

제 2 교시

수학 영역 [B형]

5 지선 다형

1. 두 이차정사각행렬 A, B 가 $AB^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ 를 만족할 때, 행렬

BA^{-1} 의 모든 성분의 합을 구하시오. [2점]

- ① -10 ② -5 ③ 0
- ④ 5 ⑤ 10

2. $10 < 2^x < 100$ 를 만족하는 자연수 x 의 개수를 구하시오. [2점]

- ① 3 ② 4 ③ 5
- ④ 6 ⑤ 7

3. 등비수열 $\{a_n\}$ 이 $a_4 = 8, a_7 = 28$ 을 만족할 때, a_{10} 의 값을 구하시오. [2점]

- ① 90 ② 92 ③ 94
- ④ 96 ⑤ 98

4. $2\sin 45^\circ \cos 15^\circ$ 의 값은? [2점]

- ① $\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ② $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ ③ $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$
- ④ $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ⑤ $\frac{1+\sqrt{3}}{2}$

9. 공간에 주어진 두 점 $A(1, 2, 0)$, $B(k, 0, 8)$ 에 대하여 두 점 A, B를 잇는 직선이 직선 $2x+y=2$, $z=3$ 과 수직할 때, k 의 값은? [3점]

- ① -5 ② -4 ③ -3
 ④ -2 ⑤ -1

10. 모든 이차정사각행렬들의 집합을 정의역과 공역으로 가지는 함수 f 가 다음과 같이 정의되어 있다.

임의의 이차정사각행렬 X 에 대하여 X 의 (i, j) 성분 x_{ij} 와 $f(X)$ 의 (i, j) 성분 y_{ij} 가 다음 등식을 만족한다.

$$y_{ij} = \sum_{k=1}^2 x_{ik}x_{kj}$$

이차정사각행렬 A 가 $f(A) = 2E$ 를 만족할 때, 행렬 A^{10} 의 모든 성분의 합을 구하시오. [3점]

- ① 32 ② 64 ③ 128
 ④ 256 ⑤ 1024

11. 포물선 $y^2 = 12x$ 위의 점 $P(a, b)$ 에서의 포물선의 접선을 l 이라 하고 P 를 지나며 l 에 수직인 직선을 m 이라 하자. l, m 이 x 축과 만나는 점을 각각 A, B 라 할 때, A, B 를 초점으로 가지며 P 를 지나는 쌍곡선이 $(-3, b)$ 를 지난다. $a^2 + b^2$ 의 값을 구하면? [3점]

- ① 170 ② 177 ③ 183
- ④ 189 ⑤ 192

12. 다음은 $\overline{AB} = \overline{AC}$, $\angle BAC = 20^\circ$ 인 이등변삼각형 $\triangle ABC$ 의 변 AC 위의 점 D 가 $\overline{AD} = \overline{BC}$ 를 만족할 때, $\angle ABD$ 의 크기를 구하는 과정이다.

오른쪽 그림과 같이 점 C 를 점 B 를 중심으로 60° 회전한 점 P 에 대해서 $\overline{PB} = \overline{BC}$, $\angle PBC = 60^\circ$ 이므로 $\triangle PBC$ 는 정삼각형이다.

$$\angle ABP = \angle ABC - \angle PBC$$

$$= \boxed{\text{(가)}} - 60^\circ = \angle BAC$$

$$\overline{PB} = \overline{BC} = \overline{AD}$$

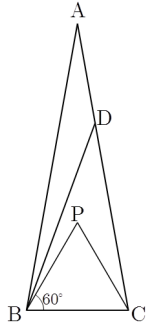
이므로 사각형 $DABP$ 는 등변사다리꼴이다.
 등변사다리꼴의 두 대각선 AP, BD 가 선분 AB 와 이루는 각도가 같으므로

$$\angle ABD = \angle BAP \dots (1)$$

$\triangle ABC, \triangle PBC$ 는 모두 이등변삼각형이므로 선분 BC 의 수직이등분선은 직선 AP 와 같고 따라서

$$\angle BAP = \angle CAP \dots (2)$$

$\angle BAC = 20^\circ$, (1), (2)에 의하여 $\angle ABD = \boxed{\text{(나)}}$



(가)와 (나)에 알맞은 값을 각각 α, β 라 할 때, $\alpha - \beta$ 의 값을 구하면? [3점]

- ① 65° ② 70° ③ 75°
- ④ 80° ⑤ 85°

[13~14] 임의의 실수 t 에 대하여 $g(t+1) = g(t) + 1$ 이 성립하는

연속함수 $g(t)$ 가 $0 < x < \frac{\pi}{4}$ 인 임의의 실수 x 에 대하여

다음이 성립한다.

$$\int_0^{\tan^2 x} g(t) dt + \int_{\sec^2 x}^2 g(t) dt = 10 - \sec^2 x$$

13번과 14번의 두 물음에 답하시오.

