[수학1] [11수학적귀납법] 교사평경 최근 3개년

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

01 점화식1 (등차수열)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 11

1. 함수 $g(x)$와 수열 $\{a_n\}$이 음이 아닌 모든 정수 k와 모든 자연수 m에 대하여

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{2k+1}+2a_m=g(m+k)$$

를 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{10} g(k)$의 값은?

① 170 ② 180 ③ 190
④ 200 ⑤ 210

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

02 점화식2 (등비수열)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 28

2. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $S_{2n-1}=1$ (나) 수열 $\{a_n a_{n+1}\}$은 등비수열이다.

$S_{10}=33$일 때, S_{18}의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 21

3. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\vert a_1\vert=2$
(나) 모든 자연수 n에 대하여 $\vert a_{n+1}\vert=2\vert a_n\vert$이다.
(다) $\sum_{n=1}^{10} a_n=-14$

$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 12

4. 모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\log_2\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $\frac{S_{12}}{S_6}$의 값은?

① $\frac{17}{2}$ ② 9 ③ $\frac{19}{2}$
④ 10 ⑤ $\frac{21}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 20

5. 수열 $\{a_n\}$은 $1<a_1<2$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}-2a_n & (a_n<0)\\ a_n-2 & (a_n\geq 0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_7=-1$일 때, $40\times a_1$의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 15

6. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이다. (단, r는 $0<\vert r\vert<1$인 상수이다.)
(나) $a_1<0$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=\begin{cases}a_n+3 & (\vert a_n\vert<5)\\ -\frac{1}{2}a_n & (\vert a_n\vert\geq 5)\end{cases}$이다.

$|a_m|\geq 5$를 만족시키는 100 이하의 자연수 m의 개수를 p라 할 때, $p+a_1$의 값은?

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

03 점화식3 (이웃하는 항의 차가 f(n)꼴)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 21

7. 첫째항이 양수이고 공차가 -1보다 작은 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$은 다음과 같다.

$$b_n = \begin{cases} a_{n+1} - \dfrac{n}{2} & (a_n \geq 0) \\ a_n + \dfrac{n}{2} & (a_n < 0) \end{cases}$$

수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 수열 $\{b_n\}$은 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $b_5 < b_6$

(나) $S_5 = S_9 = 0$

$S_n \leq -70$을 만족시키는 자연수 n의 최솟값은?

① 13 ② 15 ③ 17

④ 19 ⑤ 21

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 21

8. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\displaystyle\sum_{k=1}^{2n} a_k = 17n$

(나) $|a_{n+1} - a_n| = 2n - 1$

$a_2 = 9$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{10} a_{2n}$의 값을 구하시오.

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

04 점화식4 (이웃하는 항의 묶이 f(n)꼴)

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 10

9. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}k,\ b_1=1,\ b_n=b_{n-1}\times\frac{a_n}{a_n-1}\ (n\geq 2)$$

를 만족시킬 때, b_{100}의 값은?

① $\frac{44}{17}$ ② $\frac{46}{17}$ ③ $\frac{48}{17}$
④ $\frac{50}{17}$ ⑤ $\frac{52}{17}$

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

05 점화식5 (이웃하는 항이 일차관계식)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 7

10. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=2a_n+1$$

을 만족시킨다. $a_4=31$일 때, a_2의 값은?

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

07 점화식7 (합이 포함된 점화식)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 15

11. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}ka_k$$

를 만족시킨다. $a_1=2$일 때, $a_2+\dfrac{a_{51}}{a_{50}}$의 값은?

① 47 ② 49 ③ 51

④ 53 ⑤ 55

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 03월 공통범위 19

12. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자.

$a_1=2$, $a_2=4$이고 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}S_n=a_nS_{n+1}$$

이 성립할 때, S_5의 값을 구하시오.

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

08 점화식8 (분수꼴 점화식. 치환)

[출처] 2020 모의_공공 경찰대 고3 07월 9

13. $a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$(4-a_{n+1})(2+a_n)=8$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{9}\frac{8}{a_k}$의 정수 부분은?

① 43 ② 44 ③ 45

④ 46 ⑤ 47

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

09 점화식9 (이웃하는 항의 합 또는 곱으로 표현된 점화식)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 10

14. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=12$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$$

을 만족시킨다. $a_k>a_1$인 자연수 k의 최솟값은?

① 2 ② 4 ③ 6

④ 8 ⑤ 10

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 9

15. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_n + a_{n+1} = 2n$$

을 만족시킬 때, $a_1 + a_{22}$의 값은?

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

[출처] 2021 모의_공공 경찰대 고3 07월 25

16. 두 집합 X, Y를

$$X = \{\{a_n\} \mid \{a_n\}\text{은 모든 항이 자연수인 수열이고, } \log a_n + \log a_{n+1} = 2n\},$$

$$Y = \{a_4 \mid \{a_n\} \in X\}$$

라 하자. 집합 Y의 모든 원소의 합이 $p \times 100$일 때, p의 값을 구하시오.

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

10 점화식10 (주기수열)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 24

17. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 9$, $a_2 = 3$이고, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+2} = a_{n+1} - a_n$을 만족시킨다. $|a_k| = 3$을 만족시키는 100이하의 자연수 k의 개수를 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 07월 11

18. 수열 $\{a_n\}$이 $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2^{a_n} & (a_n \le 1)\\ \log_{a_n}\sqrt{2} & (a_n>1)\end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_{12}\times a_{13}$의 값은?

① $\frac{1}{2}$ ② 1 ③ $\sqrt{2}$

④ 2 ⑤ $2\sqrt{2}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 11월 10

19. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=4$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-3 & (a_n \ge 6)\\ (a_n-1)^2 & (a_n<6)\end{cases}$$

을 만족시킨다. a_{10}의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5

④ 7 ⑤ 9

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 19

20. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{n+2}=\begin{cases}a_n-3 & (n=1,\ 3)\\ a_n+3 & (n=2,\ 4)\end{cases}$

(나) 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=a_{n+6}$이 성립한다.

$\sum_{k=1}^{32} a_k=112$일 때, a_1+a_2의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 21

21. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a_1은 1이 아닌 양수이다.

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$a_{2n-1}+a_{2n}=1$이고 $a_{2n}\times a_{2n+1}=1$이다.

$\sum_{n=1}^{14}(|a_n|-a_n)=10$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① $\frac{10}{3}$ ② 4 ③ $\frac{14}{3}$

④ $\frac{16}{3}$ ⑤ 6

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 18

22. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 $a_1=1$, $b_1=-1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=a_n+b_n,\ b_{n+1}=2\cos\frac{a_n}{3}\pi$$

를 만족시킨다. $a_{2021}-b_{2021}$의 값은?

① -2 ② 0 ③ 2
④ 4 ⑤ 6

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 9

23. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{1}{a_n} & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 8a_n & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

이고, $a_{12}=\frac{1}{2}$일 때, a_1+a_4의 값은?

① $\frac{3}{4}$ ② $\frac{9}{4}$ ③ $\frac{5}{2}$
④ $\frac{17}{4}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 21

24. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}a_n-2 & (a_n\geq 0)\\ a_n+5 & (a_n<0)\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 11월 5

25. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (a_n<7)\\ a_n-7 & (a_n\geq 7)\end{cases}$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값은?

① 30 ② 32 ③ 34
④ 36 ⑤ 38

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고2 09월 13

26. 첫째항이 $\frac{1}{2}$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = -\frac{1}{a_n - 1}$$

을 만족시킨다. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_m = 11$을 만족시키는 자연수 m의 값은?

① 20 ② 21 ③ 22
④ 23 ⑤ 24

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 8

27. 첫째항이 20인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = |a_n| - 2$$

를 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{30} a_n$의 값은?

① 88 ② 90 ③ 92
④ 94 ⑤ 96

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 7

28. 첫째항이 $\frac{1}{2}$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 1 & (a_n < 0) \\ -2a_n + 1 & (a_n \ge 0) \end{cases}$$

일 때, $a_{10} + a_{20}$의 값은?

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

11 점화식11 (여러가지 점화식)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 27

29. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이고 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}+3a_n=(-1)^n\times n$$

을 만족시킨다. a_5의 값을 구하시오.

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 13

30. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=\dfrac{3}{2}$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n-1}+a_{2n}=2a_n$$

을 만족시킨다. $\displaystyle\sum_{n=1}^{16}a_n$의 값은?

① 22 ② 24 ③ 26
④ 28 ⑤ 30

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

31. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n+1}=-a_n+3a_{n+1}$

(나) $a_{2n+2}=a_n-a_{n+1}$

$a_1=1$, $a_2=2$일 때, $\displaystyle\sum_{n=1}^{16}a_n$의 값은?

① 31 ② 33 ③ 35
④ 37 ⑤ 39

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 14

32. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=1$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{cases} a_{3n-1}=2a_n+1 \\ a_{3n}=-a_n+2 \\ a_{3n+1}=a_n+1 \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_{11}+a_{12}+a_{13}$의 값은?

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 21

33. 수열 $\{a_n\}$은 $0<a_1<1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_2\times a_n+1$

(나) $a_{2n+1}=a_2\times a_n-2$

$a_7=2$일 때, a_{25}의 값은?

① 78 ② 80 ③ 82
④ 84 ⑤ 86

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 21

34. 수열 $\{a_n\}$은 $0<a_1<1$이고, 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=a_2\times a_n+1$
(나) $a_{2n+1}=a_2\times a_n-2$

$a_8-a_{15}=63$일 때, $\dfrac{a_8}{a_1}$의 값은?

① 91 ② 92 ③ 93
④ 94 ⑤ 95

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 03월 9

35. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=7$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n+3}{2} & (a_n\text{이 소수인 경우})\\ a_n+n & (a_n\text{이 소수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. a_8의 값은?

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 21

36. 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2}=\begin{cases}2a_n+a_{n+1} & (a_n\le a_{n+1})\\ a_n+a_{n+1} & (a_n>a_{n+1})\end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_3=2$, $a_6=19$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① $-\dfrac{1}{2}$ ② $-\dfrac{1}{4}$ ③ 0
④ $\dfrac{1}{4}$ ⑤ $\dfrac{1}{2}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 04월 30

37. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_{2n}=b_n+2$

(나) $a_{2n+1}=b_n-1$

(다) $b_{2n}=3a_n-2$

(라) $b_{2n+1}=-a_n+3$

$a_{48}=9$이고 $\sum_{n=1}^{63}a_n-\sum_{n=1}^{31}b_n=155$일 때, b_{32}의 값을 구하시오.

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 12

38. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\log_2 a_n & (n\text{이 홀수인 경우})\\ 2^{a_n+1} & (n\text{이 짝수인 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_8=5$일 때, a_6+a_7의 값은?

① 36 ② 38 ③ 40
④ 42 ⑤ 44

[출처] 2021 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 15

39. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_1의 최솟값을 m이라 하자.

(가) 수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.
(나) 모든 자연수 n에 대하여
$a_{2n}=a_3\times a_n+1$, $a_{2n+1}=2a_n-a_2$
이다.

$a_1=m$인 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 값은?

① -53 ② -51 ③ -49
④ -47 ⑤ -45

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 7

40. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=10$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}5-\dfrac{10}{a_n} & (a_n\text{이 정수인 경우})\\ -2a_n+3 & (a_n\text{이 정수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시킨다. a_9+a_{12}의 값은?

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 예비 공통범위 15

41. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $\sum_{k=1}^{100} a_k$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M-m$의 값은?

(가) $a_5 = 5$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - 6 & (a_n \geq 0) \\ -2a_n + 3 & (a_n < 0) \end{cases}$$

이다.

① 64 ② 68 ③ 72 ④ 76 ⑤ 80

[출처] 2021 모의_공공 평가원 고3 09월 공통범위 15

42. 수열 $\{a_n\}$은 $|a_1| \leq 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} -2a_n - 2 & \left(-1 \leq a_n < -\frac{1}{2}\right) \\ 2a_n & \left(-\frac{1}{2} \leq a_n \leq \frac{1}{2}\right) \\ -2a_n + 2 & \left(\frac{1}{2} < a_n \leq 1\right) \end{cases}$$

을 만족시킨다. $a_5 + a_6 = 0$이고 $\sum_{k=1}^{5} a_k > 0$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① $\frac{9}{2}$ ② 5 ③ $\frac{11}{2}$ ④ 6 ⑤ $\frac{13}{2}$

[출처] 2022 모의_공공 사관학교 고3 07월 공통범위 19

43. 수열 $\{a_n\}$은 $a_1 = 1$이고, 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{2n} = 2a_n,\ a_{2n+1} = 3a_n$$

을 만족시킨다. $a_7 + a_k = 73$인 자연수 k의 값을 구하시오.

