는 수를 각각 a, b, c라 하자. 이때, a, b, c는 모두 1 이상의 자연수이므로 음이 아닌 정수 a', b', c'에 대하여 $a = a'+1$, $b = b'+1$, $c = c'+1$이라 하면

$a+b+c = 10 \Rightarrow a'+b'+c' = 7$

이다. 구하는 방법의 수는 방정식 $a'+b'+c' = 7$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a', b', c'의 순서쌍 (a', b', c')의 개수와 같으므로 $_3H_7 = _9C_7 = 36$이다.

27. 정답) ⑤

(ⅰ) 검은 공 0개와 흰 공 8개를 나열하는 경우의 수는 1이다.

(ⅱ) 검은 공 1개와 흰 공 7개를 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{5!} = 6$이다.

(ⅲ) 검은 공 2개와 흰 공 6개를 나열할 때, 양 끝에 검은 공을 나열하는 경우의 수는 1이고, 양 끝에 흰 공을 나열하는 경우의 수는 $\frac{6!}{2!4!} = 15$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $1+6+1+15 = 23$이다.

28. 정답) ②

조건 (나)에 따라 $x>0$, $y<0$ 또는 $x<0$, $y>0$이므로 x와 y는 모두 0이 아닌 정수이고 부호가 서로 다르다.

(ⅰ) $z=0$인 경우

조건 (가)의 $|x|+|y|+|z| = 8 \Rightarrow |x|+|y| = 8$에서 $|x| \geq 1$, $|y| \geq 1$이므로 음이 아닌 정수 a, b에 대하여 $|x| = a+1$, $|y| = b+1$이라 하면

$|x|+|y| = 8 \Rightarrow a+b = 6$

이다. 이때, 방정식 $a+b=6$을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b의 순서쌍 (a, b)의 개수는 $_2H_6 = _7C_6 = 7$이다.

한편, x와 y의 부호가 서로 달라야 하므로

$\begin{cases} x = a+1 \\ y = -(b+1) \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = -(a+1) \\ y = b+1 \end{cases}$

이어야 한다. 즉, 이때의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 $7 \times 2 = 14$이다.

(ⅱ) $z \neq 0$인 경우

조건 (가)의 $|x|+|y|+|z| = 8$에서 $|x| \geq 1$, $|y| \geq 1$, $|z| \geq 1$이므로 음이 아닌 정수 a, b, c에 대하여 $|x| = a+1$, $|y| = b+1$, $|z| = c+1$이라 하면

$|x|+|y|+|z| = 8 \Rightarrow a+b+c = 5$

이다. 이때, 방정식 $a+b+c=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, b, c의 순서쌍 (a, b, c)의 개수는 $_3H_5 = _7C_5 = 21$이다.

한편, x와 y의 부호가 서로 달라야 하므로

$\begin{cases} x = a+1 \\ y = -(b+1) \\ z = c+1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = a+1 \\ y = -(b+1) \\ z = -(c+1) \end{cases}$

또는 $\begin{cases} x = -(a+1) \\ y = b+1 \\ z = c+1 \end{cases}$ 또는 $\begin{cases} x = -(a+1) \\ y = b+1 \\ z = -(c+1) \end{cases}$

이어야 한다. 즉, 이때의 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 $21 \times 4 = 84$이다.

따라서 구하는 순서쌍 (x, y, z)의 개수는 $14+84 = 98$이다.

29. 정답) 151

[해설강의 참고]

30. 정답) 984

[해설강의 참고]

수학 영역(미적분)

23. 정답) ①

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(\sqrt{4n^2+8n+1}-2n\right)&=\lim_{n\to\infty}\frac{(4n^2+8n+1)-4n^2}{\sqrt{4n^2+8n+1}+2n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{8n+1}{\sqrt{4n^2+8n+1}+2n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{8+\frac{1}{n}}{\sqrt{4+\frac{8}{n}+\frac{1}{n^2}}+2}\\&=2\end{aligned}$$

24. 정답) ②

$|r|<1$이고 $r\neq 0$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{r^{n+1}+r-1}{r^n+2r}=\frac{r-1}{2r}=2 \quad\Rightarrow\quad r=-\frac{1}{3}$$

이다.