13. $\int_0^1 g(t) dt$ 의 값을 구하시오. [3점]

- ① 5 ② 6 ③ 7
 ④ 8 ⑤ 9

14. 수열 $\{a_n\}$ 을 $a_n = \int_0^n g(t) dt$ 로 정의할 때, $a_{12} - a_{11}$ 의 값을

구하시오. [4점]

- ① 17 ② 19 ③ 21
 ④ 23 ⑤ 25

15. 두 이차정사각행렬 A, B 가 다음 등식을 만족한다.

$$A^4 + A^2 + E = O, \quad AB + E = A + B$$

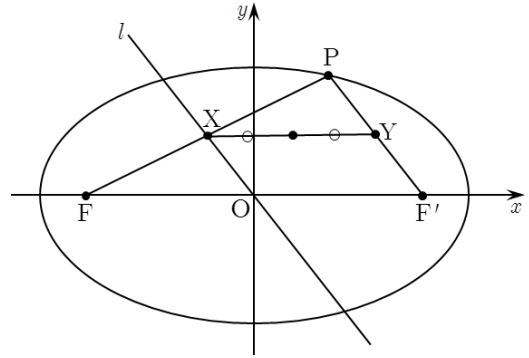
이 때, 다음 중 옳은 것을 모두 고르면? (단, O 는 영행렬, E 는 단위행렬이다.) [3점]

- ㄱ. $A - E$ 는 역행렬을 가진다.
- ㄴ. $AB = BA$
- ㄷ. $A^n = B^n$ 을 만족하는 행렬 A, B 가 존재하기 위한 자연수 n 의 최솟값은 6이다.

- ① ㄱ
- ② ㄷ
- ③ ㄱ, ㄴ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

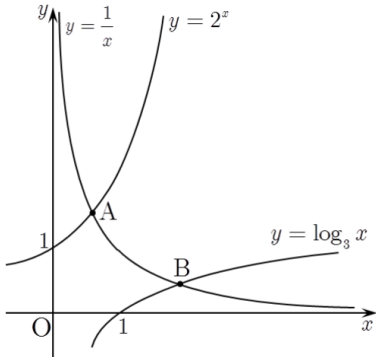
16. 타원 $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{36} = 1$ 의 두 초점을 F, F' 라 하자. x 축 위에

있지 않은 타원 위의 임의의 점 P 에 대하여 선분 PF' 와
 평행하고 원점을 지나는 직선 l 이 선분 PF 와 만나는 점을 X 라
 하자. 두 점 P, F' 의 중점 Y 에 대하여 X, Y 의 중점의 자취는
 타원의 일부다. 이 타원의 두 초점 사이의 거리를 구하면? [4점]



- ① 5
- ② 6
- ③ 7
- ④ 8
- ⑤ 9

17. 좌표평면에서 곡선 $y = \frac{1}{x}$ 과 두 곡선 $y = 2^x$, $y = \log_3 x$ 가 만나는 점을 각각 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ 라 할 때, 옳은 것만을 다음 중에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

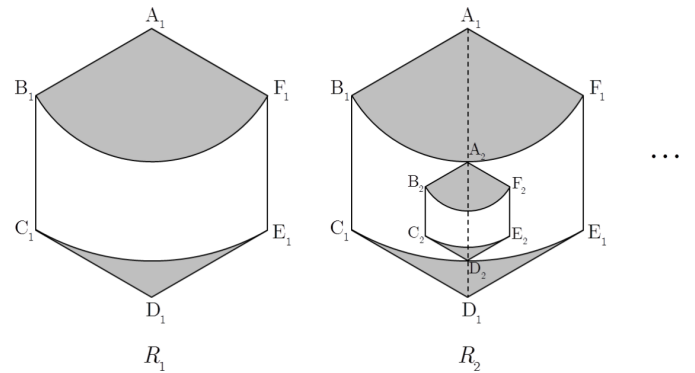


- ㄱ. $x_1 > y_2$
- ㄴ. $x_1x_2 + y_1y_2 < x_1y_1 + x_2y_2$
- ㄷ. $x_1x_2 - y_1y_2 > x_1 - y_2$

