그런데 사실 등가속도 운동에는 포물선운동과 같은 2차원 곡선운동도 포함되기 때문에,

실제로 우리가 공부할 운동은 **등가속도 직선 운동**입니다.

물리Ⅰ에서는 직선상(1차원)에서의 운동만 다루기 때문입니다.

등가속도 직선 운동 조건 하에서는 정말 많은 것들을 할 수 있습니다.

평균가속도를 계산하는 방식으로 (순간)가속도를 구할 수 있기 때문에

속도와 시간이 어떤 관계를 갖는지, 그리고

변위와 시간이 어떤 관계를 갖는지 정확히 구할 수 있습니다.

특히 변위를 모를 때도 평균속도를 구할 수 있습니다.

지금부터 공식과 그래프를 비교해보며 하나하나 살펴보도록 합시다.

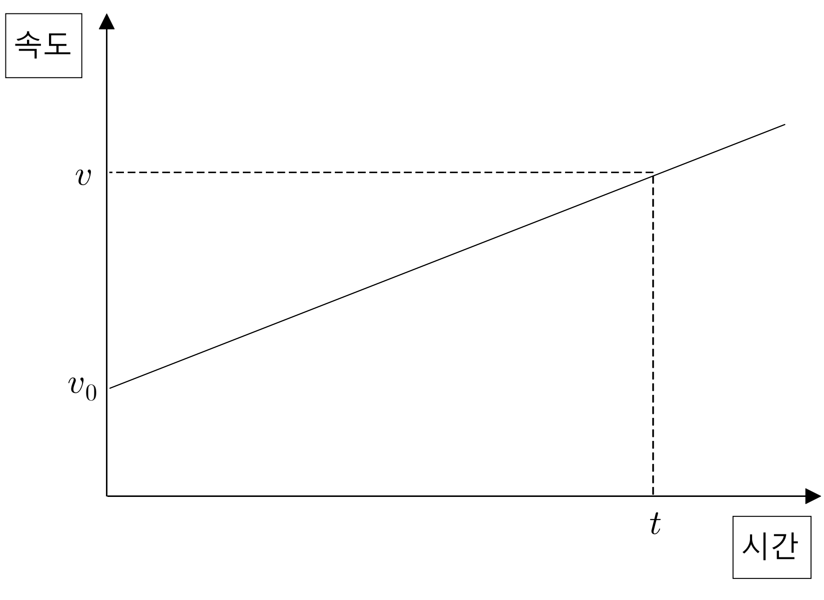
※ 아래는 공식, 문제 풀이와 관련된 내용이므로 반드시 전 범위의 학습이 전제되어있어야 합니다.

등가속도 직선 운동의 해석에서 가장 중요한 것은 그래프를 읽는 것입니다.

그리고 그런 그래프 중 가장 중요한 것은 바로 속도-시간 그래프입니다.

이를 $v-t$ 그래프라고 부릅니다. 그 외에도 $s-t$ 그래프, $a-t$ 그래프 등이 이용됩니다.

아래 그래프에 가속도 a로 등가속도 운동하는 물체의 속도를 시간에 따라 나타내었습니다.



0초일 때 물체의 속도는 v_0이고 시각 t일 때 물체의 속도는 v입니다.

그림은 v_0와 v의 방향이 같고, v의 크기가 더 큰 것으로 되어있지만 그럴 필요는 없습니다.

자, 그러면 여기서 가속도 a를 구해봅시다. a는 평균가속도와 같으므로,

$a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{v - v_0}{t}$입니다. 이제 양변에 t를 곱하여 정리하면 $v = v_0 + at$를 얻습니다.

※ 물론 시각 t_0일 때 속도가 v_0인 경우는 $\dfrac{v - v_0}{t - t_0}$라고 해야합니다.

"$v = v_0 + at$"를 이용하면 처음 속도로부터 나중 속도를 구할 수 있습니다.

그런데 이 식은 상식적으로 당연하기 때문에 굳이 외우지 않아도 써먹을 수 있습니다.

예제 7) 자동차가 $20\,\mathrm{m/s}$의 속력으로 기준선 P를 지나는 순간부터 일정한 가속도로 6초 동안 운동하였다. 가속도의 크기는 $4\,\mathrm{m/s^2}$이고 방향은 기준선 P를 지날 때 자동차의 운동방향의 반대이다. 자동차가 운동방향을 바꾸는 순간까지 걸린 시간과 6초일 때의 속력은?

관습적으로 처음 운동하는 방향을 (+)로 두기 때문에 여기서 $v_0 = 20\,\mathrm{m/s}$입니다.

가속도는 반대 방향이라고 하였으니 $a = -4\,\mathrm{m/s^2}$입니다.

따라서 나중 속도가 0일 때, $0 = 20 + (-4) \times t$에서 $t = 5$초입니다.

나중 속도가 0인 순간은 운동방향이 바뀌는 순간을 의미합니다.