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 04월 공통범위 12

44. 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $1 \le n \le 4$인 모든 자연수 n에 대하여
$a_n + a_{n+4} = 15$이다.
(나) $n \ge 5$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1} - a_n = n$이다.

$\sum_{n=1}^{4} a_n = 6$일 때, a_5의 값은?

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 11월

45. 모든 항이 자연수이고 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_9의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

(가) $a_7 = 40$
(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+2} = \begin{cases} a_{n+1} + a_n & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수가 아닌 경우}) \\ \frac{1}{3}a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 } 3\text{의 배수인 경우}) \end{cases}$$

이다.

① 216 ② 218 ③ 220
④ 222 ⑤ 224

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 15

46. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> $a_1=0$이고, 모든 자연수 n에 대하여
> $$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+\dfrac{1}{k+1} & (a_n\le 0) \\ a_n-\dfrac{1}{k} & (a_n>0) \end{cases}$$
> 이다.

$a_{22}=0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은?

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

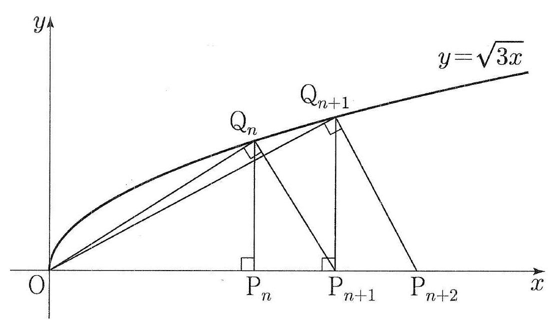
03 수1 11 수학적귀납법
01 귀납적 정의
12 점화식12 (점화식 만들기)

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 09월 16

47. 모든 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 x축 위의 점 $\mathrm{P_n}$과 곡선 $y=\sqrt{3x}$ 위의 점 Q_n이 있다.

> (가) 선분 OP_n과 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$이 서로 수직이다.
>
> (나) 선분 OQ_n과 선분 $\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$이 서로 수직이다.

다음은 점 $\mathrm{P_1}$의 좌표가 $(1,\ 0)$일 때, 삼각형 $\mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{Q}_n$의 넓이 A_n을 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)



모든 자연수 n에 대하여 점 $\mathrm{P_n}$의 좌표를 $(a_n,\ 0)$이라 하자.

$\overline{\mathrm{OP_{n+1}}}=\overline{\mathrm{OP_n}}+\overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}$이므로

$$a_{n+1}=a_n+\overline{\mathrm{P}_nP_{n+1}}$$

이다. 삼각형 $\mathrm{OP_nQ_n}$과 삼각형 $\mathrm{Q_nP_nP_{n+1}}$이 닮음이므로

$$\overline{\mathrm{OP_n}} : \overline{\mathrm{P_nQ_n}}=\overline{\mathrm{P_nQ_n}} : \overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}$$

이고, 점 $\mathrm{Q_n}$의 좌표는 $(a_n,\ \sqrt{3a_n})$이므로

$$\overline{\mathrm{P_nP_{n+1}}}=\boxed{\text{(가)}}$$

이다. 따라서 삼각형 $\mathrm{OP_{n+1}Q_n}$의 넓이 A_n은

$$A_n=\frac{1}{2}\times(\boxed{\text{(나)}})\times\sqrt{9n-6}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)에 알맞은 식을 $f(n)$이라 할 때, $p+f(8)$의 값은?

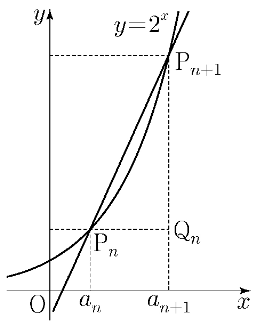
① 20 ② 22 ③ 24
④ 26 ⑤ 28

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 11월 16

48. 상수 $k(k>1)$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

> 모든 자연수 n에 대하여 $a_n < a_{n+1}$이고
> 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 $\mathrm{P}_n(a_n,\ 2^{a_n})$, $\mathrm{P}_{n+1}(a_{n+1},\ 2^{a_{n+1}})$을 지나는 직선의 기울기는 $k\times 2^{a_n}$이다.

점 P_n을 지나고 x축에 평행한 직선과 점 P_{n+1}을 지나고 y축에 평행한 직선이 만나는 점을 Q_n이라 하고 삼각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$의 넓이를 A_n이라 하자.



다음은 $a_1=1$, $\dfrac{A_3}{A_1}=16$일 때, A_n을 구하는 과정이다.

> 두 점 P_n, P_{n+1}을 지나는 직선의 기울기가 $k\times 2^{a_n}$이므로 $2^{a_{n+1}-a_n}=k(a_{n+1}-a_n)+1$
> 이다. 즉, 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n$은 방정식 $2^x=kx+1$의 해이다.
> $k>1$이므로 방정식 $2^x=kx+1$은 오직 하나의 양의 실근 d를 갖는다. 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}-a_n=d$이고, 수열 $\{a_n\}$은 공차가 d인 등차수열이다.
> 점 Q_n의 좌표가 $(a_{n+1},\ 2^{a_n})$이므로
> $$A_n=\frac{1}{2}(a_{n+1}-a_n)(2^{a_{n+1}}-2^{a_n})$$
> 이다. $\dfrac{A_3}{A_1}=16$이므로 d의 값은 $\boxed{\text{(가)}}$ 이고,
> 수열 $\{a_n\}$의 일반항은
> $a_n=\boxed{\text{(나)}}$ 이다.
> 따라서 모든 자연수 n에 대하여 $A_n=\boxed{\text{(다)}}$ 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $p+\dfrac{g(4)}{f(2)}$의 값은?

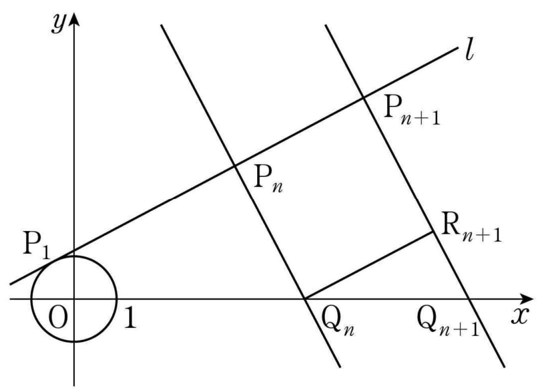
① 118 ② 121 ③ 124
④ 127 ⑤ 130

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 10월 공통범위 14

49. 모든 자연수 n에 대하여 직선 $l : x-2y+\sqrt{5}=0$ 위의 점 P_n과 x축 위의 점 Q_n이 다음 조건을 만족시킨다.

> - 직선 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$과 직선 l이 서로 수직이다.
> - $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$이고 점 P_{n+1}의 x좌표는 점 P_n의 x좌표보다 크다.

다음은 점 P_1이 원 $x^2+y^2=1$과 직선 l의 접점일 때, 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 삼각형 $\mathrm{OQ}_n\mathrm{P}_n$의 넓이를 구하는 과정이다. (단, O는 원점이다.)

> 
>
>
> 자연수 n에 대하여 점 Q_n을 지나고 직선 l과 평행한 직선이 선분 $\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}$과 만나는 점을 R_{n+1}이라 하면 사각형 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_{n+1}\mathrm{P}_{n+1}$은 정사각형이다.
> 직선 l의 기울기가 $\dfrac{1}{2}$이므로
> $$\overline{\mathrm{R}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}=\boxed{\text{(가)}}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$$
> 이고
> $$\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}}=\left(1+\boxed{\text{(가)}}\right)\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$$
> 이다. 이때, $\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}=1$이므로 $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}=\boxed{\text{(나)}}$이다.
> 그러므로 2 이상의 자연수 n에 대하여
> $$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_n}=\sum_{k=1}^{n-1}\overline{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}}=\boxed{\text{(다)}}$$
> 이다. 따라서 2 이상의 자연수 n에 대하여 삼각형 $\mathrm{OQ}_n\mathrm{P}_n$의 넓이는
> $$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}\times\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_n}=\frac{1}{2}\times\boxed{\text{(나)}}\times\left(\boxed{\text{(다)}}\right)$$
> 이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나)와 (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(6p)+g(8p)$의 값은?

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

[출처] 2022 모의_공공 평가원 고3 06월 공통범위 13

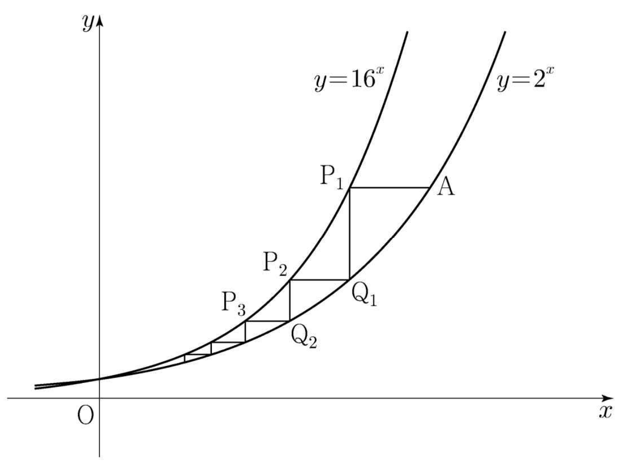
50. 두 곡선 $y=16^x$, $y=2^x$과 한 점 $\mathrm{A}(64, 2^{64})$이 있다.

점 A를 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_1이라 하고, 점 P_1을 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_1이라 하자.

점 Q_1을 지나며 x축과 평행한 직선이 곡선 $y=16^x$과 만나는 점을 P_2라 하고, 점 P_2를 지나며 y축과 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 Q_2라 하자.

이와 같은 과정을 계속하여 n번째 얻은 두 점을 각각 P_n, Q_n이라 하고 점 Q_n의 x좌표를 x_n이라 할 때, $x_n < \frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이 되도록 하는 자연수 k의 개수는?

① 48 ② 51 ③ 54
④ 57 ⑤ 60



03 수1 11 수학적귀납법

01 귀납적 정의

13 점화식13 (일반항 추론)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 13

51. 첫째항이 1인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$(n+1)S_{n+1}=\log_2(n+2)+\sum_{k=1}^{n}S_k \quad \cdots\cdots (*)$$

가 성립할 때, $\sum_{k=1}^{n}ka_k$를 구하는 과정이다.

주어진 식 $(*)$에 의하여 $nS_n=\log_2(n+1)+\sum_{k=1}^{n-1}S_k\,(n\geq 2)$ ⋯⋯ ㉠ 이다. $(*)$에서 ㉠을 빼서 정리하면 $(n+1)S_{n+1}-nS_n$ $=\log_2(n+2)-\log_2(n+1)+\sum_{k=1}^{n}S_k-\sum_{k=1}^{n-1}S_k$ $(n\geq 2)$ 이므로 $\boxed{(가)}\times a_{n+1}=\log_2\frac{n+2}{n+1}\,(n\geq 2)$이다. $a_1=1=\log_2 2$이고, $2S_2=\log_2 3+S_1=\log_2 3+a_1$이므로 모든 자연수 n에 대하여 $na_n=\boxed{(나)}$이다. 따라서 $\sum_{k=1}^{n}ka_k=\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$, $h(n)$이라 할 때, $f(8)-g(8)+h(8)$의 값은?

① 12 ② 13 ③ 14
④ 15 ⑤ 16

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 11월 19

52. 다음은 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right)a_k=n^2$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{n}a_k$를 구하는 과정이다.

> $T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right)a_k$라 하자.
>
> (ⅰ) $T_1=1$이므로 $a_1=\boxed{(가)}$이다.
>
> (ⅱ) 2 이상의 자연수 n에 대하여
>
> $T_n=n^2$에서
>
> $T_n-T_{n-1}=2n-1$이고
>
> $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-\frac{1}{\boxed{(나)}}\times\sum_{k=1}^{n}a_k$에서
>
> $T_n-T_{n-1}=\frac{1}{\boxed{(다)}}\times\sum_{k=1}^{n}a_k$이므로
>
> $\sum_{k=1}^{n}a_k=(2n-1)\times(\boxed{(다)})$이다.
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여
>
> $\sum_{k=1}^{n}a_k=(2n-1)\times(\boxed{(다)})$이다.