- ① ㄱ
- ② ㄱ, ㄴ
- ③ ㄴ, ㄷ
- ④ ㄱ, ㄷ
- ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 한 변의 길이가 3인 정육각형 $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$ 가 있다. 그림과 같이 중심이 A_1 , 반지름의 길이가 $\overline{A_1B_1}$ 인 부채꼴을 정육각형의 내부에 그리고 중심이 A_1 , 반지름의 길이가 $\overline{A_1C_1}$ 인 부채꼴을 정육각형의 내부에 그린 후 부채꼴 $A_1B_1F_1$ 의 내부와 부채꼴 $A_1C_1E_1$ 의 외부 중 정육각형의 내부인 부분을 색칠하여 얻은 그림을 R_1 이라 하자. 그림 R_1 에서 선분 B_1F_1 과 부채꼴 $A_1C_1E_1$ 의 호 C_1E_1 이 선분 A_1D_1 과 만나는 점을 각각 A_2 , D_2 라 하자. 선분 A_2D_2 을 가장 긴 대각선으로 가지는 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 를 그리고, 정육각형 $A_2B_2C_2D_2E_2F_2$ 에서 그림 R_1 을 얻는 것과 같은 방법으로 만들어지는 그림을 R_2 라 하자. 이와 같은 과정을 계속하여 n 번째 얻은 그림 R_n 에 색칠되어 있는 부분의 넓이를 S_n 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ 의 값은?

[4점]



- ① $15 - \frac{1}{\sqrt{3}}\pi$
- ② $15 - \sqrt{3}\pi$
- ③ $15 + \sqrt{3}\pi$
- ④ $18 - \frac{1}{\sqrt{3}}\pi$
- ⑤ $18 - \sqrt{3}\pi$

21. 2 이상인 자연수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[1, 2]$ 를 n 등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로

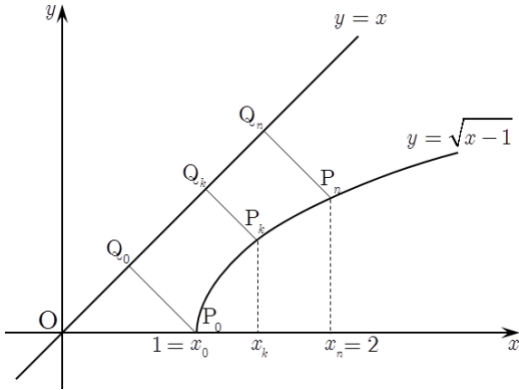
$$1 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 2$$

라 하자. 함수 $f(x) = \sqrt{x-1}$ 위의 점

$P_k(x_k, f(x_k))$ ($k=0, 1, 2, \dots, n$)에서 직선 $y=x$ 로 내린 수선의

발을 Q_k 라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \{ \overline{P_k Q_k} \cdot (f(x_k) - f(x_{k-1})) \}$ 의 값은?

[4점]



- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{5\sqrt{2}}{12}$
- ④ $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ⑤ $\frac{7\sqrt{2}}{12}$

단답형

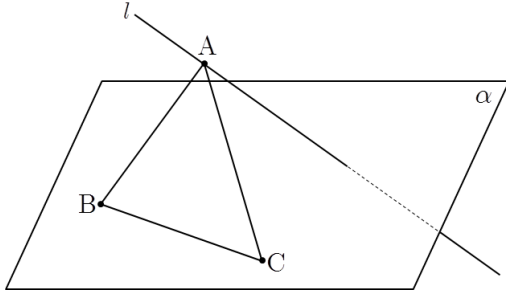
22. 정적분 $\int_e^{e^3} \frac{1}{x} \ln x dx$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. 다섯 개의 알파벳 A, B, C, D, E를 모두 한 번씩만 사용하여 문자를 만들 때, A, E가 서로 이웃하지 않는 문자의 개수를 구하시오. [3점]

24. 좌표공간에 직선 $l: \frac{x-1}{2} = 4-y = z+4$ 과 평면

$\alpha: x+2y+3z=0$ 가 있다. 직선 l 위의 점 A 와 평면 α 위의 점 B, C 에 대하여 $\overline{BC} = 2\sqrt{3}$ 이고 $\triangle ABC$ 가 α 와 60° 의 각도를 이루는 정삼각형일 때 \overline{OA}^2 를 구하시오. (단, O 는 원점이다.)