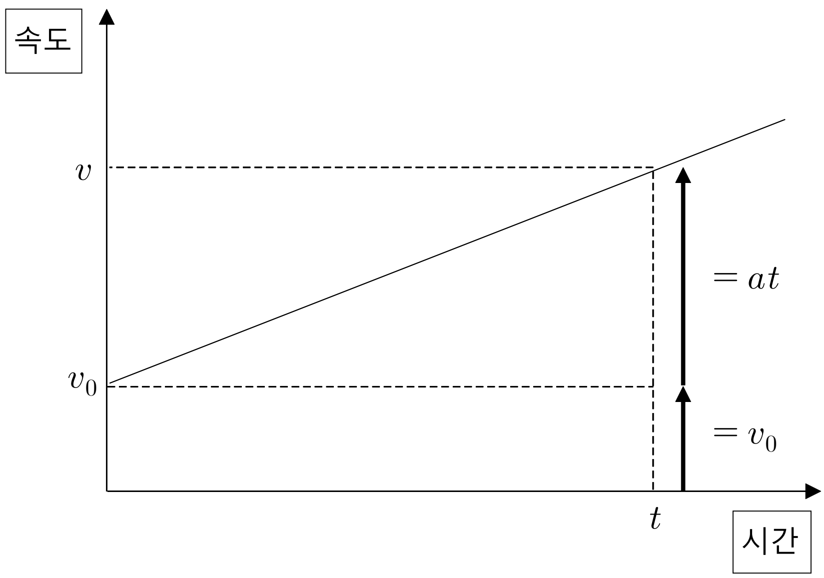
두 번째로, 6초일 때의 속력을 구해봅시다.

6초일 때의 속도 $v_6 = 20 + (-4) \times 6 = -4\,\mathrm{m/s}$이므로, 속력은 $4\,\mathrm{m/s}$입니다.

주의해야할 것은 딱 하나밖에 없습니다.

v, v_0, a 모두 벡터량이기 때문에 부호를 올바르게 고려해주어야 한다는 겁니다.

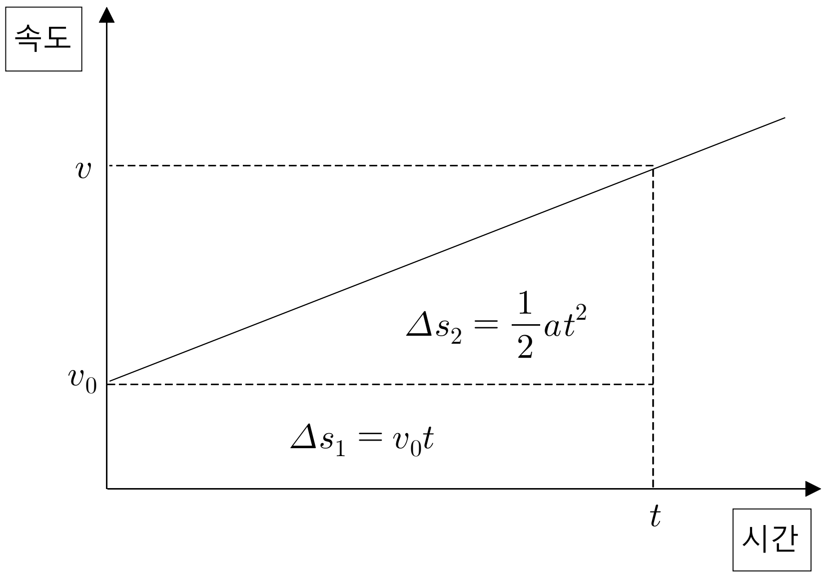
관습적으로는 처음 운동 방향을 (+)로 놓으면 됩니다.



"$v = v_0 + at$"는 속도와 시간의 관계라고도 부릅니다.

이 식의 의미를 그래프를 통해 파악해보면 위와 같습니다. 직관적으로 자명하죠?

그래프의 기울기로부터 식 하나를 유도해보았으니, 이번에는 넓이를 가지고 유도해봅시다.



물체의 처음 위치가 원점이라면, 나중 위치 s는 변위와 같습니다.

이때 변위 s는 위의 $v-t$ 그래프의 아래 면적으로부터 구할 수 있습니다.

시각 t까지의 변위는 직사각형에 해당하는 Δs_1과 삼각형에 해당하는 Δs_2를 더하면 됩니다.

이 정도는 적분이 없어도 면적을 계산할 수 있습니다. 따라서 $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$를 얻습니다.

"$s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$" 혹은 그에 상응하는 그래프 면적을 이용하면 변위를 구할 수 있습니다.

이 공식의 이름은 변위와 시간의 관계이지만 뭐, 외울 필요는 없습니다.

그런데 이때, s, v_0, a 모두 마찬가지로 벡터량이기 때문에 부호에 신경을 써야 하며

벡터는 처음과 끝만 중요하다는 사실을 간과해서는 안 됩니다.

특히 s가 이동거리가 아니라 변위라는 것을 말이죠.

예제 8) 빗면 위로 운동하는 나무토막의 처음 속력이 $15\,\mathrm{m/s}$였고, 가속도가 빗면 아래 방향으로 $3\,\mathrm{m/s^2}$로 일정하였다. 4초 동안 나무토막이 이동한 거리는?