(가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 할 때, $f(2p)\times g(3p)$의 값은?

① 190 ② 200 ③ 210
④ 220 ⑤ 230

[출처] 2022 모의_공공 교육청 고3 07월 공통범위 12

53. 첫째항이 2인 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{3S_k}{k+2}=S_n$$

이 성립할 때, a_{10}의 값을 구하는 과정이다.

> $n\geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여
>
> $a_n=S_n-S_{n-1}$
>
> $=\sum_{k=1}^{n}\frac{3S_k}{k+2}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{3S_k}{k+2}=\frac{3S_n}{n+2}$
>
> 이므로 $3S_n=(n+2)\times a_n$ $(n\geq 2)$ 이다.
>
> $S_1=a_1$에서 $3S_1=3a_1$이므로
>
> $3S_n=(n+2)\times a_n$ $(n\geq 1)$ 이다.
>
> $3a_n=3(S_n-S_{n-1})$
>
> $=(n+2)\times a_n-(\boxed{(가)})\times a_{n-1}$ $(n\geq 2)$
>
> $\frac{a_n}{a_{n-1}}=\boxed{(나)}$ $(n\geq 2)$
>
> 따라서
>
> $a_{10}=a_1\times\frac{a_2}{a_1}\times\frac{a_3}{a_2}\times\frac{a_4}{a_3}\times\cdots\times\frac{a_9}{a_8}\times\frac{a_{10}}{a_9}$
>
> $=\boxed{(다)}$

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(n)$, $g(n)$이라 하고, (다)에 알맞은 수를 p라 할 때, $\frac{f(p)}{g(p)}$의 값은?

① 109 ② 112 ③ 115
④ 118 ⑤ 121

03 수1 11 수학적귀납법

02 수학적 귀납법

02 수학적 귀납법2 (등식)

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고2 09월 20

54. 다음은 모든 자연수 k에 대하여

$$\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k} \quad \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

> $(*)$에서 $S_n=\sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$, $T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}$이라 하자.
>
> (ⅰ) $n=1$일 때,
> $S_1=\boxed{(가)}=T_1$이므로 $(*)$이 성립한다.
>
> (ⅱ) $n=m$일 때,
> $(*)$이 성립한다고 가정하면 $S_m=T_m$이다.
> $n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.
>
> $$S_{m+1}=S_m+\frac{1}{2m+1}+\boxed{(나)},$$
>
> $$T_{m+1}=T_m+\boxed{(다)}+\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m+2}$$
>
> 이다.
> $S_{m+1}-T_{m+1}=S_m-T_m$이고, $S_m=T_m$이므로
> $S_{m+1}=T_{m+1}$이다.
> 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 a라 하고, (나),(다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $a+\frac{g(5)}{f(14)}$의 값은?

① $\frac{7}{2}$ ② $\frac{9}{2}$ ③ $\frac{11}{2}$

④ $\frac{13}{2}$ ⑤ $\frac{15}{2}$

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 18

55. 3이상의 자연수 n에 대하여 집합

$$A_n=\{(p,\ q)\,|\,p<q\text{이고 } p,\ q\text{는 } n\text{이하의 자연수}\}$$

이다. 집합 A_n의 모든 원소 $(p,\ q)$에 대하여 q의 값의 평균을 a_n이라 하자. 다음은 3이상의 자연수 n에 대하여 $a_n=\frac{2n+2}{3}$임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

> (ⅰ) $n=3$일 때, $A_3=\{(1,2),(1,3),(2,3)\}$이므로
>
> $a_3=\frac{2+3+3}{3}=\frac{8}{3}$이고 $\frac{2\times3+2}{3}=\frac{8}{3}$이다.
>
> 그러므로 $a_n=\frac{2n+2}{3}$가 성립한다.
>
> (ⅱ) $n=k\ (k\ge3)$일 때, $a_k=\frac{2k+2}{3}$가 성립한다고 가정하자. $n=k+1$일 때,
>
> $A_{k+1}=A_k\cup\{(1,k+1),(2,k+1),\cdots,(k,k+1)\}$
>
> 이고 집합 A_k의 원소의 개수는 $\boxed{(가)}$이므로
>
> $$a_{k+1}=\frac{\boxed{(가)}\times\frac{2k+2}{3}+\boxed{(나)}}{{}_{k+1}\mathrm{C}_2}$$
>
> $$=\frac{2k+4}{3}=\frac{2(k+1)+2}{3}$$
>
> 이다. 따라서 $n=k+1$일 때도 $a_n=\frac{2n+2}{3}$가 성립한다.
>
> (ⅰ), (ⅱ)에 의하여 3 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n=\frac{2n+2}{3}$이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(k)$, $g(k)$라 할 때, $f(10)+g(9)$의 값은?

① 131 ② 133 ③ 135

④ 137 ⑤ 139

[출처] 2020 모의_공공 평가원 고3 06월 15

56. 수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$$a_n=(2^{2n}-1)\times 2^{n(n-1)}+(n-1)\times 2^{-n}$$

이다. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n} \qquad \cdots\cdots (*)$$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때, (좌변)$=3$, (우변)$=3$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$

$$+(2^{2m+2}-1)\times \boxed{(가)}+m\times 2^{-m-1}$$

$$=\boxed{(가)}\times\boxed{(나)}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$$

$$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n} a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n}$$

이다.

위의 (가), (나)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $\dfrac{g(7)}{f(3)}$의 값은?

① 2 ② 4 ③ 8
④ 16 ⑤ 32

[출처] 2020 모의_공공 교육청 고3 10월 19

57. 다음은 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}{}_n\mathrm{C}_k}{k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \qquad \cdots\cdots (\ast)$$

이 성립함을 수학적 귀납법을 이용하여 증명한 것이다.

(ⅰ) $n=1$일 때 (좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 $(\ast)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때 $(\ast)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}{}_m\mathrm{C}_k}{k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^{k-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_k}{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_k}{k}+\boxed{(가)}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}({}_m\mathrm{C}_k+{}_m\mathrm{C}_{k-1})}{k}+\boxed{(가)}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m+1}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{k}\times\frac{\boxed{(나)}}{(m-k+1)!(k-1)!}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m+1}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{\boxed{(다)}}\times\frac{(m+1)!}{(m-k+1)!k!}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\frac{1}{m+1}$$

$$=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(\ast)$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(\ast)$이 성립한다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$, $h(m)$이라 할 때, $\dfrac{g(3)+h(3)}{f(4)}$의 값은?

① 40 ② 45 ③ 50
④ 55 ⑤ 60

03 수1 11 수학적귀납법

02 수학적 귀납법

03 수학적 귀납법3 (부등식)

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 18

[출처] 2020 모의_공공 사관학교 고3 07월 17

58. 다음은 모든 자연수 n에 대하여 부등식

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_{\mathrm{k}}}{2^k}\le\frac{(2\mathrm{n})!}{2^{\mathrm{n}}}\qquad\cdots\cdots\ (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=\dfrac{{}_{2}\mathrm{P}_{1}}{2^1}=1$이고, (우변)$=\boxed{(가)}$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_{\mathrm{k}}}{2^k}\le\frac{(2\mathrm{m})!}{2^{\mathrm{m}}}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_{k}}{2^k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_{k}}{2^k}+\frac{{}_{2m+2}\mathrm{P}_{m+1}}{2^{m+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_{\mathrm{k}}}{2^k}+\frac{\boxed{(나)}}{2^{\mathrm{m}+1}\times(\mathrm{m}+1)!}$$

$$\le\frac{(2m)!}{2^m}+\frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}\times(m+1)!}$$

$$=\frac{\boxed{(나)}}{2^{m+1}}\times\left\{\frac{1}{\boxed{(다)}}+\frac{1}{(m+1)!}\right\}$$

$$<\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_{\mathrm{k}}}{2^k}\le\frac{(2\mathrm{n})!}{2^{\mathrm{n}}}$$

이다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $p+\dfrac{f(2)}{g(4)}$의 값은?

① 16 ② 17 ③ 18

④ 19 ⑤ 20

03 수1 11 수학적귀납법

02 수학적 귀납법

05 수학적 귀납법5 (점화식)

[출처] 2021 모의_공공 교육청 고2 09월 16

59. 수열 $\{a_n\}$을 $a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$이라 할 때, 다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\frac{n(n+1)}{4}(2a_{n+1}-1)$$

$\cdots\cdots$ $(*)$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

(i) $n=1$일 때,

(좌변)$=a_1$, (우변)$=a_2-\boxed{(가)}=1=a_1$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, $(*)$이 성립한다고 가정하면

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m=\frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)$$

이다.

$n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}&a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m+(m+1)a_{m+1}\\&=\frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)+(m+1)a_{m+1}\\&=(m+1)a_{m+1}\left(\boxed{(나)}+1\right)-\frac{m(m+1)}{4}\\&=\frac{(m+1)(m+2)}{2}\left(a_{m+2}-\boxed{(다)}\right)-\frac{m(m+1)}{4}\\&=\frac{(m+1)(m+2)}{4}(2a_{m+2}-1)\end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=\frac{n(n+1)}{4}(2a_{n+1}-1)$$

이 성립한다.

위의 (가)에 알맞은 수를 p, (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $f(m)$, $g(m)$이라 할 때, $p+\frac{f(5)}{g(3)}$의 값은?

① 9 ② 10 ③ 11
④ 12 ⑤ 13

[수학1] [11수학적귀납법] 교사평경 최근 3개년(빠른 정답)

년도별경향 2022.12.27

1. [정답] ⑤
2. [정답] **513**
3. [정답] 678
4. [정답] ②
5. [정답] 70

6. [정답] ③
7. [정답] ④
8. [정답] 180
9. [정답] ④
10. [정답] ①

11. [정답] ④
12. [정답] 162
13. [정답] ①
14. [정답] ④
15. [정답] ⑤

16. [정답] **217**
17. [정답] 33
18. [정답] ③
19. [정답] ⑤
20. [정답] 7

21. [정답] ③
22. [정답] ⑤
23. [정답] ⑤
24. [정답] 5
25. [정답] ①

26. [정답] ③
27. [정답] ②
28. [정답] ②
29. [정답] **139**
30. [정답] ②

31. [정답] ①
32. [정답] ③
33. [정답] ③
34. [정답] ②
35. [정답] ④

36. [정답] ②
37. [정답] **79**
38. [정답] ①
39. [정답] ①
40. [정답] ④

41. [정답] ③
42. [정답] ①
43. [정답] 64
44. [정답] ③
45. [정답] ⑤

46. [정답] ②
47. [정답] ⑤
48. [정답] ⑤
49. [정답] ⑤
50. [정답] ①

51. [정답] ①
52. [정답] ③
53. [정답] ①
54. [정답] ③
55. [정답] ③

56. [정답] ④
57. [정답] ③
58. [정답] ②
59. [정답] ⑤

[수학1] [11수학적귀납법] 교사평경 최근 3개년(해설)

년도별경향 2022.12.27

1) [정답] ⑤

[해설]

함수 $g(x)$와 수열 $\{a_n\}$이 음이 아닌 모든 정수 k와 모든 자연수 m에 대하여

$$a_1=1,\ a_2=3,\ a_{2k+1}+2a_m=g(m+k)$$

를 만족시키므로 식에

$m=1,\ k=0$을 대입하면

$$g(1)=a_1+2a_1=3a_1=3 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$m=1,\ m=2$를 차례로 대입하면

$$g(k+1)=a_{2k+1}+2a_1=a_{2k+1}+2$$

$$g(k+2)=a_{2k+1}+2a_2=a_{2k+1}+6$$

즉 $g(k+2)-g(k+1)=4$

따라서 수열 $g(k)$는 공차가 4이고 ㉠에서 초항이 3인 등차수열이므로 $g(k)=4k-1$

$$\sum_{k=1}^{10}g(k)=\sum_{k=1}^{10}(4k-1)$$

$=4\sum_{k=1}^{10}k-\sum_{k=1}^{10}1$

$=4\cdot\dfrac{10\cdot 11}{2}-10\cdot 1$

$=220-10=210$

2) [정답] **513**

[해설]

조건 (가)에서 $S_1=a_1=1$

수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_na_{n+1}$이라 하자.