[3점]



25. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $S_n = \sum_{k=1}^n a_k$ 라 정의하자. 모든 자연수

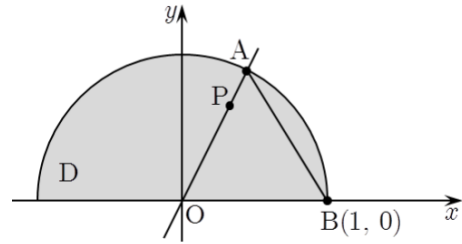
n 에 대하여 $S_{n+1} = \frac{1}{2}S_n$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} a_{2n-1} = 100$ 일 때, 수열 $\{a_n\}$ 의

초항 a_1 의 값을 구하시오. [3점]

26. 연립 부등식 $\begin{cases} x^2+y^2 \leq 1 \\ y \geq 0 \end{cases}$ 을 만족하는 영역 D 에 대해서

기원이기 영역 D 에 임의의 한 점 P 를 찍을 때, P 와 원점 O 을 잇는 직선이 영역 D 의 경계와 만나는 원점이 아닌 점을 A 라 하자. 점 $B(1, 0)$ 에 대하여 $\overline{AB} = X$ 인 확률변수 X 의 기댓값이

$\frac{a}{\pi}$ 일 때, a 의 값을 구하시오. [4점]



27. 오른쪽 그림과 같이 $\overline{AB}=4$,

$\overline{BC}=2\sqrt{5}$, $\angle B = \frac{\pi}{2}$ 인 직각삼각형에

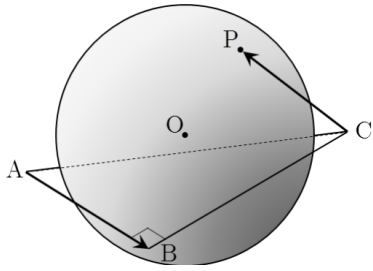
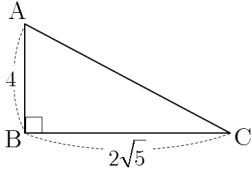
대하여 이 직각삼각형의 세 변에 모두 접하며 중심이 A, B, C가 이루는 평면

위에 있지 않은 구의 중심을 O라 하자. 구 위를 움직이는 점 P에

대하여 $\overline{AB} \cdot \overline{CP}$ 의 최댓값이 100일 때, 구의 반지름은

$p + \sqrt{q}$ 이다. 두 자연수 p, q 에 대하여 $p+q$ 의 값을 구하시오.

[4점]



28. 실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$ 가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0) = 0, f(1) = 2$

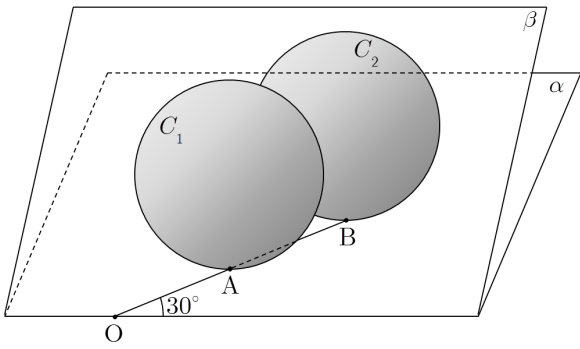
(나) 모든 실수 x 에 대하여 $1 \leq f'(x) \leq 3$ 이다.

이러한 조건을 만족하는 함수 $f(x)$ 에 대하여

$a < \int_0^1 f(x) dx < b$ 가 항상 성립할 때, $4(b-a)$ 의 최솟값을

구하시오. [4점]

29. 반지름의 길이가 서로 같은 두 개의 구 C_1, C_2 가 서로 외접하며 평면 α 위에 놓여있다. 두 개의 구 C_1, C_2 가 평면 α 와 만나는 점을 각각 A, B라 하고 A, B를 1:2로 외분하는 점을 O라 하자. O를 지나는 평면 β 에 대하여 α 와 β 의 교선이 직선 OB와 30° 의 각을 이루고 β 와 C_1, C_2 가 만나서 생기는 두 원의 반지름이 서로 같을 때, α 와 β 가 이루는 각 θ 에 대하여 $100\cot\theta$ 의 값을 구하면? [4점]



30. 함수 $f(x) = \frac{4x^2}{x^2+a^2}$ ($a > 0$)와 양의 실수 b 가 다음 조건을 만족할 때, a^2+b^2 의 최솟값을 구하시오. [4점]

- (가) $0 < k < b$ 인 실수 k 에 대하여 y 축 위의 점 $(0, k)$ 를 지나며 $y = f(x)$ 의 그래프에 접하는 직선의 개수는 2개다.
- (나) $k \geq b$ 인 실수 k 에 대하여 y 축 위의 점 $(0, k)$ 를 지나는 직선은 $y = f(x)$ 의 그래프에 접할 수 없다.
- (다) $0 < k < b$ 인 실수 k 에 대하여 y 축 위의 점 $(0, k)$ 를 지나며 $y = f(x)$ 의 그래프에 접하는 두 직선이 이루는 예각을 θ 라 하면 $\sin\theta < \frac{3}{5}$ 이다.