제 2 교시

수학 영역 (B형)

5지선다형

1. 두 행렬 A, B에 대하여 $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$일 때, 행렬 $2BA+AB$의 모든 성분의 합은? [2점]

① -5 ② -3 ③ 0 ④ 3 ⑤ 5

2. 방정식 $2x^2-6x+1=\sqrt{x^2-3x+1}$ 의 서로 다른 모든 근의 합은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

3. 함수 $f(x)=\sin x-2\cos x+1$의 최댓값과 최솟값의 곱은? [2점]

① -6 ② -4 ③ 2 ④ 4 ⑤ 6

4. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$에 대해 $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n-n^2}{n^2-1}=5$이고 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{5n^2b_n+1}=1$일 때, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$의 값은? [3점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{1}{3}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{5}$ ⑤ $\frac{1}{6}$

5. 좌표평면위의 점 P, Q의 좌표가 각각 (3,4), (5,4)일 때, $\angle POQ=\theta$라고 하자.(O는 원점이다) $\tan\theta=\dfrac{q}{p}$(p, q는 서로소인 자연수)라고 할 때 $p+q$의 값은? [3점]

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

6. 바구니 속에 빨간색 공 4개와 검은색 공 6개가 들어 있다. 이 10개의 공 중 5개의 공을 한 번에 뽑았을 때 빨간색 공이 3개 포함되어 있을 확률은? [3점]

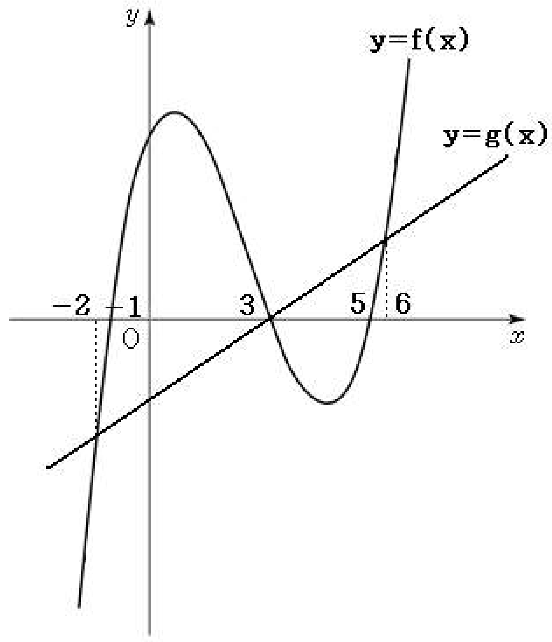
① $\dfrac{1}{7}$ ② $\dfrac{5}{21}$ ③ $\dfrac{10}{21}$ ④ $\dfrac{4}{63}$ ⑤ $\dfrac{1}{504}$

7. 곡선 $f(x)$는 x좌표가 -1, 3, 5인 점에서 x축과 만나고, 직선 $g(x)$는 x좌표가 3인 점에서 x축과 만난다. 또, 곡선 $f(x)$와 직선 $g(x)$의 교점의 x좌표는 -2, 3, 6이라고 할 때, 닫힌 구간 $[-7,7]$에서 부등식

$$\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{f(x)}\geq 0$$

을 만족하는 정수해의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5



8. 크기와 모양이 같은 사탕5개, 초콜릿3개를 남김없이 나은, 초롱, 은지한테 나누어준다고 할 때, 나은, 초롱은 사탕을 적어도 하나, 은지는 초콜릿을 적어도 하나 가지는 경우의 수는? [3점]

① 6 ② 30 ③ 36 ④ 40 ⑤ 60

9. 타원 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{4}=1$에 그은 기울기가 1인 두 접선의 y절편 중 하나가 (0, 3)일 때, 이 타원의 초점은 $(c,\ 0)$, $(-c,\ 0)$이다. (단, c는 양의 실수이다.) c^2의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

10. 포그슨의 방정식에 의하면 겉보기 등급이 m이고 절대 등급이 M인 별이 있을 때, 이 별까지의 거리 r(km)은 다음 식을 만족시킨다고 한다.