조건 (나)에서 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r라 하면

$$\frac{b_{n+1}}{b_n}=\frac{a_{n+1}a_{n+2}}{a_na_{n+1}}=r,\ a_{n+2}=ra_n$$

$$S_{10}=S_{11}-a_{11}=1-r^5=33$$

$$r^5=-32$$

$$\therefore r=-2$$

$$S_{18}=S_{19}-a_{19}=1-r^9=513$$

3) [정답] 678

[해설]

조건 (가), (나)에서

수열 $\{|a_n|\}$은 첫째항이 2, 공비가 2인 등비수열이므로

$|a_n|=2^n$

한편,

$$\sum_{k=1}^{9}|a_k|=\sum_{k=1}^{9}2^k=\frac{2(2^9-1)}{2-1}=2^{10}-2,$$

$|a_{10}|=2^{10}$

조건 (다)에서

$$\sum_{k=1}^{10}a_k=-14$$

를 만족하기 위해서는

$a_1=-2,\ a_2=-4$

$$\sum_{k=3}^{9}a_k=\sum_{k=3}^{9}2^k=\frac{2^3(2^7-1)}{2-1}=2^{10}-8,$$

$a_{10}=-1024$

이어야 한다.

따라서

$$a_1+a_3+a_5+a_7+a_9=(-2)+2^3+2^5+2^7+2^9$$
$$=678$$

4) [정답] ②

[해설]

$$\log_2\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2},\ \frac{a_{n+1}}{a_n}=\sqrt{2},\ a_{n+1}=\sqrt{2}a_n$$

$a_1=a$라 하면 수열 $\{a_n\}$은 첫째항이 a이고 공비가 $\sqrt{2}$인 등비수열이므로

$$S_n=\frac{a\{(\sqrt{2})^n-1\}}{\sqrt{2}-1}$$

따라서 $\dfrac{S_{12}}{S_6}=\dfrac{(\sqrt{2})^{12}-1}{(\sqrt{2})^6-1}=\dfrac{2^6-1}{2^3-1}=9$

5) [정답] 70

[해설]

$$a_{n+1}=\begin{cases}-2a_n & (a_n<0)\\ a_n-2 & (a_n\geq 0)\end{cases}\cdots\cdots ㉠$$

이고 $1<a_1<2$에서 $a_1\geq 0$이므로

$a_2=a_1-2<0$

$a_3=-2a_2=-2(a_1-2)>0$

$a_4=a_3-2=-2(a_1-2)-2=-2(a_1-1)<0$

$a_5=-2a_4=4(a_1-1)>0$

$a_6=a_5-2=4(a_1-1)-2=4a_1-6$

이때 ㉠에서 $a_6<0$이면 $a_7=-2a_6>0$이므로

$a_7=-1\le 0$에서 $a_6\ge 0$이다.

$a_7=a_6-2=(4a_1-6)-2=4a_1-8=-1$

$a_1=\frac{7}{4}$

따라서

$40\times a_1=40\times\frac{7}{4}=70$

6) [정답] ③

[해설]

$a_4=r$이고 $|r|<1$이므로

$a_5=r+3$

$a_6=r+6$

$a_7=-\frac{1}{2}a_6=\frac{r+6}{-2}(\because a_5<5<a_6)$

$a_8=\frac{r+6}{-2}+3=-\frac{1}{2}r$

조건 (가)에서 $a_8=r^2$이므로 $r^2=-\frac{1}{2}r$에서 $r=-\frac{1}{2}$

주어진 조건에 따라 a_3, a_2, a_1을 구하면 다음과 같다.

a_4	a_3	a_2	a_1
$-\frac{1}{2}$	$-\frac{7}{2}$	7	-14

이때,

$|a_{4n}|=\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right|<1$에서

$|a_{4n+1}|=\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n+3\right|<5$

$|a_{4n+2}|=\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^n+6\right|>5$

$|a_{4n+3}|=\left|\left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1}-3\right|<5$

이므로 a_{4n+2}만 5보다 크다.

따라서, $|a_m|\ge 5$를 만족하는 m의 개수는

$m=1,\ 2,\ 6,\ 10,\ \cdots,\ 98$의 26개다. 따라서 $p=26$,

$a_1=-14$이므로 $p+a_1=12$이다.

a_1	a_2	a_3	a_4
$-2r+3$ $4r-12$	$-2r+6$	$r-3$	r

a_5	a_6	a_7	a_8
$r+3$	$r+6$	$\frac{r+6}{-2}$	$-\frac{1}{2}r$

$a_1<0$이고 모든 자연수 k에 대하여 $a_{4k}=r^k$이므로

$a_8=-\frac{1}{2}r=r^2$

따라서 $r=-\frac{1}{2}$이고 $a_1=-14$이다.

모든 자연수 k에 대하여 $|a_{4k-2}|\ge 5$이고

$|a_1|=|-14|>5$이다.

따라서, $|a_m|\ge 5$를 만족하는 m의 개수는 $25+1=26$개다.

$p=26$, $a_1=-14$ 이므로 $p+a_1=12$이다.

7) [정답] ④

[해설]

등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하자.

$a>0$, $d<-1$이므로 $n\le k$일 때 $a_n\ge 0$, $n\ge k+1$일 때 $a_n<0$인 자연수 k가 유일하게 존재한다.

$n\le k$일 때, $a_n\ge 0$, $b_n=a_{n+1}-\frac{n}{2}$이므로

$$b_1=a_2-\frac{1}{2},\ b_2=a_3-1,\ \cdots,\ b_k=a_{k+1}-\frac{k}{2}$$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ k-1$일 때,

$b_{n+1}-b_n=d-\frac{1}{2}$을 만족시킨다.

$n\ge k+1$일 때, $a_n<0$, $b_n=a_n+\frac{n}{2}$이므로

$$b_{k+1}=a_{k+1}+\frac{k+1}{2},\ b_{k+2}=a_{k+2}+\frac{k+2}{2},$$

$$b_{k+3}=a_{k+3}+\frac{k+3}{2},\ \cdots$$

따라서 수열 $\{b_n\}$은 $n=k+1,\ k+2,\ k+3,\ \cdots$일 때,

$b_{n+1}-b_n=d+\frac{1}{2}$을 만족시킨다.

즉, $n\le k-1$일 때, $d-\frac{1}{2}<0$이므로 $b_n>b_{n+1}$, $n\ge k+1$일 때, $d+\frac{1}{2}<0$이므로 $b_n>b_{n+1}$

$n=k$일 때,

$$b_{k+1}-b_k=\left(a_{n+1}+\frac{k+1}{2}\right)-\left(a_{k+1}-\frac{k}{2}\right)$$

$=k+\frac{1}{2}>0$

이므로 $b_n<b_{n+1}$

그러므로 $n=k$일 때만 $b_n<b_{n+1}$이다.

조건 (가)에서 $b_5<b_6$이므로 $k=5$이다.

그러므로 $b_n=\begin{cases} a_{n+1}-\dfrac{n}{2} & (n\le 5) \\ a_n+\dfrac{n}{2} & (n\ge 6)\end{cases}$

조건 (나)에 의하여

$$S_5=b_1+b_2+b_3+b_4+b_5$$

$=\dfrac{5(b_1+b_5)}{2}$

$=\dfrac{5}{2}\times\left\{\left(a_2-\dfrac{1}{2}\right)+\left(a_6-\dfrac{5}{2}\right)\right\}$

$=\dfrac{5}{2}\times(2a+6d-3)$

$=0$

즉, $2a+6d-3=0$ …… ㉡

㉠, ㉡에 의하여 $a=6$, $d=-\dfrac{3}{2}$이므로 $a_n=-\dfrac{3}{2}n+\dfrac{15}{2}$

$$S_9=0,\ b_{10}=a_{10}+5=-\frac{15}{2}+5=-\frac{5}{2}$$

$n\ge 6$일 때, 수열 $\{b_n\}$은 $b_{n+1}-b_n=d+\dfrac{1}{2}=-1$을 만족시키므로

$$S_n=S_9+(b_{10}+b_{11}+b_{12}+\cdots+b_n)$$

$=0+\dfrac{(n-9)\{-5+(n-10)(-1)\}}{2}$

$=-\dfrac{(n-5)(n-9)}{2}\ (n\ge 10)$

$S_n\le -70$을 만족시키는 n의 값의 범위는 $n\ge 19$이므로 자연수 n의 최솟값은 19

[참고]

$$b_n=\begin{cases} 6-2n & (n\le 5) \\ \dfrac{15}{2}-n & (n\ge 6)\end{cases}$$

$$S_n=\begin{cases} n(5-n) & (n\le 5) \\ -\dfrac{1}{2}(n-5)(n-9) & (n\ge 6)\end{cases}$$

이므로 $n\le 9$일 때, $S_n\ge 0$

8) [정답] 180

[해설]

조건 (가)에 의하여

$a_{2n-1}+a_{2n}=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n}a_k-\sum_{k=1}^{2(n-1)}a_k$

$=17n-17(n-1)=17\ (n\ge 2)$

조건 (나)에 의하여

$|a_{2n}-a_{2n-1}|=2(2n-1)-1=4n-3\ (n\ge 1)$

(i) $n=2$인 경우

$|a_4-a_3|=5$이고 $a_3+a_4=17$

$(a_3,\ a_4)=(6,\ 11)$ 또는 $(a_3,\ a_4)=(11,\ 6)$

조건 (나)에 의하여 $|a_3-a_2|=|a_3-9|=3$이므로 $a_3=6$, $a_4=11$

(ii) $n=3$인 경우

$|a_6-a_5|=9$이고 $a_5+a_6=17$

$(a_5,\ a_6)=(4,\ 13)$ 또는 $(a_5,\ a_6)=(13,\ 4)$

조건 (나)에 의하여 $|a_5-a_4|=|a_5-11|=7$이므로 $a_5=4$, $a_6=13$

(i), (ii)와 같은 방법을 반복하면

$a_8=15$, $a_{10}=17$, $\cdots$, $a_{20}=27$이므로

$\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_{2n}$의 값은 첫째항이 9이고 공차가 2인 등차수열의 첫째항부터 제10항까지의 합과 같다.

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{10}a_{2n}=\frac{10\times(18+9\times 2)}{2}=180$

9) [정답] ④

[해설]

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{n(n+1)}{2}$$

$b_n=b_{n-1}\times\dfrac{a_n}{a_n-1}$에서 양변을 b_{n-1}로 나누면

$$\frac{b_n}{b_{n-1}}=\frac{a_n}{a_n-1}=\frac{n(n+1)}{(n+2)(n-1)}$$

n에 2, 3, $\cdots$, 100까지 대입하여 변변 곱하면

$$\frac{b_{100}}{b_1}=\frac{2\cdot 3}{4\cdot 1}\times\frac{3\cdot 4}{5\cdot 2}\times\frac{4\cdot 5}{6\cdot 3}\times\cdots\times\frac{100\cdot 101}{102\cdot 99}$$

$$\therefore \frac{b_{100}}{1}=\frac{3}{1}\times\frac{100}{102}=\frac{50}{17}$$

10) [정답] ①

[해설]

$a_4=31$, $a_4=2a_3+1$이므로 $a_3=15$

$a_3=15$, $a_3=2a_2+1$이므로 $a_2=7$

11) [정답] ④

[해설]

$a_{n+1}=\sum_{k=1}^{n}ka_k$에서 $n=1$을 대입하면 $a_2=\sum_{k=1}^{1}ka_k=a_1$이므로

$a_2=2$

$n\ge 2$일 때 $a_n=\sum_{k=1}^{n-1}ka_k$이므로

$$a_{n+1}-a_n=\sum_{k=1}^{n}ka_k-\sum_{k=1}^{n-1}ka_k=na_n$$

그러므로 $a_{n+1}=(n+1)a_n$ (단, $n\ge 2$)

위 식에 $n=50$을 대입하면 $a_{51}=51a_{50}$이고 $a_{50}>0$이므로

$$\frac{a_{51}}{a_{50}}=51$$

따라서 $a_2+\frac{a_{51}}{a_{50}}=2+51=53$

[보충 설명]

2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n>0$ …… $(*)$

임을 수학적 귀납법을 이용하여 보일 수 있다.

$a_2=2$이고 $n\ge 2$일 때 $a_{n+1}=(n+1)a_n$이므로

(ⅰ) $n=2$일 때
$a_2=2>0$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ⅱ) 2이상의 자연수 k에 대하여 $n=k$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면 $a_k>0$
$n=k+1$일 때 $a_{k+1}=(k+1)a_k>0$이므로 $n=k+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의해 2 이상의 자연수 n에 대하여 $a_n>0$이다.

