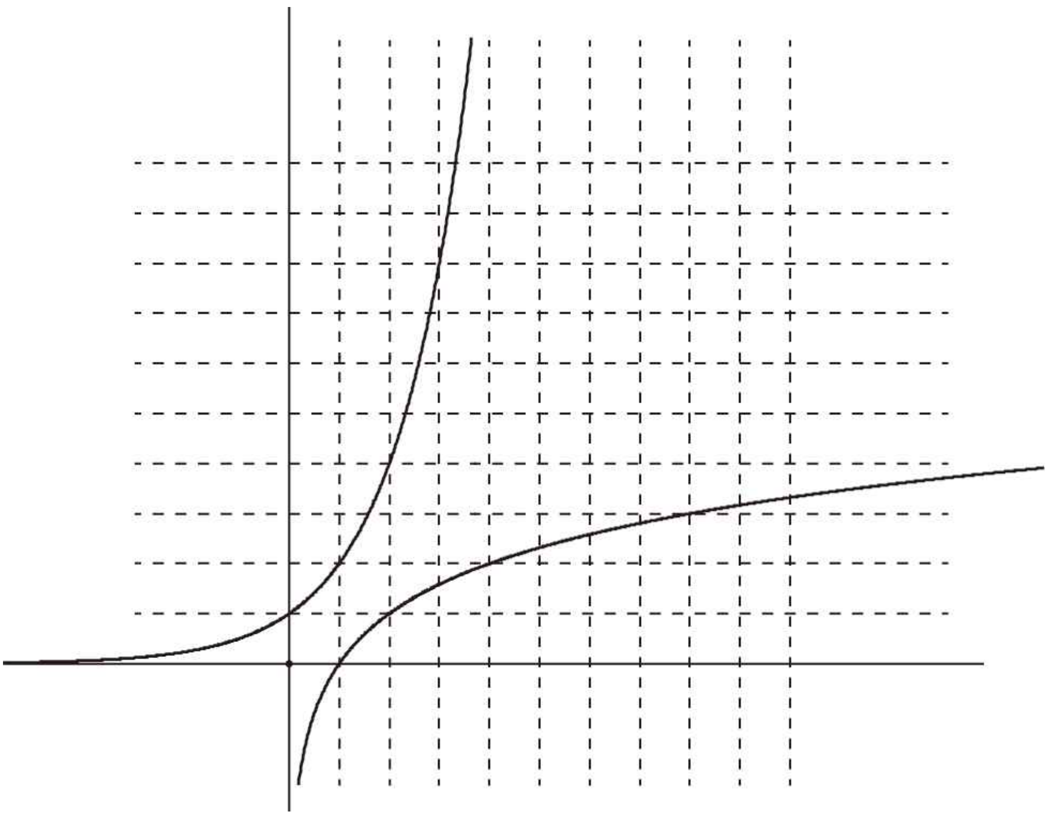
30번도 다른 문제들과 마찬가지로 사실 손해설을 작성했었는데, 11월 1일에 문제를 교체하는 바람에 제 시험지에 문제가 없어서 그냥 컴퓨터로 작성합니다. (게다가 저 미친 격자를 제가 죄다 그리고 있을 순 없잖아요?) 지금 엄청 급하게 만드는 거라, 오타 및 헛소리가 매우 심할 수 있으니 양해해주시면 감사하겠습니다.

문제를 볼게요.

**30.** 자연수 $a$에 대하여 곡선 $y=\log_2 x$ 위의 점 중 $x$좌표가 $a$인 점을 A, 곡선 $y=2^x$ 위의 점 중 $y$좌표가 $a$인 점을 B라 하자. 두 점 A, B를 한 대각선의 양 끝 점으로 하는 정사각형의 내부 또는 변 위의 점 중 $x$좌표와 $y$좌표가 모두 정수인 점의 개수를 $f(a)$라 할 때, $\sum_{a=1}^{15} f(a)$의 값을 구하시오. [4점]

-----------------------------------------------------------------------------------