$$m-M=5\log(3r)+k \text{(단, } k\text{는 상수이다.)}$$

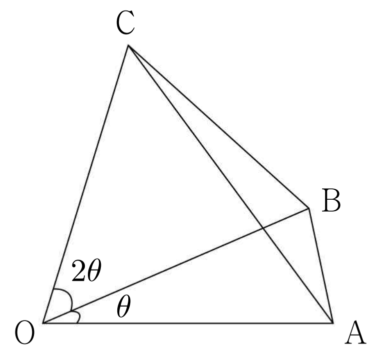
겉보기 등급이 1이고 절대등급이 3인 별A까지의 거리 r_A와 겉보기 등급이 5이고 절대등급이 2인 별B까지의 거리 r_B에 대하여 $\frac{r_B}{r_A}$의 값은? [3점]

① 5 ② 10 ③ 15 ④ 20 ⑤ 100

11. 그림과 같이 평면 위에 있는 사각형 OABC가

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OC}}=1$, $\angle\mathrm{AOB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}=\theta$, $\cos\theta=\frac{9}{10}$

를 만족시킬 때, $\overrightarrow{BC}\cdot\overrightarrow{BA}-\cos3\theta$의 값은? [3점]



① $-\frac{13}{25}$ ② $-\frac{13}{50}$ ③ $-\frac{49}{25}$

④ $-\frac{49}{50}$ ⑤ $-\frac{11}{10}$

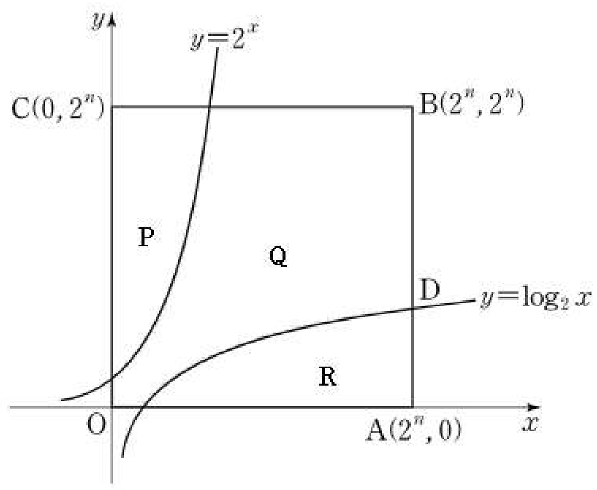
12. 과학탐구 선택과목인 물리Ⅱ를 자연계 수험생의 필수과목으로 지정하는 것에 대해 희망하는 인문계 수험생의 비율을 알아보기 위하여 인문계 수험생 중 100명을 임의출하여 조사한 결과 90명이 물리Ⅱ의 필수과목 지정을 희망하였다. 이 결과를 바탕으로 물리Ⅱ 필수과목 지정에 희망하는 인문계 수험생 전체의 비율에 대한 신뢰도 95%의 신뢰구간의 길이를 구했을 때, 다음 중 신뢰기간의 길이로 옳은 것은?

(단, Z가 표준정규분포를 따르는 확률변수일 때, $P(0\le Z\le 1.96)=0.475$로 계산한다.) [3점]

① 0.1632 ② 0.1518 ③ 0.1290

④ 0.1176 ⑤ 0.0862

[13~14] 좌표평면에서 꼭짓점의 좌표가 $O(0,0)$, $A(2^n,0)$, $B(2^n,2^n)$, $C(0,2^n)$인 정사각형 $OABC$는 두 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$에 의하여 세 부분으로 나뉘는데 세 부분에 해당하는 도형을 다음 그림과 같이 각각 P, Q, R이라 하자. 다음 13번, 14번의 두 물음에 답하시오. (단, n은 자연수이다.)