12) [정답] 162

[해설]

$S_{n+1}=a_{n+1}+S_n$ 이므로 $a_{n+1}S_n=a_n(a_{n+1}+S_n)$,

$(S_n-a_n)a_{n+1}=a_nS_n$

즉, $S_{n-1}a_{n+1}=a_nS_n\,(n\ge 2)$…… ㉠

$a_1=S_1=2$, $a_2=4$ 이므로 $S_2=a_1+a_2=6$

㉠에서 $a_{n+1}=\frac{a_nS_n}{S_{n-1}}$ …… ㉡

㉡에 $n=2$, 3, 4를 차례로 대입하면

$a_3=\frac{a_2S_2}{S_1}=\frac{4\times 6}{2}=12$ 에서 $S_3=S_2+a_3=6+12=18$

$a_4=\frac{a_3S_3}{S_2}=\frac{12\times 18}{6}=36$ 에서 $S_4=S_3+a_4=18+36=54$

$a_5=\frac{a_4S_4}{S_3}=\frac{36\times 54}{18}=108$

따라서 $S_5=S_4+a_5=162$

13) [정답] ①

[해설]

$a_1=1$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$(4-a_{n+1})(2+a_n)=8$

$8+4a_n-2a_{n+1}-a_na_{n+1}=8$

$\therefore a_na_{n+1}+2a_{n+1}-4a_n=0$

$\div a_na_{n+1}$을 하면 $1+\frac{2}{a_n}-\frac{4}{a_{n+1}}=0$

$\frac{4}{a_n}=b_n$라 하면 $1+\frac{b_n}{2}-b_{n+1}=0$

$b_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+1$

즉, $b_1=\frac{4}{a_1}=4$, $(b_{n+1}-2)=\frac{1}{2}(b_n-2)$이므로

$b_n-2=(4-2)\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, $b_n=2+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

$$\sum_{k=1}^{9}\frac{8}{a_k}=2\sum_{k=1}^{9}b_k$$

$$=2\left(18+\frac{2\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right\}}{1-\left(\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$=36+8\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^9\right\}$$

$$=44-\left(\frac{1}{2}\right)^6$$

따라서 구하는 정수부분은 43이다.

14) [정답] ④

[해설]

$a_{n+1}+a_n=(-1)^{n+1}\times n$에서

$a_{n+1}=-a_n+(-1)^{n+1}\times n$

이때, $a_1=12$이므로

$a_2=-a_1+1=-11$

$a_3=-a_2-2=9$

$a_4=-a_3+3=-6$

$a_5=-a_4-4=2$

$a_6=-a_5+5=3$

$a_7=-a_6-6=-9$

$a_8=-a_7+7=16$

따라서, $a_k>a_1$을 만족시키는 k의 최솟값은 8이다.

15) [정답] ⑤

[해설]

자연수 k에 대하여

(i) $n=2k-1$일 때, $a_{2k-1}+a_{2k}=2(2k-1)=4k-2$

이므로 $\sum_{n=1}^{22}a_n=\sum_{k=1}^{11}(a_{2k-1}+a_{2k})=\sum_{k=1}^{11}(4k-2)$

$=4\times\frac{11\times12}{2}-2\times11=242$

(ii) $n=2k$일 때, $a_{2k}+a_{2k+1}=2\times2k=4k$

이므로 $\sum_{n=2}^{21}a_n=\sum_{k=1}^{11}(a_{2k}+a_{2k+1})=\sum_{k=1}^{10}4k$

$=4\times\frac{11\times10}{2}=220$

따라서 $a_1+a_{22}=\sum_{n=1}^{22}a_n-\sum_{n=2}^{21}a_n=242-220=22$

[다른 풀이]

자연수 k에 대하여 $a_{2k}+a_{2k+1}=4k, a_{2k-1}+a_{2k}=4k-2$

이므로 $a_{2k+1}-a_{2k-1}=2$

즉, 수열 $\{a_{2k-1}\}$은 공차가 2인 등차수열이다.

그러므로 $a_{2k-1}=a_1+(k-1)\times2$ ⋯⋯ ㉠

㉠에 $k=11$을 대입하면 $a_{21}=a_1+20$ ⋯⋯ ㉡

모든 자연수 n에 대하여 $a_n+a_{n+1}=2n$이므로

$n=21$을 대입하면 $a_{21}+a_{22}=42$ ⋯⋯ ㉢

㉡을 ㉢에 대입하면 $(a_1+20)+a_{22}=42$

따라서 $a_1+a_{22}=22$

16) [정답] **217**

[해설]

$\log a_n+\log a_{n+1}=2n$에서 $a_na_{n+1}=10^{2n}$

$a_1a_2=10^2$, $a_2a_3=10^4$, $a_3a_4=10^6$에서

$$a_2=10^2\times\frac{1}{a_1},\ a_3=10^2\times a_1,\ a_4=10^4\times\frac{1}{a_1}$$

조건에서 $\{a_n\}$는 모든 항이 자연수이므로 a_2가 자연수가 되려면 a_1은 $100=2^2\times5^2$의 약수이므로 가능한 a_1은 총 9가지다.

(i) $a_1=1$일 때 $a_4=10^4\times1=10000$

(ii) $a_1=2$일 때 $a_4=10^4\times\frac{1}{2}=5000$

(iii) $a_1=2^2$일 때 $a_4=10^4\times\frac{1}{2^2}=2500$

(iv) $a_1=5$일 때 $a_4=10^4\times\frac{1}{5}=2000$

(v) $a_1=2\times5$일 때 $a_4=10^4\times\frac{1}{10}=1000$

(vi) $a_1=2^2\times5$일 때 $a_4=10^4\times\frac{1}{20}=500$

(vii) $a_1=5^2$일 때 $a_4=10^4\times\frac{1}{25}=400$

(viii) $a_1=2\times5^2$일 때 $a_4=10^4\times\frac{1}{50}=200$

(ix) $a_1=2^2\times5^2$일 때 $a_4=10^4\times\frac{1}{100}=100$

(i)~(ix)에서 만족하는 값을 모두 더하면 21700

즉, $p\times100=217\times100$에서 $p=217$

17) [정답] 33

[해설]

$a_1=9$, $a_2=3$이고

$a_{n+2}=a_{n+1}-a_n$에서 n에 1, 2, 3, ⋯을 차례로 대입하면

$n=1$일 때, $a_3=a_2-a_1=-6$

$n=2$일 때, $a_4=a_3-a_2=-9$

$n=3$일 때, $a_5=a_4-a_3=-3$

$n=4$일 때, $a_6=a_5-a_4=6$

$n=5$일 때, $a_7=a_6-a_5=9$

$n=6$일 때, $a_8=a_7-a_6=3$

⋮

즉, 수열 $\{a_n\}$의 각 항은 9, 3, -6, -9, -3, 6이 차례대로 반복되므로 모든 자연수 n에 대하여
$a_n = a_{n+6}$이 성립한다.
이때 9, 3, -6, -9, -3, 6 중에서 $|a_k|=3$을 만족시키는 항의 개수는 2이고 $100=6\times16+4$이므로 구하는 100 이하의 자연수 k의 개수는 $16\times2+1=33$

18) [정답] ③

[해설]

$a_1=1$

$a_2=2^1=2$

$a_3=\log_2\sqrt{2}=\frac{1}{2}$

$a_4=2^{\frac{1}{2}}=\sqrt{2}$

$a_5=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2}=1$

$\vdots$

$a_{12}=a_8=a_4=\sqrt{2}$, $a_{13}=a_9=a_5=a_1=1$

따라서 $a_{12}\times a_{13}=\sqrt{2}$

19) [정답] ⑤

[해설]

$a_1=4$, $a_1<6$이므로 $a_2=(a_1-1)^2=9$

$a_2\ge6$이므로 $a_3=a_2-3=6$

$a_3\ge6$이므로 $a_4=a_3-3=3$

$a_4<6$이므로 $a_5=(a_4-1)^2=4=a_1$

$a_5<6$이므로 $a_6=(a_5-1)^2=9=a_2$

$\vdots$

따라서 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+4}=a_n$을 만족시키므로 $a_{10}=a_6=a_2=9$

20) [정답] 7

[해설]
조건 (가)에서 $a_3=a_1-3, a_4=a_2+3,$

$a_5=a_3-3=a_1-6$, $a_6=a_4+3=a_2+6$이므로

$$\sum_{k=1}^{6}a_k=a_1+a_2+(a_1-3)+(a_2+3)+(a_1-6)+(a_2+6)$$

$$=3(a_1+a_2)$$

조건 (나)에서 $\sum_{k=1}^{32}a_k=5\sum_{k=1}^{6}a_k+a_1+a_2=16(a_1+a_2)$

따라서 $16(a_1+a_2)=112$이므로 $a_1+a_2=7$

21) [정답] ③

[해설]
조건 (가), (나)에 의해
$a_2=1-a_1$

$a_3=\frac{1}{a_2}=\frac{1}{1-a_1}$

$a_4=1-a_3=-\frac{a_1}{1-a_1}$

$a_5=\frac{1}{a_4}=1-\frac{1}{a_1}$

$a_6=1-a_5=\frac{1}{a_1}$

$a_7=\frac{1}{a_6}=a_1$

$a_8=1-a_7=1-a_1=a_2$

$\vdots$

그러므로 수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6}=a_n$을 만족시킨다.

$|a_n|-a_n=\begin{cases}0 & (a_n\ge0)\\ -2a_n & (a_n<0)\end{cases}$이므로

$\sum_{n=1}^{14}(|a_n|-a_n)=10$이 되기 위해서는

a_1, a_2, $\cdots$, a_{14}중에서 음수인 모든 항의 합이 -5이어야 한다.
(ⅰ) $0<a_1<1$일 때
$a_2>0$, $a_3>0$, $a_4<0$, $a_5<0$, $a_6>0$
이므로
$a_4+a_5+a_{10}+a_{11}=-5$
$a_4=s$라 하면

$a_4+a_5+a_{10}+a_{11}=s+\frac{1}{s}+s+\frac{1}{s}$

$=2s+\frac{2}{s}=-5$

$2s^2+5s+2=0$, $(2s+1)(s+2)=0$에서

$s=-\frac{1}{2}$ 또는 $s=-2$

$s=-\dfrac{a_1}{1-a_1}$이므로 $a_1=\dfrac{1}{3}$ 또는 $a_1=\dfrac{2}{3}$

(ii) $a_1>1$일 때

$a_2<0,\ a_3<0,\ a_4>0,\ a_5>0,\ a_6>0$

이므로

$a_2+a_3+a_8+a_9+a_{14}=-5$

$a_2=t$라 하면

$a_2+a_3+a_8+a_9+a_{14}=t+\dfrac{1}{t}+t+\dfrac{1}{t}+t$

$=3t+\dfrac{2}{t}=-5$

$3t^2+5t+2=0,\ (3t+2)(t+1)=0$에서

$t=-\dfrac{2}{3}$ 또는 $t=-1$

$t=1-a_1$ 이므로 $a_1=\dfrac{5}{3}$ 또는 $a_1=2$

따라서 모든 a_1의 값의 합은 $\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3}+2=\dfrac{14}{3}$

22) [정답] ⑤

[해설]

$a_1=1,\ b_1=-1$이므로

$a_2=1+(-1)=0,\ b_2=2\cos\dfrac{\pi}{3}=1$

$a_3=0+1=1,\ b_3=2\cos0=2$

$a_4=1+2=3,\ b_4=2\cos\dfrac{\pi}{3}=1$

$a_5=3+1=4,\ b_5=2\cos\pi=-2$

$a_6=4+(-2)=2,\ b_6=2\cos\dfrac{4}{3}\pi=-1$

$a_7=2+(-1)=1,\ b_7=2\cos\dfrac{2}{3}\pi=-1$

$a_8=1+(-1)=0,\ b_8=2\cos\dfrac{\pi}{3}=1$

$\vdots$

두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+6}=a_n$, $b_{n+6}=b_n$이 성립한다.

$2021=6\times336+5$이므로

$a_{2021}-b_{2021}=a_5-b_5=4-(-2)=6$

23) [정답] ⑤

[해설]

$a_2=\dfrac{1}{a_1}$,

$a_3=8a_2=\dfrac{8}{a_1}$,

$a_4=\dfrac{1}{a_3}=\dfrac{a_1}{8}$,

$a_5=8a_4=a_1$,

$\vdots$

따라서 $a_1=a_5=a_9=\cdots,\ a_2=a_6=a_{10}=\cdots,$

$a_3=a_7=a_{11}=\cdots$

$a_4=a_8=a_{12}=\cdots$

즉, 수열 $\{a_n\}$은 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4$가 반복되는 형태의 수열이다.