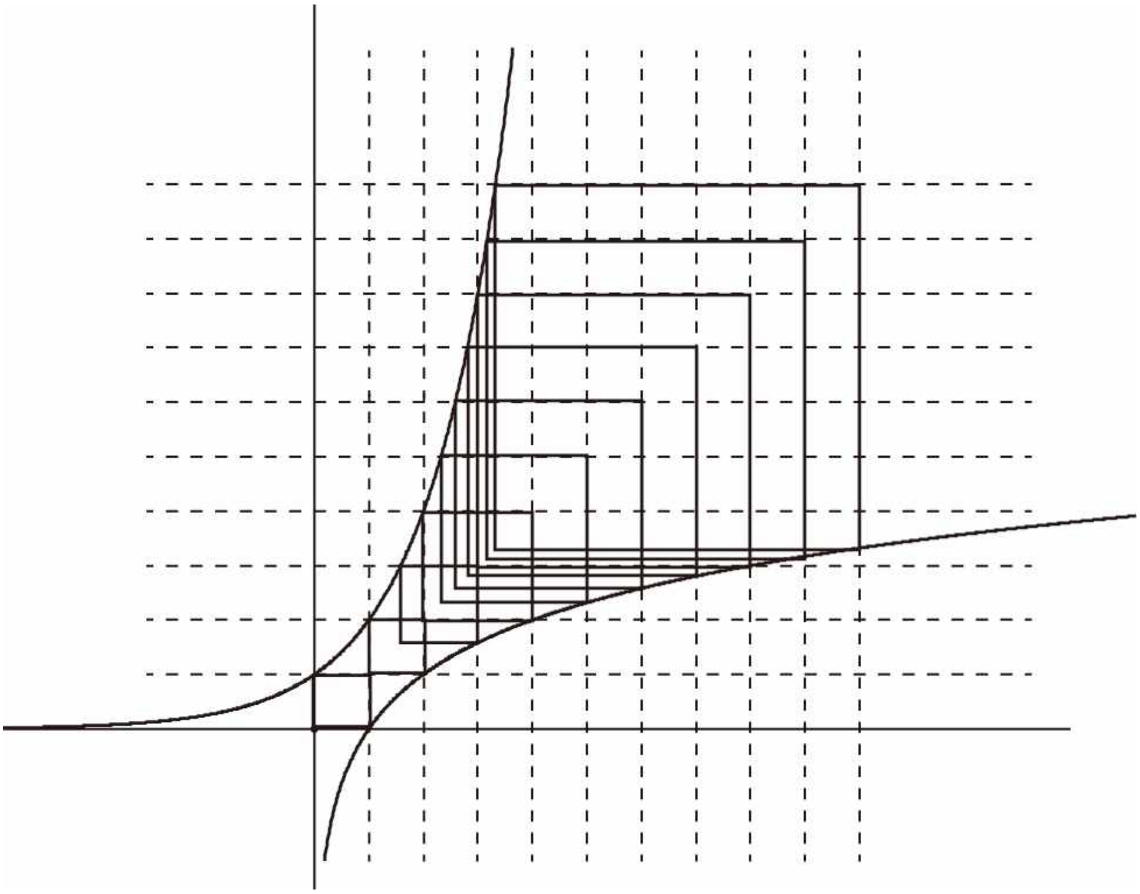
그렇다고 합니다. 격자점 문제네요? 그럼 그려야죠. 뭐 별 수 있겠어요? 저도 그리는데요 뭘 ㅎ



네, 보기만 해도 울렁거리는 격자점이 나왔네요. 이제 우리는 이걸 가지고 문제를 풀어야 합니다.

정사각형의 내부 또는 변 위에 있는 격자점의 개수를 구하랍니다.
문제에서 또 준 정보가 뭐가 있었죠?
점 A의 $x$좌표가 정수고, 점 B의 $y$좌표가 정수랍니다. 그 값은 둘 다 $a$래요.
그럼 점을 설정해야겠죠 뭐. 할 게 없잖아요?
그럼 A를 $(a, \log_2 a)$라 하고, 그걸 직선 $y=x$ 대칭시킨 점이 B겠네요.
근데 여기서, 점 B의 $y$좌표가 정수였죠? 그럼 $x$좌표는요?
마찬가지로, 점 $A$의 $x$좌표가 정수였죠. 그럼 $y$좌표는요?
정수일 수도 있고, 정수가 아닐 수도 있겠네요.
정수일 때는, $\log_2 a$의 값이 정수가 되어야 하므로, 그 값을 $k$라고 하면
$a=2^k \rightarrow a=1, 2, 4, 8, ...., 2^?, .......$이런 식이 되겠네요.
그러면 정사각형의 네 꼭짓점의 $x, y$좌표가 모두 정수가 됩니다.
그 때가 '특수한' 경우잖아요.
그럼 그 때의 격자점의 개수를 구해야죠.
그런데 저희는 '정사각형' 의 격자점 개수를 구하고 있죠?
그러면, $a$가 2의 거듭제곱 꼴일 때, $f(a)=(a-\log_2 a+1)^2$이 되겠네요.
왜냐구요? 정사각형이면 네 변의 길이가 모두 같잖아요. 넓이를 구할 때를 생각해 보세요. (이걸 좀만 더 생각해 보면, 굳이 $a$가 2의 거듭제곱 꼴이 아니어도 결국 제곱을 하게 됩니다.)
여기에 넣어보면 $f(1)=2^2, f(2)=2^2, f(4)=3^2, f(8)=6^2, f(16)=13^2$
이렇게 됩니다.
그런데 $f(16)$은 구하는 값이 아니니까 굳이 필요는 없을 듯 하네요