13. $n=2$일 때, 도형P를 x축을 중심으로 회전시킨 회전체의 부피와 도형R을 y축을 중심으로 회전시킨 회전체의 부피의 합은? [3점]

① $(32-\frac{15}{\ln 2})\pi$ ② $(32-\frac{16}{\ln 2})\pi$ ③ $(32-\frac{8}{\ln 2})\pi$
④ $(64-\frac{15}{\ln 2})\pi$ ⑤ $(64-\frac{16}{\ln 2})\pi$

14. 도형R의 둘레를 제외한 내부에 해당하는 영역에 속하는 점 중 x,y좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 a_n이라 할 때, a_6의 값은? [4점]

① 251 ② 252 ③ 253
④ 254 ⑤ 255

15. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=0,\ a_2=1$이고,

$$a_{n+2}=2a_n+a_{n+1}\ (n\ge 1)$$

을 만족시킨다. 다음은 일반항 a_n을 구하는 과정이다.

> 주어진 식에 의하여
> $$a_{n+2}-2a_{n+1}=-(a_{n+1}-2a_n)$$
> 이다. $b_n=a_{n+1}-2a_n$이라 하면
> $$b_{n+1}=\boxed{(가)}b_n\ (n\ge 1)$$
> 이고 $b_1=1$이므로
> $$b_n=\boxed{(나)}\ (n\ge 1)$$
> 이다.
> 또, 주어진 식에 의하여
> $$a_{n+2}+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)$$
> 이다. $c_n=a_{n+1}+a_n$이라 하면
> $$c_{n+1}=\boxed{(다)}c_n\ (n\ge 1)$$
> 이고 $c_1=1$이므로
> $$c_n=\boxed{(라)}(n\ge 1)$$
> 이다.
>
> (후략)

위의 (가), (다)에 알맞은 수를 각각 p, q라 하고, (나), (라)에 알맞은 식을 $f(n)$, $g(n)$라 할 때, $f(p)+g(q)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

16. 좌표공간에 x축과 접하는 구가 있다. 구의 중심 C에서 구와 x축의 접점 P까지 거리는 3이다. 구의 중심을 지나며 x축과 나란한 직선이 구와 만나는 점 중 x좌표가 작은 점을 Q라 할 때, 선분 CQ를 $1:2$로 내분하는 점은 yz평면 위의 점이다. 점 C에서 xy평면에 내린 수선의 발 H에 대해 선분 OH의 길이의 최댓값은? [4점]

① $\sqrt{2}$ ② 2 ③ $\sqrt{6}$
④ $2\sqrt{2}$ ⑤ $\sqrt{10}$

17. 이차 정사각행렬 A, B에 대하여 다음이 성립한다,

$$2AB+B^2=E$$
$$AB+B^3=E$$

다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

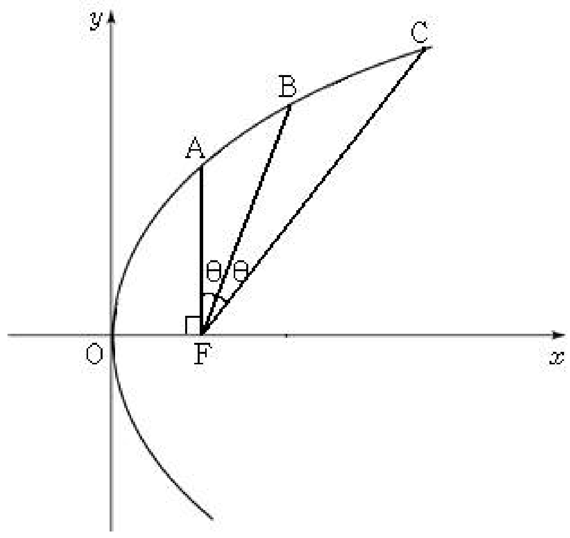
ㄱ. B^{-1}이 존재 한다.