25. 정답) ⑤

$a_n+b_n=c_n$이라 하면 $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=3$이므로 수열 $\{c_n\}$은 수렴하는 수열이다. 따라서 구하는 값은

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{5a_n-3b_n}{2a_n+b_n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{8a_n-3(a_n+b_n)}{a_n+(a_n+b_n)}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{8a_n-3c_n}{a_n+c_n}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{8-3\times\frac{c_n}{a_n}}{1+\frac{c_n}{a_n}}\\&=8\end{aligned}$$

이다.

26. 정답) ④

점 $(n,\ 2^n)$을 중심으로 하고 직선 $y=\frac{1}{2}x$에 접하는 원의 반지름을 r_n이라 하면 r_n은 점 $(n,\ 2^n)$과 직선 $y=\frac{1}{2}x$ 사이의 거리와 같으므로

$$r_n=\frac{\left|\frac{1}{2}n-2^n\right|}{\sqrt{\frac{1}{4}+1}}=\frac{|2^{n+1}-n|}{\sqrt{5}}$$

이다.

따라서 이 원의 넓이는

$$C_n=\left(\frac{|2^{n+1}-n|}{\sqrt{5}}\right)^2\pi=\frac{4^{n+1}-n\times 2^{n+2}+n^2}{5}\pi$$

이므로 구하는 값은

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{4^n}&=\lim_{n\to\infty}\frac{4^{n+1}-n\times 2^{n+2}+n^2}{5\times 4^n}\pi\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{n\times 2^{n+2}}{4^n}+\frac{n^2}{4^n}}{5}\pi\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{4-\frac{4n}{2^n}+\left(\frac{n}{2^n}\right)^2}{5}\pi\\&=\frac{4}{5}\pi\ \left(\because\ \lim_{n\to\infty}\frac{n}{2^n}=0\right)\end{aligned}$$

이다.

27. 정답) ③

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$a_n=6+(n-1)d,\quad S_n=\frac{n}{2}\{12+(n-1)d\}$$

이다. 즉, $a_n\times S_n$은 최고차항의 계수가 $\frac{d^2}{2}$인 n에 대한 삼차식이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n\times S_n}{n^3+2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{a_n\times S_n}{n^3}}{1+\frac{2}{n^2}}=\frac{d^2}{2}=8$$

$$\Rightarrow\ d^2=16$$

이다. 이때, 수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 양수인 등차수열이므로 공차 d는 양수여야 한다. 따라서 $d=4$이므로 구하는 값은

$$a_3=6+8=14$$

이다.

28. 정답) ②

$\frac{1}{2}n(n+1)<ka_n<n(n+2)$의 양변을 k로 나누면

$$\frac{1}{2k}n(n+1)<a_n<\frac{1}{k}n(n+2)\quad(\because k\text{는 자연수})$$

이다. 이때, $b_n=\frac{1}{2k}n(n+1)$, $c_n=\frac{1}{k}n(n+2)$라 하면

$$\sum_{i=1}^{n}b_i<\sum_{i=1}^{n}a_i<\sum_{i=1}^{n}c_i$$

가 성립한다.

이때,

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2k} i(i+1)$$
$$= \frac{1}{2k} \sum_{i=1}^{n} (i^2+i)$$
$$= \frac{1}{2k} \times \left[\left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} + \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\} \right]$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{6k}$$

이고,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{k} i(i+2)$$
$$= \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{n} (i^2+2i)$$
$$= \frac{1}{k} \times \left[\left\{ \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \right\} + 2 \times \left\{ \frac{n(n+1)}{2} \right\} \right]$$
$$= \frac{n(n+1)(2n+7)}{6k}$$

이다. 한편,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\sum_{i=1}^{n} a_i} = \alpha$$

이고,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\sum_{i=1}^{n} c_i} \le \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \le \lim_{n\to\infty} \frac{n^3}{\sum_{i=1}^{n} b_i}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{6kn^3}{n(n+1)(2n+7)} \le \alpha \le \lim_{n\to\infty} \frac{6kn^3}{n(n+1)(n+2)}$$
$$\Rightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{6k}{\frac{n(n+1)(2n+7)}{n^3}} \le \alpha \le \lim_{n\to\infty} \frac{6k}{\frac{n(n+1)(n+2)}{n^3}}$$
$$\Rightarrow 3k \le \alpha \le 6k$$

이다. 이때, k가 자연수이므로 가능한 자연수 α의 개수는 $6k-3k+1=3k+1$이다. 따라서 가능한 자연수 α의 개수가 7이 되도록 하는 자연수 k의 값은

$$3k+1=7 \Rightarrow k=2$$

이다.