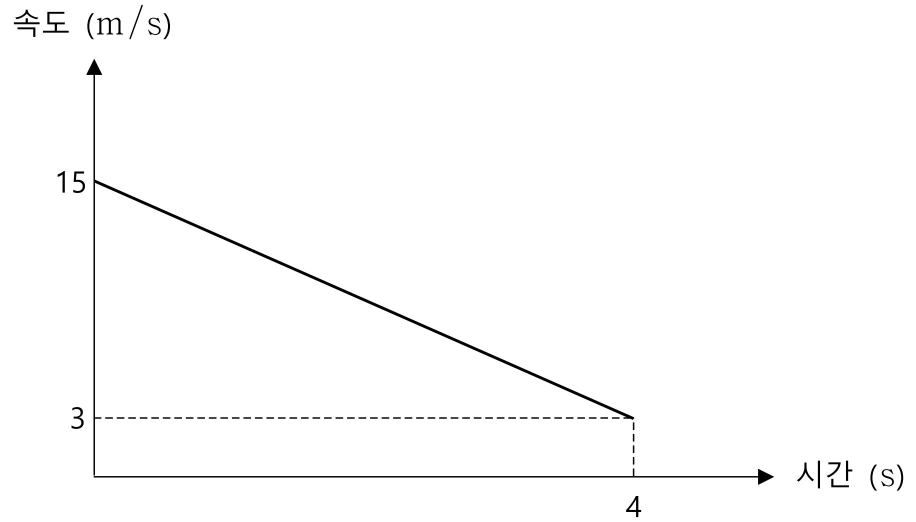
변위 $s = 15 \times 4 + \frac{1}{2} \times (-3) \times 4^2 = 36\,\mathrm{m}$. 당연히 처음 운동방향이 (+)

4초 후에도 물체의 속도가 여전히 (+)이므로 물체의 운동방향이 변하지 않습니다.

따라서 이때는 변위의 크기 = 이동거리이므로 정답은 $36\,\mathrm{m}$.

이번에는 그래프를 작도해서 풀어봅시다.

4초 후 속도 정도는 $15 - 3 \times 4 = 3\,\mathrm{m/s}$로 계산한 다음 그래프를 그리면,



이제 사다리꼴의 넓이를 계산하면 $\frac{1}{2} \times (15 + 3) \times 4 = 36\,\mathrm{m}$. 참 쉽죠?

이때 무조건 (+)으로 넓이를 계산하면 이동거리, 정적분으로 계산하면 변위가 됩니다.

방금 보았던 예시에서는 $s = v_0 t + \frac{1}{2}at^2$보다 그래프 아래 면적을 계산하는 편이 수월합니다.

아무래도, 공식은 2차식이기도 하고 외워야하는데 반해, 면적 계산은 그럴 필요가 없으니까요.

그래서 대부분의 학생들이 공식이 더 복잡하다 생각합니다만, 항상 그런 것은 아닙니다.

예를 들어서 중간에 운동방향이 변하는 경우, 그래프로 계산하려면 3번 계산해야하죠.

1) t축과 그래프의 교점 **2)** (+) 부분의 삼각형, (-) 부분의 삼각형 **3)** 각 넓이의 차

하지만 공식을 쓰면 단 1번의 계산식으로 구해낼 수 있습니다.

큰 차이가 없다고 볼 수도 있지만, 물리에서 계산 실수는 아주 치명적이라는 점에 유의하세요.

교육과정이 개정되기 이전에는 마찰력, 운동량 보존, 탄성력 등등의 파트가 어려웠기 때문에

굳이 속도-가속도 문제에서 복잡한 상황을 만들지 않았습니다.

하지만 범위가 급격히 줄어든 지금, 이 부분에서 나름 고난도 문제가 나오기 시작하기 때문에

그래프보다도 공식이 유리한 상황이 점점 나올 것으로 예상되고 있습니다.

그래서 필자는 수험생 여러분들이 <u>여러 풀이 방법을 두루 익히시기를 권합니다.</u>

그래프는 “풀이 속도”가 아니라 “상황 이해”에 강점을 가지고 있는 풀이법입니다.

운동 중간에 가속도가 변하는 복잡한 운동의 경우, 그래프가 가장 탁월합니다.

그러나 그렇게 복잡한 운동이 아니라면 오히려 단순한 식이 더 빠릅니다.

왜냐하면 우리는 수학 B형을 치르는 이과생이기 때문이죠.

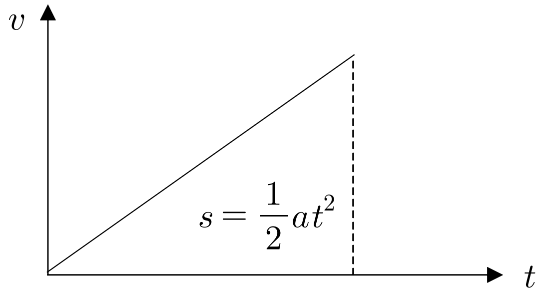
예를 들어 물리Ⅰ에서는 처음 속도 v_0가 0이 아닌 상황보다 0인 상황이 더 많이 나옵니다.

v_0가 0이 아니더라도 나중 속도 v가 0인 상황도 종종 나옵니다.