ㄴ. $AB=BA$

ㄷ. $(B^{-1})^2=2B+E$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

18. 다음 그림과 같이 포물선 $y^2=4x$의 초점F를 지나고 x축에 수직인 직선이 포물선과 1사분면에서 만나는 점을A라 하고 $\angle AFB=\angle BFC$가 되도록 1사분면 위에 점 B, C를 잡았을 때, $\tan(\pi-\angle CAF)=\dfrac{3}{2}$이다. 선분 BF의 길이로 옳은 것은? (단, 점 A, B, C의 x좌표는 A, B, C순으로 커진다.) [4점]



① $\dfrac{2}{9}(\sqrt{10}+1)$ ② $\dfrac{2}{9}(\sqrt{10}+10)$ ③ $\sqrt{10}$ ④ $2\sqrt{10}$ ⑤ 5

19. G고등학교 3학년 학생 2000명의 수능 성적은 평균이 m점이고 표준편차가 5인 정규분포를 따른다고 한다. 만약 수능성적이 450점 이상인 학생수가 617명이라면, 수능 성적이 451점 이상인 학생의 수는? [4점]

z	$\mathrm{P}(0 \le Z \le z)$
0.4	0.1554
0.5	0.1915
0.6	0.2257
0.7	0.2580

① 484명 ② 516명 ③ 549명 ④ 617명 ⑤ 690명

20. 실수 전체에서 정의되는 함수 $f(x)$, $g(x)$는

$$g(0)=1,\ f(x)=f(x+a)-ag(a)\ (\text{단, } a \neq 0)$$

를 만족시킨다. 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. 두 점 $(x,\ f(x))$, $(x+1,\ f(x+1))$을 이은 직선의 기울기는 $g(1)$이다.
ㄴ. $g(a)$가 $a=0$에서 연속이면 $f(x)$는 미분 가능한 함수이다.
ㄷ. $g(a)$가 $a=0$에서 연속이고 $f(1)=2$이면 $f(2)=1$이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

21. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$는 역함수 $g(x)$가 존재한다. $f(x)$, $g(x)$에 대해서 $f(0)=0$, $\lim_{x\to1}\frac{f(x)-g(x)}{x-1}=0$ 이 성립한다. 점 $P_0(0,0)$, $P_1(1,1)$에 대해서 선분 $\overline{P_0P_1}$을 n등분 한 점 중 임의의 점 $P_k(\frac{k}{n},\frac{k}{n})$을 지나고 직선 $y=x$에 수직인 직선과 $y=f(x)$가 만나는 점을 $Q_k(x_k,y_k)$라고 하자. 다음 중 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f'(1)=g'(1)=1$

ㄴ. $\int_0^1 f(x)-g(x)dx=\frac{1}{6}$

ㄷ. $\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2}}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(y_k-x_k)}{\sqrt{2}}=\frac{1}{12}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄴ, ㄷ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

단답형

22. $\dfrac{\lim_{x\to\infty}(1-\frac{3}{2x})^x}{\lim_{x\to0}(1+3x)^{-\frac{1}{2x}}}$의 값을 구하시오. [3점]

23. 좌표평면에서 두 점 $(1,\ 0)$, $(1,\ 1)$을 각각 두 점 $(1,\ 2)$, $(2,\ 6)$로 옮기는 일차변환f에 대해 점 $(a,\ b)$가 일차변환f에 의해 옮겨지는 점이 $(4,\ 10)$이다. $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

24. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_3 = 2$이고 $a_5 + a_{11} = 64$일 때, $\sum_{n=1}^{10} a_{2n-1}$의 값을 구하시오. [3점]

25. 보미는 다음 그림과 같은 정사각형으로 이루어진 바둑판 모양의 20개의 구역 중 A구역을 제외한 임의의 한 구역에서 시작하여 A구역까지 최단경로로 이동하는 게임을 한다. 예를 들어 B구역에서는 4칸을 이동하여 A구역까지 이동하고 그 방법의 수는 6가지이다. 보미가 게임을 시작하여 A구역으로 이동하는 방법의 수가 10가지 이하일 확률이 $\frac{q}{p}$라고 할 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이며 A구역을 제외한 모든 구역에서 게임을 시작할 확률은 같다.)[3점]

				A
		B		

26. 좌표공간에 점 C를 중심으로 하고 반지름이 1인 구A가 있고, 구A와 만나지 않는 평면 α가 있다. 평면 α위에는 직선 l이 있는데, 점 C에서 평면 α에 내린 수선의 발을 D라고 하면 점 D에서 직선 l까지 거리는 2이다. 구A위의 점들과 구A의 내부의 점들을 정의역으로 하는 함수 f에 대하여 함수 f의 정의역의 임의의 원소 P에서의 함숫값은