이제 뭘 해야할지 모르겠으면, 정사각형을 그려봐야죠.
그리기 싫다구요?
그냥 그리세요.
사실 저도 진짜 솔직한 심정으로는, '자, 규칙성 보이죠? 그래서 답은 ~입니다!' 이러고 싶어요.
그런데 문제가 까라면 까야지 어쩌겠어요. 수능장에서 그럴 순 없잖아요?



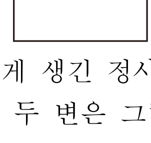
[연역적 풀이]

....와 미친 겁나 빡돌게 생겼네요.

이제 이 빡돌게 생긴 걸 자세히 봅시다.

위에서 $a$가 2의 거듭제곱 꼴이 나오면 네 꼭짓점의 $x, y$좌표가 모두 정수가 되고, 네 변이 모두 저 빌어먹을 격자 위에 있다는걸 알수 있었죠?

그리고 $a$가 2의 거듭제곱 꼴이 아니면, 저렇게 한 꼭지점이 꼭 튀어나와 있네요.

그럼 

요렇게 생긴 정사각형을 기준으로, 자세히 보시면 윗변과 오른쪽 변은 격자점을 포함하는데, 다른 두 변은 그렇지 못하다는 걸 아실 수 있을 거에요.

그럼 왼쪽 위의 꼭짓점, 즉 B를 기준으로, 오른쪽으로 조금만 갔을 때 나오는 첫 격자점부터, 오른쪽 위의 꼭짓점을 만날 때까지가 한 변에서의 격자점의 개수겠죠?

그럼 거기에 제곱을 해 주면 되겠네요.

결국, 일반항 $f(a)$는 $f(a)=\{a-[\log_2 a]\}^2$이 됩니다. $a$가 2의 거듭제곱이 아닐 때요.

그러므로 구하고자 하는 값은, 위에서 얻었던 2의 거듭제곱일 때를 더하고, 이를 계산하면 702가 나옵니다. 그러므로 답은 702입니다. (한번에 일반항을 구하는 방법도 있을 겁니다. 저번에 구했던 것 같은데, 지금 급해서 쓸 수가 없네요 ㅠㅜ. 한번 직접 해보세요 ㅎㅎ)

[귀납적 풀이]
마찬가지로 저 격자점에 있는 정사각형의 개수를 세 봅시다.
그럼
$f(1)=2^2, f(2)=2^2, f(3)=2^2, f(4)=3^2, f(5)=3^3, f(6)=4^2, f(7)=5^2, f(8)=6^2.....$
이렇게 나옵니다.

우리는 위에서, $a$가 2의 거듭제곱 꼴일 때 특수한 경우가 나옴을 확인했습니다.
그러면 나눠 봅시다

$f(1)=2^2$
$f(2)=2^2, f(3)=2^2$
$f(4)=3^2, f(5)=3^3, f(6)=4^2, f(7)=5^2$
$f(8)=6^2, f(9)=7^2, f(10)=8^2, .........$

뭔가 규칙성이 보이지 않나요?
자세히 보시면, $a$가 2의 거듭제곱일 때, $f(a)=f(a+1)$이고, 다음 거듭제곱 전까지 1씩 늘어남을 알 수 있습니다
그러니까, $f(a)=f(a+1)=t^2$이라 하면, $f(a+2)=(t+1)^2, f(a+3)=(t+2)^2.....$
이렇게 된다는 것이죠.
그걸 이용하여 식을 정리하면
$\sum_{k=1}^{12} k^2+(2^2+2^2+3^2+6^2-1^2)=702$가 됩니다.
답은 702입니다.