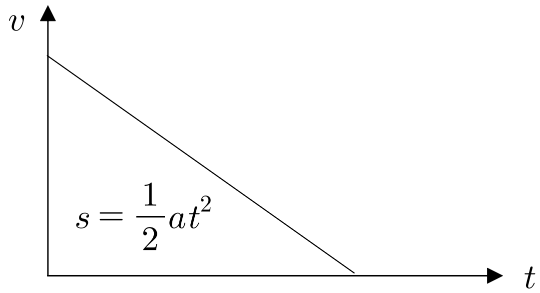
이런 경우에는 변위와 시간의 관계가 좀 더 간단해집니다.

이를 2가지 케이스로 나누어서 살펴봅시다.

Case 1) $v_0 = 0$일 때, $s = \frac{1}{2}at^2$. 이제 s를 이동거리, a를 가속도의 크기라고 하고 식을 바꾸면 이동거리 $s = \frac{1}{2}at^2$이고, 걸린 시간 $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ 입니다.



Case 2) $v = 0$일 때, $at = -v_0$이므로 $s = \frac{1}{2}at^2 - at^2 = -\frac{1}{2}at^2$. 이제 s를 이동거리, a를 가속도의 크기라고 하면 이동거리 $s = \frac{1}{2}at^2$이고, 걸린 시간 $t = \sqrt{\frac{2s}{a}}$ 입니다.



걸린 시간 $\sqrt{\frac{2s}{a}}$ 는 물리Ⅰ보다는 Ⅱ에서 자주 사용하기는 합니다만 한번 소개해보았습니다.

이제 이런 상황이 나오면 굳이 삼각형을 그리지 말고 바로 $s = \frac{1}{2}at^2$으로 계산하시면 됩니다.

당연히 삼각형 그래프를 그려도 계산 과정은 같습니다.

예제 9) 정지해 있던 자동차가 동쪽으로 5초 동안 일정한 가속도 a로 운동하다가 다음 5초 동안 일정한 속도 v로 운동하여 $150\,\mathrm{m}$만큼 떨어진 지점에 도달하였다. 이때 a와 v는?

지금까지 배운 공식을 이용하면 $\frac{25}{2}a + 5a \times 5 = 150$, $a = 4\,\mathrm{m/s^2}$, $v = 20\,\mathrm{m/s}$입니다.

그래프로도 풀어보시고, 상황을 머릿속으로 그리면서 식만으로도 풀어보세요.

$v=v_0+at$에서 $t=\dfrac{v-v_0}{a}$를 얻고, 이를 $s=v_0t+\dfrac{1}{2}at^2$에 대입하여 소거하면

t가 없는 식인 $2as=v^2-v_0^2$을 얻습니다. 그래서 이를 변위와 속도의 관계라고 합니다.

이 식을 이용하면 t를 건너뛰고 $f(s,\ v,\ a)=0$의 방정식을 풀 수 있습니다.

그런데 이 식은 잘 활용되지 않습니다. 왜 그럴까요?

1) 이 식은 앞의 두 식을 연립하여 얻은 것이기 때문에 굳이 외우지 않더라도 못 푸는 문제가 존재하지는 않습니다. t로 놓고 열심히 정리한 후 대입해서 소거해버리면 결과가 같으니까요.

게다가 연립해서 얻은 식이기 때문에 직관적으로 이해할 수가 없습니다.

그러다보니 처음 공부할 때는 다른 공식을 써보느라 이 식을 활용해보지 못합니다.

그래서 대부분의 학생들은 $2as$ 공식을 결국 외우지 않는 경우가 많습니다.

2) 이 공식에는 t가 없기 때문에 그래프와 대응시키기가 어렵습니다.

그래프만으로 문제를 푸는 학생들은 이 식을 쓸 일이 없기 때문에 외우지 않습니다.

그래서 문자 정리 문제 등에 이 식으로 푸는 문제가 등장하면 꽤 어려워합니다.

3) 이 공식은 이후에 일-에너지 정리와 연결됩니다.

그래서 $2as=v^2-v_0^2$꼴 대신 $F\cdot s=\Delta\dfrac{1}{2}mv^2$만 써서 푸는 경우가 많습니다.

~~일-에너지 정리가 속도-가속도 파트의 비법인 것으로 알고 있는 경우도 더러 있더군요.~~

그렇지만 다른 풀이를 모두 익힌 뒤라면 이 공식의 사용법을 익히기를 권합니다.

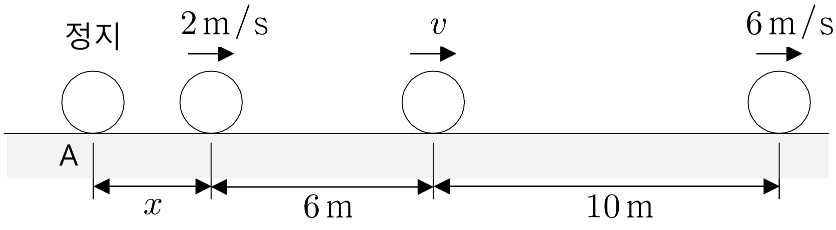
t나 m을 미지수로 두지 않고도 a와 s 중 하나를 구할 수 있기 때문입니다.

수능 물리에서는 풀이를 여럿 익힘으로써 시간 단축을 끝없이 이루어낼 수 있습니다.