"점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라고 할 때, 직선 l과 직선 $\overline{PH}$을 포함하는 평면이 평면 α와 이루는 각"

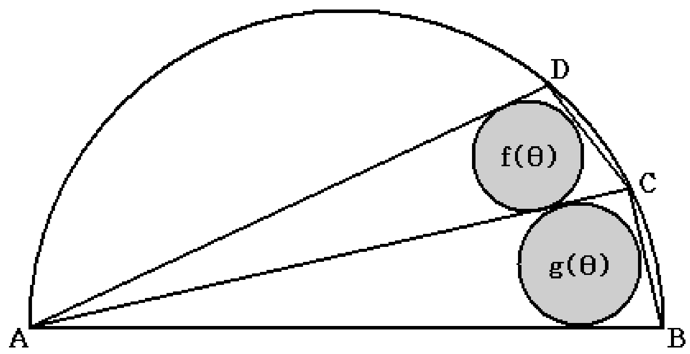
이다. 함수 f의 최댓값과 최솟값이 각각 M, N이고 $f(C) = \frac{\pi}{3}$이면 $\sin\left(\frac{M-N}{2}\right) = \frac{q}{p}$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

27. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$에 대하여 극한값 $\lim_{x\to 0}\frac{f(x+i)-i}{x}$이 존재할 때(단, $i=0,1$) 함수 $g(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$g(x)=\frac{f(x)-x+|f(x)-x|}{2}$$

함수 $g(x)$가 $x=0$에서만 미분 가능하지 않을 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [4점]

28. 다음 그림과 같이 $\overline{AB}=1$인 선분AB를 지름으로 하는 반원에서 $\angle DAC=\angle CAB=\theta$를 만족 할 때, 삼각형 ACD에 내접하는 원의 둘레의 길이를 $f(\theta)$, 삼각형 ABC에 내접하는 원의 둘레의 길이를 $g(\theta)$라고 하자. $\lim_{\theta\to +0}\frac{g(\theta)-f(\theta)}{\theta^2}=\frac{q}{p}\pi$이다. p^2+q^2의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)[4점]



29. 2차 항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$가 $x=1$에서 최솟값 1을 가질 때, 함수 $f(x)$가 $f(x)=g(x)\times e^{x}$를 만족한다. 이 때, 함수 $h(x)$을 다음과 같이 정의 하자.

$$h(x)=f(-\frac{x}{10})\ (x\le 0)$$

$y=h(x)$ 위의 임의의 점 $(k,h(k))$를 지나는 직선l_k의 기울기가 m일 때, 직선l_k와 함수 $y=h(x)$의 그래프의 교점의 개수를 함숫값으로 하는 함수를 $y=N_k(m)$이라고 하자. 함수 $y=N_k(m)$이 불연속이 되도록 하는 m의 개수를 n_k라고 할 때, $\sum_{i=0}^{20} n_i$의 값을 구하시오. [4점]

30. 좌표 공간 위의 점 P를 중심으로 하고 반지름이 1인 원C가 직선 l : $y-6=\frac{z}{\sqrt{3}}$, $x=0$을 축으로 하는 회전운동을 할 때 다음 조건을 만족한다.

점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발을 H라 하고 원 C의 둘레와 그 내부에 속하는 임의의 점을 Q라 할 때 $\overline{PH}=4\sqrt{3}$이고 $\overrightarrow{PH}\cdot\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{PH}$이다. (단 O는 원점)

원C의 xy평면으로의 정사영의 넓이가 $\frac{\pi}{4}$가 되도록 하는 점P를 P_{π}라 하고 점 R의 좌표가 $(0,-3,\sqrt{3})$일 때 $(\overrightarrow{P_{\pi}H}\cdot\overrightarrow{OR})^2$의 값을 구하여라. [4점]

※ 확인 사항
답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.