조건에서 $a_{12}=\dfrac{1}{2}$이므로 $a_{12}=a_4=\dfrac{a_1}{8}=\dfrac{1}{2}$을 만족한다.

즉, $a_1=4,\ a_4=\dfrac{1}{2}$이므로 $a_1+a_4=\dfrac{9}{2}$

24) [정답] 5

[해설]

(i) $a_1=1$일 때

$a_1\geq0$이므로 $a_2=a_1-2=-1$

$a_2<0$이므로 $a_3=a_2+5=4$

$a_3\geq0$이므로 $a_4=a_3-2=2$

$a_4\geq0$이므로 $a_5=a_4-2=0$

$a_5\geq0$이므로 $a_6=a_5-2=-2$

$a_6<0$이므로 $a_7=a_6+5=3$

$a_7\geq0$이므로 $a_8=a_7-2=1=a_1$

$a_8\geq0$이므로 $a_9=a_8-2=-1=a_2$

$\vdots$

그러므로 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고 $a_{15}=a_8=a_1=1$

(ii) $a_1=2$일 때

(i)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=a_1=2$

(iii) $a_1=3$일 때

(i)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=a_1=3$

(ⅳ) $a_1=4$일 때

(ⅰ)과 같은 방법으로 구하면 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=a_1=4$

(ⅴ) $a_1=5$일 때

$a_1\geq 0$이므로 $a_2=a_1-2=3$

$a_2\geq 0$이므로 $a_3=a_2-2=1$

$a_3\geq 0$이므로 $a_4=a_3-2=-1$

$a_4<0$이므로 $a_5=a_4+5=4$

$a_5\geq 0$이므로 $a_6=a_5-2=2$

$a_6\geq 0$이므로 $a_7=a_6-2=-2$

$a_7\geq 0$이므로 $a_8=a_7-2=-2$

$a_8<0$이므로 $a_9=a_8+5=3=a_2$

$a_9\geq 0$이므로 $a_{10}=a_9-2=1=a_3$

⋮

그러므로 수열 $\{a_n\}$이 2이상의 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+7}=a_n$을 만족시키고

$a_{15}=a_8=-2<0$

따라서 $a_{15}<0$이 되도록 하는 a_1의 최솟값은 5이다.

25) [정답] ①

[해설]

$a_1=1$이므로 $a_2=2$

$a_2=2$이므로 $a_3=4$

$a_3=4$이므로 $a_4=8$

$a_4=8$이므로 $a_5=1$

$a_5=1$이므로 $a_6=2$

$a_6=2$이므로 $a_7=4$

$a_7=4$이므로 $a_8=8$

따라서

$\sum_{k=1}^{8} a_k=2\times(1+2+4+8)$

$=2\times 15$

$=30$

26) [정답] ③

[해설]

$a_1=\frac{1}{2}$, $a_2=-\frac{1}{a_1-1}=2$,

$a_3=-\frac{1}{a_2-1}=-1$,

$a_4=-\frac{1}{a_3-1}=\frac{1}{2}=a_1$,

$a_5=-\frac{1}{a_4-1}=2=a_2$, ⋯

수열 $\{a_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$a_{n+3}=a_n$, $a_{3n-2}+a_{3n-1}+a_{3n}=\frac{3}{2}$이므로

$S_{3n}=\frac{3}{2}n$,

$S_{3n+1}=S_{3n}+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}n+\frac{1}{2}$,

$S_{3n+2}=S_{3n}+\frac{1}{2}+2=\frac{3}{2}n+\frac{5}{2}$

$11=\frac{3}{2}\times 7+\frac{1}{2}=S_{3\times 7}+\frac{1}{2}=S_{3\times 7+1}=S_{22}$

따라서 $m=22$

27) [정답] ②

[해설]

(ⅰ) $1\leq n\leq 10$인 경우

$a_1=20$, $a_{n+1}=a_n-2$이므로 $a_n=-2n+22$

$\sum_{n=1}^{10} a_n=\sum_{n=1}^{10}(-2n+22)=110$

(ⅱ) $11\leq n\leq 30$인 경우

$a_{10}=2$이므로 $a_n=\begin{cases} 0 & (n\text{이 홀수인 경우}) \\ -2 & (n\text{이 짝수인 경우}) \end{cases}$

$\sum_{n=11}^{30} a_n=(-2)\times 10=-20$

(ⅰ), (ⅱ)에서 $\sum_{n=1}^{30} a_n=110+(-20)=90$

28) [정답] ②

[해설]

$a_1=\frac{1}{2}$이므로

$a_2=-2\times\frac{1}{2}+1=0$

$a_3=-2\times 0+1=1$

$a_4=-2\times 1+1=-1$

$a_5=-1+1=0$

⋮

이때, $a_{n+3}=a_n$ $(n\geq 2)$이므로

$a_{10}=a_7=a_4=-1$

$a_{20}=a_{17}=a_{14}=\cdots=a_2=0$

따라서 $a_{10}+a_{20}=-1+0=-1$

29) [정답] **139**

[해설]

$n=1$일 때, $a_2+3a_1=-1$이므로 $a_2=-4$

$n=2$일 때, $a_3+3a_2=2$이므로 $a_3=14$

$n=3$일 때, $a_4+3a_3=-3$이므로 $a_4=-45$

$n=4$일 때, $a_5+3a_4=4$이므로 $a_5=139$

30) [정답] ②

[해설]

모든 자연수 n에 대하여 $a_{2n-1}+a_{2n}=2a_n$이므로

$n=1$일 때, $a_1+a_2=2a_1$

$n=2$일 때, $a_3+a_4=2a_2$

$\vdots$

$n=n-1$일 때, $a_{2n-1}+a_{2n}=2a_n$

변변히 모두 더하면 $S_{2n}=2S_n$

그런데 조건에서 $a_1=\frac{3}{2}$이므로

$S_2=2S_1=3$

따라서 $S_4=2S_2=6$, $S_8=2S_4=12$

$\therefore S_{16}=2S_8=24$

31) [정답] ①

[해설]

(가), (나)에서

$a_{2n+1}=-a_n+3a_{n+1}$ $\cdots\cdots$ ㉠

$a_{2n+2}=a_n-a_{n+1}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠+㉡을 하면 $a_{2n+1}+a_{2n+2}=2a_{n+1}$

$n=1$일 때, $a_3+a_4=2a_2$

$n=2$일 때, $a_5+a_6=2a_3$

$\vdots$

$n=n-1$일 때, $a_{2n-1}+a_{2n}=2a_n$

변변히 모두 더하면

$S_{2n}-a_1-a_2=2(S_n-a_1)$

즉, $S_{2n}=2S_n+1$

그런데 조건에서 $a_1=1$, $a_2=2$이므로

$S_2=1+2=3$

따라서 $S_4=2S_2+1=7$, $S_8=2S_4+1=15$

$\therefore S_{16}=2S_8+1=31$

32) [정답] ③

[해설]

$a_1=1$이므로

$a_4=a_1+1=2$

$a_4=2$이므로

$a_{11}=2a_4+1=2\times2+1=5$

$a_{12}=-a_4+2=-2+2=0$

$a_{13}=a_4+1=2+1=3$

따라서

$a_{11}+a_{12}+a_{13}=5+0+3=8$

33) [정답] ③

[해설]

조건 (가)에서 $a_2=a_2\times a_1+1\cdots\cdots$ ㉠

$a_7=2$이므로 조건 (나)에서

$2=a_7=a_2\times a_3-2$

$=a_2\times(a_2\times a_1-2)-2$

$=a_2\times\{(a_2-1)-2\}-2$

(㉠에서 $a_2\times a_1=a_2-1$ 이므로)

$=a_2^2-3a_2-2$

즉, $a_2{}^2-3a_2-4=0$이므로 $(a_2+1)(a_2-4)=0$

따라서 $a_2=-1$ 또는 $a_2=4$

(i) $a_2=-1$일 때

㉠에서 $a_1=2$이므로 $0<a_1<1$이라는 조건에 모순이다.

(ii) $a_2=4$ 일 때

㉠에서 $a_1 = \dfrac{3}{4}$이므로 $0 < a_1 < 1$이라는 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a_1 = \dfrac{3}{4}$, $a_2 = 4$이므로 조건 (나)에서

$a_3 = a_2 \times a_1 - 2 = 4 \times \dfrac{3}{4} - 2 = 1$

이때 조건 (가), (나)에서

$a_{25} = a_2 \times a_{12} - 2 = 4a_{12} - 2$

$a_{12} = a_2 \times a_6 + 1 = 4a_6 + 1$

$a_6 = a_2 \times a_3 + 1 = 4 \times 1 + 1 = 5$

이므로 $a_{12} = 4 \times 5 + 1 = 21$

따라서 $a_{25} = 4 \times 21 - 2 = 82$

34) [정답] ②

[해설]

조건 (가)에서

$a_4 = (a_2)^2 + 1$,

$a_8 = a_2 \times a_4 + 1 = a_2 \times \{(a_2)^2 + 1\} + 1 = (a_2)^3 + a_2 + 1$

한편, 조건 (나)에서 $a_3 = a_2 \times a_1 - 2$ ……㉠

조건 (가)에서 $a_2 = a_2 \times a_1 + 1$…… ㉡

㉠, ㉡에서 $a_3 + 2 = a_2 - 1$, $a_3 = a_2 - 3$

또 조건 (나)에서

$a_7 = a_2 \times a_3 - 2 = a_2 \times (a_2 - 3) - 2 = (a_2)^2 - 3a_2 - 2$

$a_{15} = a_2 \times a_7 - 2 = a_2 \times \{(a_2)^2 - 3a_2 - 2\} - 2$

$= (a_2)^3 - 3(a_2)^2 - 2a_2 - 2$

이때 $a_8 - a_{15} = 63$이므로

$\{(a_2)^3 + a_2 + 1\} - \{(a_2)^3 - 3(a_2)^2 - 2a_2 - 2\} = 63$

$(a_2)^2 + a_2 - 20 = 0$, $(a_2 + 5)(a_2 - 4) = 0$

$a_2 = -5$ 또는 $a_2 = 4$

(i) $a_2 = -5$일 때

㉡에서 $a_1 = \dfrac{6}{5}$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ii) $a_2 = 4$일 때

㉡에서 $a_1 = \dfrac{3}{4}$이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(i), (ii)에서 $a_1 = \dfrac{3}{4}$, $a_2 = 4$

따라서 $a_8 = 4^3 + 4 + 1 = 69$이므로 $\dfrac{a_8}{a_1} = \dfrac{69}{\frac{3}{4}} = 92$

35) [정답] ④

[해설]

수열의 귀납적 정의에 따라 각 항을 구하면

$a_1 = 7$, $a_2 = \dfrac{7+3}{2} = 5$, $a_3 = \dfrac{5+3}{2} = 4$,

$a_4 = 4 + 3 = 7$, $a_5 = \dfrac{7+3}{2} = 5$, $a_6 = \dfrac{5+3}{2} = 4$

$a_7 = 4 + 6 = 10$, $a_8 = 10 + 7 = 17$

36) [정답] ②

[해설]

주어진 식 $a_{n+2} = \begin{cases} 2a_n + a_{n+1} & (a_n \le a_{n+1}) \\ a_n + a_{n+1} & (a_n > a_{n+1}) \end{cases}$에 $n = 3$을 대입하면

$a_5 = \begin{cases} 2a_3 + a_4 & (a_4 \ge 2) \\ a_3 + a_4 & (a_4 < 2) \end{cases}$

그런데 $a_3 = 2$이므로

$a_5 = \begin{cases} a_4 + 4 & (a_4 \ge 2) \\ a_4 + 2 & (a_4 < 2) \end{cases}$

따라서 위 식에서 어떤 경우에도 $a_4 \le a_5$이므로

$a_6 = 2a_4 + a_5$

(i) $a_4 \ge 2$인 경우

$a_6 = 2a_4 + (a_4 + 4) = 3a_4 + 4 = 19$

$\therefore a_4 = 5$

준 식에 $n = 2$를 대입하면

$a_4 = \begin{cases} 2a_2 + 2 & (a_2 \le 2) \\ a_2 + 2 & (a_2 > 2) \end{cases}$ $(\because a_3 = 2)$

㉠ $2a_2 + 2 = 5$일 때, $a_2 = \dfrac{3}{2}$

$a_3 = \begin{cases} 2a_1 + a_2 = 2 & (a_1 \le a_2) \\ a_1 + a_2 = 2 & (a_1 > a_2) \end{cases}$

즉, $2a_1 + \dfrac{3}{2} = 2$ (단, $a_1 \le a_2$) 또는

$a_1 + \dfrac{3}{2} = 2$ (단, $a_1 > a_2$)를 만족하는 a_1은

$a_1 = \dfrac{1}{4}$

㉡ $a_2 + 2 = 5$일 때, $a_2 = 3$

$a_3 = \begin{cases} 2a_1 + a_2 = 2 & (a_1 \le a_2) \\ a_1 + a_2 = 2 & (a_1 > a_2) \end{cases}$

즉, $2a_1+3=2$ (단, $a_1 \le a_2$) 또는

$a_1+3=2$ (단, $a_1 > a_2$)를 만족하는 a_1은

$$a_1=-\frac{1}{2}$$

(ii) $a_4<2$인 경우

$$a_6=2a_4+(a_4+2)=3a_4+2=19$$

$a_4=\frac{17}{3}$인데 $a_4<2$이므로 성립하지 않는다.