특히 현행 물리Ⅰ에서는 열심히 학습한다면 <u>반드시 시간이 남는다는 것</u>을 명심하세요.

예제를 통해 용법을 좀 더 자세히 알아보도록 합시다.

예제 10) 그림은 A점에 정지해 있던 물체가 오른쪽으로 출발하여 일정한 가속도로 운동하는 모습의 일부를 나타낸 것이다.



이때 x와 v는?

이 문제에서는 시간간격에 대한 정보가 아무것도 주어져있지 않습니다.

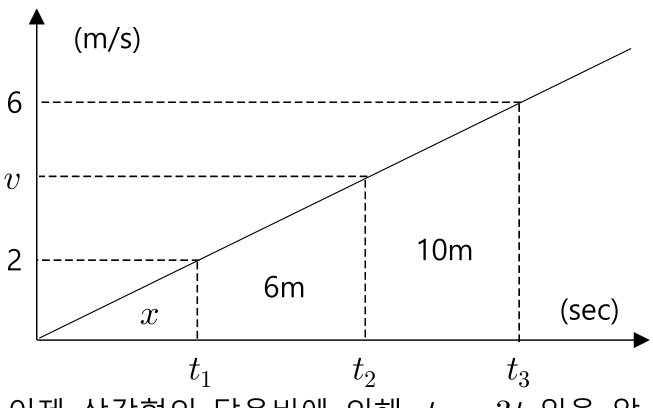
따라서 우선 변위와 속도의 관계를 떠올려야 합니다.

물체의 가속도를 a로 두면, $2a \times 6 = v^2 - 4$, $2a \times 10 = 36 - v^2$이므로 연립하면

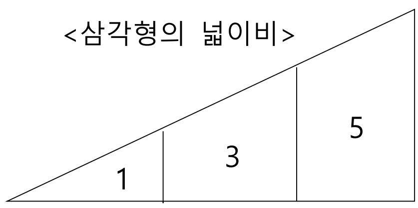
$a = 1\,\mathrm{m/s^2}$, $v = 4\,\mathrm{m/s}$. 이제 $2 \times 1 \times x = 4 - 0$, $x = 2\,\mathrm{m}$.

이 문제를 그래프를 써 풀기 위해서는 닮음을 다루는 요령이 필요합니다.

우선 $v - t$ 그래프를 그려보면 이렇게 됩니다.



<삼각형의 넓이비>



(시간 간격은 동일)
이 그림을 반드시 암기하세요.

이제 삼각형의 닮음비에 의해, $t_3 = 3t_1$임을 알 수 있습니다.

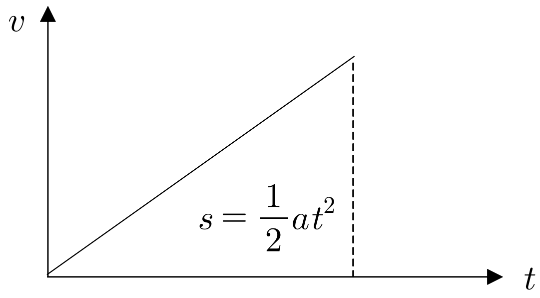
그 다음, 넓이비를 이용하면 $x = 2\,\mathrm{m}$임을 알 수 있습니다. (1:4:9든 1:3:5든...)

다시 한 번 넓이비를 이용하면 $t_2 = 2t_1$이고, 따라서 $v = 4\,\mathrm{m/s}$가 됩니다.

이렇듯 그래프를 이용할 때는 닮음비를 ~~외워서~~이용해서 푸는 경우가 많습니다.

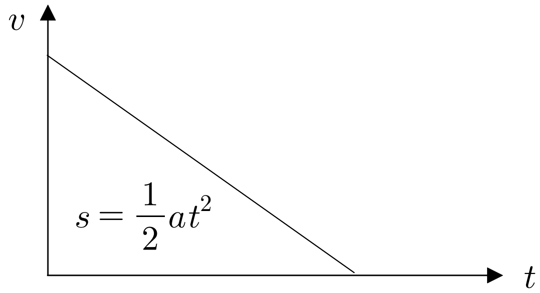
$2as = v^2 - v_0^2$에서 v또는 v_0가 0인 경우, 식이 좀 더 간단해집니다. 양변에 $\sqrt{\ }$를 씌웁니다.

1) v_0(처음 속력)가 0인 경우



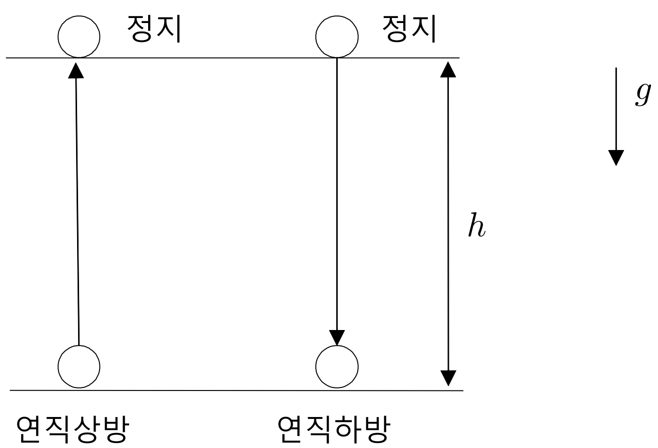
이동거리가 s, 가속도의 크기가 a일 때 나중 속력 $v = \sqrt{2as}$입니다.