29. 정답) 8

[해설강의 참고]

30. 정답) 6

[해설강의 참고]

수학 영역(기하)

MENTOR AJOODA LAB

23. 정답) ④

타원 $\dfrac{x^2}{25}+\dfrac{y^2}{9}=1$의 두 초점을 각각

$$F(c,\ 0),\ F'(-c,\ 0)\ (c>0)$$

이라 하면

$$c^2=25-9=16 \Rightarrow c=4$$

이다. 한편, 두 초점 사이의 거리는 $c-(-c)=2c$이므로 구하는 값은

$$2c=2\times4=8$$

이다.

24. 정답) ⑤

포물선 $y^2=4x$에 접하고 기울기가 $m\ (m\neq0)$인 직선의 방정식은 $y=mx+\dfrac{1}{m}$이다. 이때, 이 직선이 점 $A(-a,\ 0)$을 지나므로

$$-ma+\frac{1}{m}=0 \Rightarrow am^2-1=0$$

이다. 한편, 삼각형 ABC는 $\overline{AB}=\overline{AC}$이고 $\angle BAC=\dfrac{\pi}{2}$인 직각이등변삼각형이므로 점 $A(-a,\ 0)$에서 포물선 $y^2=4x$에 그은 두 접선의 기울기의 곱은 -1이다. 즉, m에 대한 이차방정식 $am^2-1=0$의 두 실근의 곱이 -1이다. 따라서 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의해

$$-\frac{1}{a}=-1$$

이므로 구하는 값은 $a=1$이다.

[참고]

포물선 $y^2=4px\ (p\neq0)$에 그은 두 접선이 서로 직교할 때, 두 접선의 교점은 항상 포물선 $y^2=4px$의 준선 $x=-p$ 위에 있다.

따라서 위의 문제에서 점 A는 포물선 $y^2=4x$의 준선 $x=-1$ 위의 점이므로 $-a=-1 \Rightarrow a=1$임을 알 수 있다.

25. 정답) ②

x, y에 대한 이차방정식

$$x^2+(t^2-4)y^2-4x-t+4=0$$

$$\Rightarrow (x-2)^2+(t^2-4)y^2=t$$

가 나타내는 도형이 쌍곡선이려면 $t^2-4<0$이고 $t\neq0$이어야 한다. 따라서 정수 t의 범위는 $-2<t<0$ 또는 $0<t<2$이므로 구하는 정수 t의 개수는 2이다.

26. 정답) ①

쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$에 접하고 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y=2x\pm\sqrt{5\times4-4}=2x\pm4$$

이다. 쌍곡선 $\dfrac{(x-1)^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$은 쌍곡선 $\dfrac{x^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$을 x축의 방향으로 1만큼 평행이동한 것이므로 쌍곡선 $\dfrac{(x-1)^2}{5}-\dfrac{y^2}{4}=1$에 접하는 직선 중 기울기가 2인 직선의 방정식은

$$y=2(x-1)-4 \text{ 또는 } y=2(x-1)+4$$

이다. 두 직선 l_1, l_2를 각각 $l_1: y=2x-6$, $l_2: y=2x+2$라 하면 직선 l_1의 x절편과 y절편은 각각 3, -6이므로 직선 l_1과 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S_1=\frac{1}{2}\times3\times6=9$$

이다. 또한, 직선 l_2의 x절편과 y절편은 각각 -1, 2이므로 직선 l_2와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$S_2=\frac{1}{2}\times1\times2=1$$

이다. 따라서 구하는 값은 $S_1+S_2=9+1=10$이다.

27. 정답) ③

$\angle \mathrm{AOF}' = \angle \mathrm{FPF}' = \frac{\pi}{2}$ 이고 $\angle \mathrm{AF}'\mathrm{O}$가 공통이므로 두 삼각형 AOF'과 FPF'은 닮음이다. 즉,

$$\overline{\mathrm{OF}'} : \overline{\mathrm{OA}} = \overline{\mathrm{PF}'} : \overline{\mathrm{PF}} = 5 : \frac{20}{3} = 3 : 4$$

이고, $\overline{\mathrm{FF}'} = 10$이므로 $\overline{\mathrm{PF}'} = 3k$, $\overline{\mathrm{PF}} = 4k\ (k>0)$이라 하면 삼각형 FPF'에서 피타고라스 정리에 의해