(i), (ii)에서 만족하는 a_1은 $a_1=\frac{1}{4}$, $-\frac{1}{2}$이므로 모든

a값의 합은 $\frac{1}{4}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

37) [정답] **79**

[해설]

두 조건 (가)와 (나)로부터 $a_{2n}+a_{2n+1}=2b_n+1$

두 조건 (다)와 (라)로부터 $b_{2n}+b_{2n+1}=2a_n+1$

$$\sum_{n=1}^{63}a_n-\sum_{n=1}^{31}b_n$$

$$=a_1+\sum_{n=1}^{31}(a_{2n}+a_{2n+1})-\sum_{n=1}^{31}b_n$$

$$=a_1+\sum_{n=1}^{31}(2b_n+1)-\sum_{n=1}^{31}b_n$$

$$=a_1+\sum_{n=1}^{31}b_n+31$$

$$=a_1+b_1+\sum_{n=1}^{15}(b_{2n}+b_{2n+1})+31$$

$$=a_1+b_1+\sum_{n=1}^{15}(2a_n+1)+31$$

$$=a_1+b_1+2\sum_{n=1}^{15}a_n+15+31$$

$$=a_1+b_1+2a_1+2\sum_{n=1}^{7}(2b_n+1)+46$$

$$=a_1+b_1+2a_1+4\sum_{n=1}^{7}b_n+14+46$$

$$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+4\sum_{n=1}^{3}(2a_n+1)+60$$

$$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+8\sum_{n=1}^{3}a_n+12+60$$

$$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+8a_1+8(2b_1+1)+72$$

$$=a_1+b_1+2a_1+4b_1+8a_1+16b_1+8+72$$

$$=11a_1+21b_1+80=155 \quad \cdots\cdots ㉠$$

조건 (가)와 (다)에서

$$a_{4n}=b_{2n}+2=(3a_n-2)+2=3a_n,$$

$$b_{4n}=3a_{2n}-2=3(b_n+2)-2=3b_n+4$$

이므로

$$a_{48}=3a_{12}=9a_3=9(b_1-1)=9,\ b_1=2$$

㉠에 의하여 $a_1=3$

따라서 $b_{32}=3b_8+4=9b_2+16=9(3a_1-2)+16=79$

38) [정답] ①

[해설]

$$a_8=\log_2 a_7=5,\ a_7=2^5=32$$

$$a_7=2^{a_6+1}=2^5,\ a_6=4$$

따라서 $a_6+a_7=4+32=36$

39) [정답] ①

[해설]

$$\begin{cases} a_2=a_1a_3+1 & \cdots\cdots ㉠ \\ a_3=2a_1-2a_2 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$$

㉡을 ㉠에 대입하면 $a_2=a_1(2a_1-a_2)+1$

$$\therefore\ a_2=\frac{2a_1^{\ 2}+1}{a_1+1}=2(a_1-1)+\frac{3}{a_1+1}$$

이때 a_1+1이 3의 약수가 되어야 하므로

$$\therefore\ a_1+1=-3,\ -1,\ 1,\ 3$$

따라서 a_1의 최솟값 m은 $m=-4$

따라서 $a_2=-11$, $a_3=3$이므로

$$\begin{aligned} a_9&=2a_4-a_2 \\ &=2(a_2a_3+1)-a_2 \\ &=2\{(-11)\times 3+1\}+11 \\ &=-53 \end{aligned}$$

40) [정답] ④

[해설]

$a_1=10$이므로 $a_2=5-\frac{10}{10}=4$

$a_3=5-\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$

$a_4=-2\times\frac{5}{2}+3=-2$

$a_5=5-\frac{10}{-2}=5+5=10$

$\vdots$

$a_9=a_5=a_1=10,\ a_{12}=a_8=a_4=-2$

따라서 $a_9+a_{12}=8$

41) [정답] ③

[해설]

주어진 조건에 의하면 $n\geq 5$일 때 a_n은 한가지 이다

따라서 $a_4,\ a_3,\ a_2,\ a_1$의 값만 확인한다.

$a_n<0$이면 $a_{n+1}=-2a_n+3>0$이므로

수열 $\{a_n\}$의 값이 연속하여 음수인 경우는 없다.

따라서 최댓값은 $a_{n+1}=a_n-6$일 때

즉 $a_4=11,\ a_3=17,\ a_2=23,\ a_1=29$ 일 때이다.

최솟값은 (나)의 관계식이 번갈아 나오는 경우

즉 $a_4=-1,\ a_3=5,\ a_2=-1,\ a_1=5$일 때이다.

$\therefore M-m=(11+17+23+29)-(-1+5-1+5)$

$=80-8=72$

42) [정답] ①

[해설]

먼저 a_5의 값을 구해보자.

(ⅰ) $-1\leq a_5<-\frac{1}{2}$일 때, $a_6=-2a_5-2$이므로

$a_5+a_6=0$에서 $-a_5-2=0$

즉, $a_5=-2$이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $-\frac{1}{2}\leq a_5\leq\frac{1}{2}$일 때, $a_6=2a_5$이므로 $a_5+a_6=0$에서

$3a_5=0$ 즉, $a_5=0$

(ⅲ) $\frac{1}{2}<a_5\leq 1$일 때, $a_6=-2a_5+2$이므로 $a_5+a_6=0$에서

$-a_5+2=0$ 즉, $a_5=2$이고 이것은 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에서 $a_5=0$

이때 $a_4=-1$ 또는 $a_4=0$ 또는 $a_4=1$이다.

한편 $0\leq a_{n+1}\leq 1$일 때,

$a_n=\frac{1}{2}a_{n+1}$ 또는 $a_n=1-\frac{1}{2}a_{n+1}$

(ⅰ) $a_4=-1$인 경우

$a_3<0,\ a_2<0,\ a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_4=0$인 경우

㉠ $a_3=-1$인 경우

$a_2<0,\ a_1<0$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

㉡ $a_3=0$인 경우

$a_2=0$ 또는 $a_2=1$이고,

$a_2=0$일 때 $a_1=1$이면 조건을 만족시키고,

$a_2=1$일 때, $a_1=\frac{1}{2}$이고 이 경우도 조건을 만족시킨다.

㉢ $a_3=1$인 경우

$a_2=\frac{1}{2}$이고 이때 $a_1=\frac{1}{4}$ 또는 $a_1=\frac{3}{4}$이며,

이것은 조건을 만족시킨다.

(ⅲ) $a_4=1$인 경우

$a_3=\frac{1}{2}$이고 이때 $a_2=\frac{1}{4}$ 또는 $a_2=\frac{3}{4}$

㉠ $a_2=\frac{1}{4}$인 경우

$a_1=\frac{1}{8}$ 또는 $a_1=\frac{7}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

㉡ $a_2=\frac{3}{4}$인 경우

$a_1=\frac{3}{8}$ 또는 $a_1=\frac{5}{8}$이고 이것은 조건을 만족시킨다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 a_1의 값의 합은

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+\frac{1}{8}+\frac{7}{8}+\frac{3}{8}+\frac{5}{8}=\frac{9}{2}$$

43) [정답] 64

[해설]

$a_7=3a_3=3\times 3a_1=9$이므로 $a_k=64$

$a_{2n}=2a_n$에서

$a_2=2a_1=2$

$a_4=2a_2=2^2$

$a_8=2a_4=2^3$

$\vdots$

따라서 $a_{2^n}=2^n$이므로 $a_k=64=2^6$에서

$k=2^6=64$

44) [정답] ③

[해설]
조건 (가)에 의하여

$\sum_{n=1}^{8} a_n = (a_1+a_5)+(a_2+a_6)+(a_3+a_7)+(a_4+a_8)$

$= 15\times 4 = 60$

$\sum_{n=1}^{4} a_n = 6$이므로 $\sum_{n=5}^{8} a_n = 54$

조건 (나)에 의하여

$a_6 = a_5 + 5$

$a_7 = a_6 + 6 = a_5 + 11$

$a_8 = a_7 + 7 = a_5 + 18$

따라서 $\sum_{n=5}^{8} a_n = 4a_5 + 34 = 54$에서 $a_5 = 5$

45) [정답] ⑤

[해설]
(i) a_6이 3의 배수인 경우

$a_7 = 40$이므로 $\frac{a_6}{3} = a_7$

$a_6 = 3a_7 = 3\times 40 = 120$

$a_7 = 40$이 3의 배수가 아니므로

$a_8 = a_6 + a_7 = 120 + 40 = 160$

$a_8 = 160$이 3의 배수가 아니므로

$a_9 = a_7 + a_8 = 40 + 160 = 200$

(ii) $a_6 = 3k-2$(k는 자연수)인 경우

$a_5 + a_6 = a_7$에서

$a_5 = a_7 - a_6 = 40 - (3k-2) = 3(14-k)$

a_5는 자연수이므로 $3(14-k) > 0$에서 $k < 14$

한편, a_5는 3의 배수이므로

$a_6 = \frac{a_5}{3} = 14 - k$

즉, $3k - 2 = 14 - k$에서 $k = 4$

따라서 $a_6 = 3\times 4 - 2 = 10$이므로

$a_8 = a_6 + a_7 = 10 + 40 = 50$

$a_8 = 50$이 3의 배수가 아니므로

$a_9 = a_7 + a_8 = 40 + 50 = 90$

(iii) $a_6 = 3k-1$(k는 자연수)인 경우

$a_5 + a_6 = a_7$에서

$a_5 = a_7 - a_6 = 40 - (3k-1) = 41 - 3k$

a_5는 자연수이므로 $41 - 3k > 0$에서

$k < \frac{41}{3}$ …… ㉠

한편, a_5는 3의 배수가 아니므로

$a_4 + a_5 = a_6$에서

$a_4 = a_6 - a_5 = (3k-1) - (41-3k) = 3(2k-14)$

a_4가 자연수이므로 $3(2k-14) > 0$에서

$k > 7$ …… ㉡

㉠, ㉡에서 $7 < k < \frac{41}{3}$

한편, a_4는 3의 배수이므로

$a_5 = \frac{a_4}{3} = 2k - 14$

즉, $41 - 3k = \frac{3(2k-14)}{3}$에서 $k = 11$

따라서 $a_6 = 3\times 11 - 1 = 32$이므로

$a_8 = a_6 + a_7 = 32 + 40 = 72$

$a_8 = 72$가 3의 배수이므로

$a_9 = \frac{a_8}{3} = \frac{72}{3} = 24$

이상에서 a_9의 최댓값은 $M = 200$이고 최솟값은 $m = 24$이다.

$\therefore\ M + m = 200 + 24 = 224$

46) [정답] ②

[해설]
$a_1 = 0$이므로

$a_2 = a_1 + \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+1}$

$a_2 > 0$이므로

$a_3 = a_2 - \frac{1}{k} = \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k}$

$a_3 < 0$이므로

$a_4 = a_3 + \frac{1}{k+1} = \frac{2}{k+1} - \frac{1}{k} = \frac{k-1}{k(k+1)}$

이때 $k = 1$이면 $a_4 = 0$이므로 $n = 3m - 2$ (m은 자연수)일 때 $a_n = 0$이다.

$a_{22} = 0$이므로 $k = 1$은 조건을 만족시킨다.