2) v(나중 속력)가 0인 경우



이동거리가 s, 가속도의 크기가 a일 때 처음 속력 $v_0 = \sqrt{2as}$입니다.

3) 중력장에서 운동하는 경우

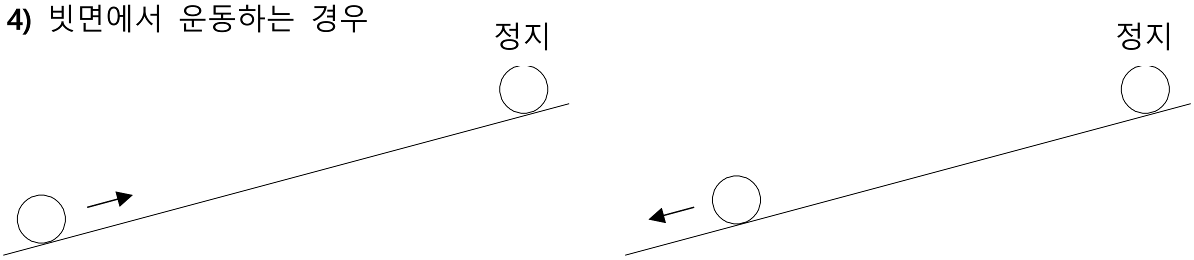


여기서 가속도의 크기는 g, 이동거리는 h이죠.

연직상방운동(위로 던져 올린 물체의 운동)에서 처음 속력 $v_0 = \sqrt{2gh}$입니다.

연직하방운동(가만히 놓은 물체의 운동)에서 나중 속력 $v = \sqrt{2gh}$입니다.

4) 빗면에서 운동하는 경우



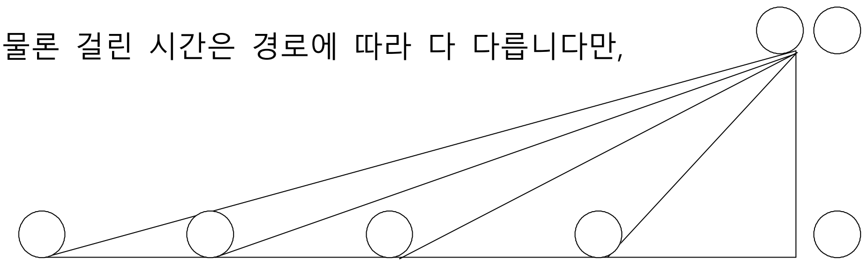
재미있는 것은 이 경우에는 $v = \sqrt{2as} = \sqrt{2gh}$가 모두 성립합니다.

a는 빗면에서의 가속도의 크기, s는 빗면에서의 이동거리,

g는 중력가속도의 크기, h는 높이차입니다.

여기서 빗면의 기울기가 달라져도 높이차 h가 같다면 속력 v가 같다는 걸 알 수 있습니다.

물론 걸린 시간은 경로에 따라 다 다릅니다만,



바닥으로 내려간 순간의 속력은 위의 다섯 물체가 모두 $\sqrt{2gh}$로 같습니다.

<u>당연히 질량과 무관</u>합니다. 지금까지 다룬 모든 내용과 마찬가지로.......

아, 그리고 위에서는 스칼라량을 이용해서 공식들을 나열했습니다. ($v = \sqrt{2as}$류)

그러나 본래 식인 $2as = v^2 - v_0^2$은 벡터량을 기준으로 한다는 것에 주의하세요.

예제 11) 수평면에서 속력 $10\,\mathrm{m/s}$로 등속 직선 운동하던 물체가 p점에서부터 빗면 위로 올라갔다. 물체는 빗면 위의 q점을 지나 최고점에서 운동방향을 바꾸어 다시 q점을 $5\,\mathrm{m/s}$의 속력으로 지나 빗면 아래로 내려갔다. 물체가 p점에서 빗면을 올라가기 시작한 순간부터 빗면 위의 q점을 내려가는 방향으로 지날 때까지 걸린 시간은 3초이다. p와 q 사이의 거리는?

(단, 빗면에서 물체는 등가속도 운동을 한다.)

물체가 처음 운동하는 방향, 즉 빗면 위쪽을 (+)방향으로 두고 문제를 풀어봅시다.

참고로, 빗면은 그냥 물체에 빗면 아래로 가속도가 생기도록 하는 구간일 뿐입니다.

처음 p점을 지나는 순간을 0초라하면, 0초, 3초일 때 속도가 각각 $10\,\mathrm{m/s}$, $-5\,\mathrm{m/s}$입니다.

그리고 물체는 등가속도 운동을 하므로, 물체의 가속도는 $\dfrac{-5-10}{3} = -5\,\mathrm{m/s^2}$.

따라서 $2\times(-5)\times s = (-5)^2 - 10^2$, $s = 7.5\,\mathrm{m}$.

이때 s는 p에서 q방향으로의 변위를 의미합니다. 따라서 p와 q 사이의 거리는 $7.5\,\mathrm{m}$.