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{FF}'}^2 &= \overline{\mathrm{PF}'}^2 + \overline{\mathrm{PF}}^2 \\ &= (3k)^2 + (4k)^2 \\ &= 25k^2\end{aligned}$$

에서 $\overline{\mathrm{FF}'}^2 = 25k^2 = 100 \Rightarrow k=2$이고, $\overline{\mathrm{PF}'} = 6$, $\overline{\mathrm{PF}} = 8$이다.
이때, 이 타원의 장축의 길이를 $2a\ (a>0)$, 단축의 길이를 $2b\ (b>0)$이라 하면 타원의 정의에 의해

$$\overline{\mathrm{PF}'} + \overline{\mathrm{PF}} = 14 = 2a \quad \Rightarrow \quad a = 7$$

이고,

$$a^2 - b^2 = 25 \quad \Rightarrow \quad b = 2\sqrt{6}$$

이다. 따라서 구하는 값은 $2b = 4\sqrt{6}$ 이다.

28. 정답) ②

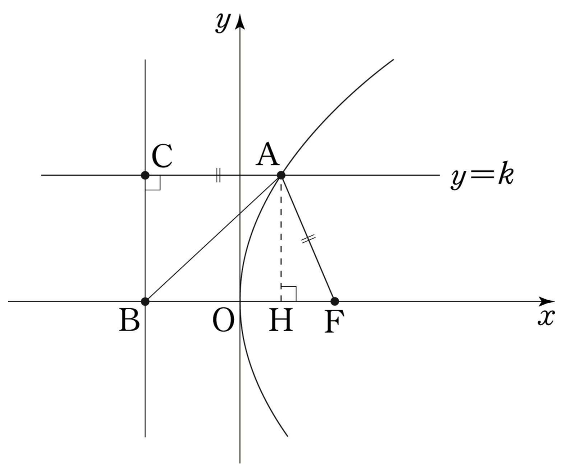
$\overline{\mathrm{AH}} = k$이고, 직각삼각형 AHF에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{\mathrm{HF}}^2 = \overline{\mathrm{AF}}^2 - \overline{\mathrm{AH}}^2 = \overline{\mathrm{AF}}^2 - k^2$$

이다. 또한, 포물선의 준선이 직선 $y=k$와 만나는 점을 C라 하면 $\overline{\mathrm{BC}} = k$이고, 직각삼각형 ABC에서 피타고라스 정리에 의해

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + \overline{\mathrm{BC}}^2 = \overline{\mathrm{AC}}^2 + k^2$$

이다. 이때, 포물선의 정의에 따라 $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AF}}$ 이다.



따라서

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{HF}}^2 &= \left(\overline{\mathrm{AC}}^2 + k^2\right) - \left(\overline{\mathrm{AF}}^2 - k^2\right) \\ &= 2k^2 \\ &= 8\end{aligned}$$

이므로 구하는 값은 $k^2 = 4$이다.

[별해]

주어진 포물선의 방정식을 $y^2 = 4px\ (p \neq 0)$이라 하면 초점 F의 좌표는 $\mathrm{F}(p,\ 0)$이고, 점 B의 좌표는 $\mathrm{B}(-p,\ 0)$이다. 점 A는 직선 $y=k$ 위의 점이므로 점 A의 좌표를 $\mathrm{A}(a,\ k)\ (a>0)$이라 하면

$$k^2 = 4pa \quad \Rightarrow \quad a = \frac{k^2}{4p}$$

이다. 즉, 점 A의 좌표는 $\mathrm{A}\left(\frac{k^2}{4p},\ k\right)$이고, 점 H의 좌표는 $\mathrm{H}\left(\frac{k^2}{4p},\ 0\right)$이다. 한편, 직각삼각형 ABH에서 피타고라스 정리에 의해

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AB}}^2 &= \overline{\mathrm{BH}}^2 + \overline{\mathrm{AH}}^2 \\ &= \left(\frac{k^2}{4p} + p\right)^2 + k^2\end{aligned}$$

이고,

$$\overline{\mathrm{HF}}^2 = \left(p - \frac{k^2}{4p}\right)^2$$

이므로

$$\overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{HF}}^2 = 2k^2 = 8$$

이다. 따라서 구하는 값은 $k^2 = 4$이다.

29. 정답) 15

[해설강의 참고]

30. 정답) 12

[해설강의 참고]