참고로 이 예제는 모의고사 19번에 해당하는 고난도(?) 문제의 일부입니다.

지금까지 등가속도 운동의 공식들과, 그래프를 이용한 문제 풀이를 살펴보았습니다.

이제 평균속도를 활용해서 문제를 푸는 것에 대해서 알아보도록 합시다.

평균속도란? 변위가 Δs, 걸린 시간이 Δt일 때 $\bar{v} = \dfrac{\Delta s}{\Delta t}$로 정의되는 물리량이었습니다.

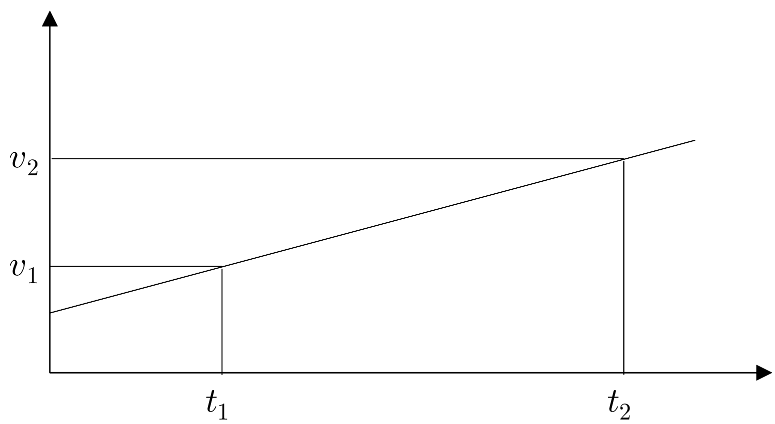
이처럼 평균속도는 변위를 이용해서 정의하기 때문에 이를 통해 변위를 구할 수도 없습니다.

또, 가속도는 평균속도가 아니라 순간속도를 사용하기 때문에 가속도를 구할 수도 없습니다.

그런데 등가속도 직선 운동에서는 평균속도를 다른 방식으로 구할 수 있습니다.

그리고 이를 통해 변위와 가속도, 걸린 시간까지 구해낼 수 있습니다.

그래프를 통해 살펴보도록 하지요. 아래의 $v-t$ 그래프를 봅시다.



간단히 쓰자면 $v(t_1)=v_1$, $v(t_2)=v_2$라고 할 수 있습니다.

자세히 쓰자면 시각 t_1에서의 속도는 v_1, 시각 t_2에서의 속도는 v_2라고 할 수 있습니다.

참고로, 그림에서는 v_1과 v_2의 부호가 같지만 꼭 그럴 필요는 없습니다.

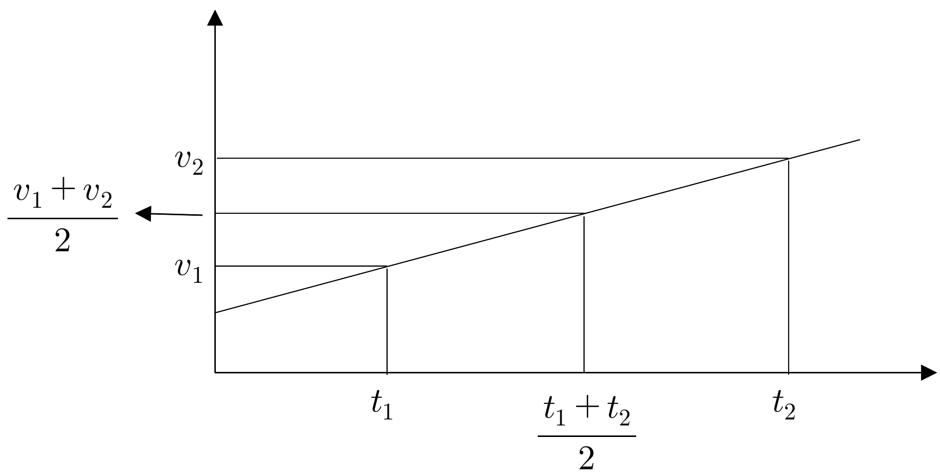
그런데 우리에게 하나의 조건이 더 주어졌다고 합시다. 바로 등가속도 운동 조건이요.

그렇다면 우리는 t_1에서 t_2사이의 평균속도 $\overline{v}$를 $\dfrac{s_2-s_1}{t_2-t_1}$으로 구하는 것이 아니라

v_1과 v_2의 산술평균인 $\dfrac{v_1+v_2}{2}$로 구하면 됩니다.

즉, 등가속도 직선 운동하는 물체의 평균속도는 $\dfrac{(\text{처음속도})+(\text{나중속도})}{2}$입니다.

동시에 이 평균속도는 시각 $\dfrac{t_1+t_2}{2}$에서의 속도이기도 합니다.



그래프를 이용하면 간단히 알 수 있고, 수식으로도 증명을 할 수 있으나 생략하겠습니다.

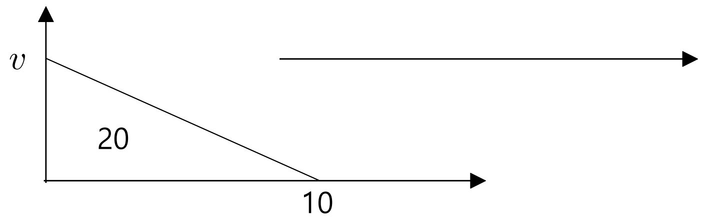
대신 이 그림을 꼭 기억하시기 바랍니다.

이렇게 산술평균으로 구한 평균속도를 이용하면 문제를 더 빠르게 풀어낼 수 있습니다.

예제를 통해 살펴봅시다.

예제 12) 등속도 운동하던 자동차가 0초일 때부터 브레이크를 밟아 10초 동안 $20\,\mathrm{m}$만큼 이동하면서 등가속도 운동한 후 정지했다. 이때 가속도의 크기 a와 처음 속력 v는?

1) 그래프를 그려 문제를 풀어봅시다.



삼각형의 넓이로부터

$$\frac{1}{2}v\times 10 = 20,\ v = 4\,\mathrm{m/s}.$$

이제 가속도의 크기 a는 그래프의 기울기이므로 $a = \frac{2}{5}\,\mathrm{m/s^2}$.

2) 나중 속도가 0이므로 등가속도 운동방정식으로부터 $s = \frac{1}{2}at^2,\ v = \sqrt{2as}$ 을 사용합시다.

$$20 = \frac{1}{2}a\times 100,\ a = \frac{2}{5}\,\mathrm{m/s^2},\ v = \sqrt{2\times\frac{2}{5}\times 20} = 4\,\mathrm{m/s}.$$

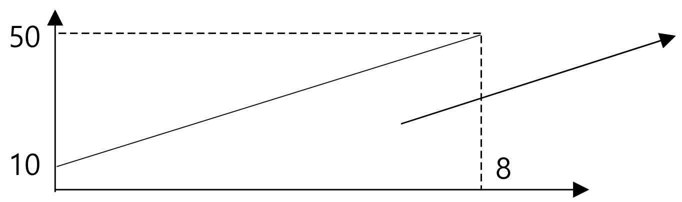
3) 평균속도를 활용해서 문제를 풀어봅시다.

10초 동안의 평균속도가 $\frac{v}{2}$이므로 $20 = \frac{v}{2}\times 10,\ v = 4\,\mathrm{m/s},\ a = \left|\frac{0-v}{10}\right| = \frac{2}{5}\,\mathrm{m/s^2}$.

다른 예제도 여러 방법으로 풀어봅시다.

예제 13) 동쪽으로 $10\,\mathrm{m/s}$의 속력으로 운동하던 버스가 8초 동안 속력이 증가하는 등가속도 운동을 하였더니 속력이 $50\,\mathrm{m/s}$가 되었다. 이때 8초 동안 버스의 이동거리는?

1) 그래프를 그려 문제를 풀어봅시다.



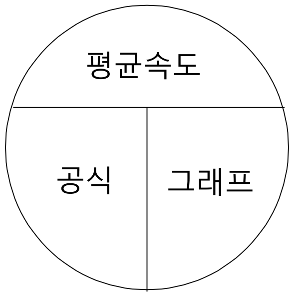
사다리꼴의 넓이를 계산하면

$$\frac{1}{2}\times(10+50)\times 8 = 240\,\mathrm{m}.$$

2) $50 = 10 + 8a$에서 $a = 5\,\mathrm{m/s^2}$. 이제 $s = \dfrac{1}{2} \times 5 \times 64 + 10 \times 8 = 240\,\mathrm{m}$.

3) 평균속도가 $30\,\mathrm{m/s}$이고, 이때는 변위의 크기 = 이동거리이므로 $30 \times 8 = 240\,\mathrm{m}$.

※ 변위의 크기 = 이동거리인 경우는 운동방향이 변하지 않는 경우입니다.



다른 많은 문제들도 이 3가지 방법 중 하나 이상의 방법으로 풀립니다.

그리고 문제마다 최적의 풀이 방법이 다릅니다.

대부분의 간단한 문제는 평균속도로 푸는 것이 가장 빠릅니다.

허나, 가속도가 변하는 등 복잡한 운동을 분석하기로는 그래프가 제격이죠.

상황에 따라서는, 그리고 어려운 문제는 공식 대입이 가장 간단할 수도 있습니다.

가지고 있는 문제들을 여러 가지 방법으로 풀어보기를 권합니다.

지금까지 물체 하나가 등속도 운동, 등가속도 운동,

혹은 둘 이상이 결합된 복잡한 운동을 해석하는 여러 가지 방법에 대해서 알아보았습니다.

그렇지만 물체가 하나가 아니라 여럿이 동시에 운동하는 상황도 자주 출제됩니다.

위 그림에서 두 물체는 서로를 향해 다가가고 있습니다.

물론 이런 경우에도 각 물체에 대해서 운동방정식, 그래프, 평균속도를 적용할 수 있습니다.

그렇지만 더 쉬운 방법이 있습니다.

바로 **상대속도**입니다.

상대속도를 이해하기 위해서는 먼저 좌표계와 관찰자에 대해서 먼저 이해해야 합니다.

이들은 또한 특수 상대성이론을 이해하기 위한 기본이 됩니다.

다음 특강에서 좌표계와 관찰자, 그리고 상대속도를 살펴보도록 합시다.