한편 $k > 1$이면 $a_4 > 0$이므로

$a_5 = a_4 - \frac{1}{k} = \frac{2}{k+1} - \frac{2}{k}$

$a_5 < 0$이므로

$a_6 = a_5 + \frac{1}{k+1} = \frac{3}{k+1} - \frac{2}{k} = \frac{k-2}{k(k+1)}$

이때 $k = 2$이면 $a_6 = 0$이므로 $n = 5m - 4$ (m은 자연수)일 때 $a_n = 0$이다. 즉,

$a_{22} \neq 0$이므로 $k=2$는 조건을 만족시키지 않는다.

한편 $k>2$이면 $a_6>0$이므로

$$a_7 = a_6 - \frac{1}{k} = \frac{3}{k+1} - \frac{3}{k}$$

$a_7 < 0$이므로

$$a_8 = \frac{4}{k+1} - \frac{3}{k} = \frac{k-3}{k(k+1)}$$

마찬가지 방법으로 계속하면

$k=3$이면 $a_8=0$이고 이때 $a_{22}=0$이다.

$k=4$이면 $a_{10}=0$이고 이때 $a_{22}\neq 0$이다.

$5 \le k \le 9$이면 $a_{22} \neq 0$이다.

$k=10$이면 $a_{22}=0$이다.

$k \ge 11$이면 $a_{22} \neq 0$이다.

따라서 조건을 만족시키는 모든 k의 값은

1, 3, 10

이므로 구하는 모든 k의 값의 합은

$1+3+10=14$

47) [정답] ⑤

[해설]

점 P_n의 좌표를 $(a_n,\ 0)$, 점 Q_n의 좌표는 $\left(a_n,\ \sqrt{3a_n}\right)$라 하면

$\overline{\mathrm{OP}_n} : \overline{\mathrm{P}_n Q_n} = \overline{\mathrm{P}_n Q_n} : \overline{\mathrm{P}_n P_{n+1}}$에서

$$a_n : \sqrt{3a_n} = \sqrt{3a_n} : \overline{\mathrm{P}_n P_{n+1}}$$

$$\therefore \overline{\mathrm{P}_n P_{n+1}} = \boxed{3}$$

$a_{n+1} = a_n + \overline{\mathrm{P}_n P_{n+1}}$이므로 $a_{n+1} = a_n + 3$

즉, 수열 $\{a_n\}$이 등차수열이므로 일반항 a_n은

$$a_n = 1 + 3(n-1) = 3n-2 \quad \cdots\cdots ㉠$$

$$A_n = \frac{1}{2} \times \overline{\mathrm{OP}_{n+1}} \times \overline{\mathrm{P}_n Q_n}$$

$$= \frac{1}{2} \times a_{n+1} \times \sqrt{3a_n}$$

$$= \frac{1}{2} \times \boxed{(3n+1)} \times \sqrt{3(3n-2)}\ (\because ㉠)$$

$$= \frac{1}{2} \times \boxed{(3n+1)} \times \sqrt{9n-6}$$

즉, $p=3$, $f(n)=3n+1$이므로 $p+f(8)=3+25=28$

48) [정답] ⑤

[해설]

$\frac{A_3}{A_1} = 16$ 이므로 $\frac{2^{a_3+d} - 2^{a_3}}{2^{1+d} - 2} = \frac{2^{1+3d} - 2^{1+2d}}{2^{1+d} - 2^1} = 16$ 에서 $d=2$

$2^x = kx+1$ 에서 $2^2 = 2k+1$, $k = \frac{3}{2}$

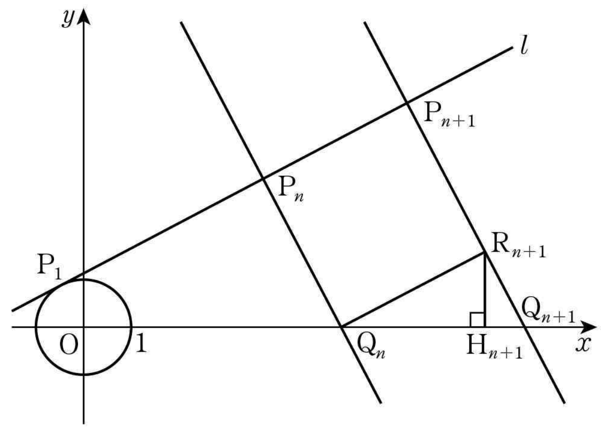
$a_1 = 1$ 이고, $d=2$ 이므로 $a_n = 2n-1$ 이므로 $f(2)=3$

$A_n = \frac{1}{2} \times 2 \times (2^{2n+1} - 2^{2n-1}) = 3 \times 2^{2n-1}$ 이므로 $g(4) = 3 \times 2^7$

$$p + \frac{g(4)}{f(2)} = 2 + \frac{3 \times 2^7}{3} = 130$$

49) [정답] ⑤

[해설]



점 R_{n+1}에서 x축에 내린 수선의 발을 H_{n+1}이라 하면 직선 l의 기울기가 $\frac{1}{2}$이므로 직선 $\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_{n+1}$의 기울기는 $\frac{1}{2}$이다. 즉,

$\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{H}_{n+1}} : \overline{\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}} = 2:1$ 직각삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}$과 직각삼각형 $\mathrm{Q}_n\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{R}_{n+1}$은 서로 닮음이므로

$\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_{n+1}} : \overline{\mathrm{R}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}} = 2:1$에서

$$\overline{\mathrm{R}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}} = \frac{1}{2} \times \overline{Q_n\mathrm{R}_{n+1}}$$

$\overline{\mathrm{Q}_n\mathrm{R}_{n+1}} = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}$ 이므로 $\boxed{(가)} = \frac{1}{2}$

$\overline{\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{Q}_{n+1}} = (1 + \boxed{(가)}) \times \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \frac{3}{2} \times \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$이고

$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1} = 1$이므로 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n$의 길이는 첫째항이 1, 공비가 $\frac{3}{2}$인 등비수열이다. 즉, $\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

그러므로 $\boxed{(나)} = \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$

$\overline{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}} = \overline{\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n}$ 이므로

$$\overline{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_n} = \sum_{k=1}^{n-1} \overline{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}} = \frac{1 \times \left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right\}}{\frac{3}{2} - 1} = 2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right\}$$

그러므로 $\boxed{(다)} = 2\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} - 1\right\}$

따라서 $p=\frac{1}{2}$, $f(n)=\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}$, $g(n)=\left\{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1\right\}$

이므로 $f(6p)+g(8p)=f(3)+g(4)=\frac{9}{4}+\frac{19}{4}=7$

50) [정답] ①

[해설]

점 A의 x좌표는 64이고 점 Q_1의 x좌표는 x_1이다.

이때 두 점 A와 P_1의 y좌표가 같으므로

$2^{64}=16^{x_1}$에서

$2^{64}=2^{4x_1}$

$4x_1=64$에서

$x_1=16$

같은 방법으로 모든 자연수 n에 대하여

두 점 P_n, Q_n의 x좌표는 x_n으로 서로

같고, 두 점 Q_n, P_{n+1}의 y좌표는 같으므로

$2^{x_n}=16^{x_{n+1}}$

즉,

$2^{x_n}=2^{4x_{n+1}}$

이므로

$x_{n+1}=\frac{1}{4}x_n$

따라서 수열 $\{x_n\}$은 첫째항이 16, 공비 가 $\frac{1}{4}$인

등비수열이므로

$x_n=16\times\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=2^4\times 2^{-2n+2}=2^{6-2n}$

한편,

$x_n<\frac{1}{k}$을 만족시키는 n의 최솟값이 6이므로

$x_5\ge\frac{1}{k}$이고 $x_6<\frac{1}{k}$

이어야 한다.

$x_5\ge\frac{1}{k}$에서 $2^{-4}\ge\frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{16}\ge\frac{1}{k}$에서 $k\ge 16\cdots$㉠

$x_6<\frac{1}{k}$에서 $2^{-6}<\frac{1}{k}$,

즉 $\frac{1}{64}<\frac{1}{k}$에서 $k<64\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $16\le k<64$이므로 자연수 k

의 개수는 $64-16=48$이다.

51) [정답] ①

[해설]

주어진 식 $(*)$에 의하여

$$nS_n=\log_2(n+1)+\sum_{k=1}^{n-1}S_k\ (n\ge 2)\qquad\cdots\cdots ㉠$$

이다. $(*)$에서 ㉠을 빼서 정리하면

$(n+1)S_{n+1}-nS_n$

$=\log_2(n+2)-\log_2(n+1)+\sum_{k=1}^{n}S_k-\sum_{k=1}^{n-1}S_k\ (n\ge 2)$

이므로 $\left(\boxed{(n+1)}\right)\times a_{n+1}=\log_2\frac{n+2}{n+1}\ (n\ge 2)$이다.

$a_1=1=\log_2 2$이고, $2S_2=\log_2 3+S_1=\log_2 3+a_1$이므로

$2a_2=\log_2\frac{3}{2}$

모든 자연수 n에 대하여 $na_n=\boxed{\log_2\frac{n+1}{n}}$이다. 따라서

$\sum_{k=1}^{n}ka_k=\sum_{k=1}^{n}\log_2\frac{k+1}{k}$

$=\log_2\frac{2}{1}+\log_2\frac{3}{2}+\cdots+\log_2\frac{n+1}{n}$

$=\log_2\left(\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}\times\cdots\times\frac{n+1}{n}\right)$

$=\boxed{\log_2(n+1)}$

이다.

$f(n)=n+1$, $g(n)=\log_2\frac{n+1}{n}$, $h(n)=\log_2(n+1)$

따라서 $f(8)-g(8)+h(8)=9-\log_2\frac{9}{8}+\log_2 9=12$

52) [정답] ③

[해설]

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right)a_k$라 하자.

(ⅰ) $T_1=\left(1-\frac{1}{2}\right)a_1=1$이므로 $a_1=\boxed{2}$이다.

(ⅱ) 2 이상의 자연수 n에 대하여

$T_n=n^2$에서

$T_n-T_{n-1}=n^2-(n-1)^2=2n-1$이고

$T_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{n+1}\right)a_k$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{n+1}$

$=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{k}-\frac{1}{\boxed{n+1}}\times\sum_{k=1}^{n}a_k$

$$T_n - T_{n-1} = \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n-1} \frac{a_k}{k} - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} a_k\right)$$

$$= \frac{a_n}{n} - \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$= -\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} a_k + \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right)\sum_{k=1}^{n} a_k$$

$$= \frac{1}{\boxed{n(n+1)}} \times \sum_{k=1}^{n} a_k$$

$\dfrac{1}{\boxed{n(n+1)}} \times \sum_{k=1}^{n} a_k = 2n-1$이므로

$\sum_{k=1}^{n} a_k = (2n-1)\times(\boxed{n(n+1)})$이다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\sum_{k=1}^{n} a_k = (2n-1)\times(\boxed{n(n+1)})$이다.

따라서 $p=2,\ f(n)=n+1,\ g(n)=n(n+1)$이므로

$f(2p)\times g(3p) = f(4)\times g(6) = 5\times 42 = 210$

53) [정답] ①

[해설]

$n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$$= \sum_{k=1}^{n} \frac{3S_k}{k+2} - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{3S_k}{k+2} = \frac{3S_n}{n+2}$$

이므로 $3S_n = (n+2)\times a_n\ (n \geq 2)$이다.

$S_1 = a_1$에서 $3S_1 = 3a_1$이므로

$3S_n = (n+2)\times a_n (n \geq 1)$ 이다.

$3a_n = 3(S_n - S_{n-1})$

$\quad = (n+2)\times a_n - (\boxed{n+1})\times a_{n-1}\ (n \geq 2)$

$(n-1)\times a_n = (n+1)\times a_{n-1}$이고 $a_1 \neq 0$이므로

모든 자연수 n에 대하여 $a_n \neq 0$

$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \boxed{\dfrac{n+1}{n-1}}\ (n \geq 2)$

따라서

$$a_{10} = a_1 \times \frac{a_2}{a_1} \times \frac{a_3}{a_2} \times \frac{a_4}{a_3} \times \cdots \times \frac{a_9}{a_8} \times \frac{a_{10}}{a_9}$$

$$= 2 \times \frac{3}{1} \times \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} \times \cdots \times \frac{10}{8} \times \frac{11}{9} = \boxed{110}$$

$f(n) = n+1,\ g(n) = \dfrac{n+1}{n-1},\ p = 110$

따라서 $\dfrac{f(p)}{g(p)} = \dfrac{111}{\frac{111}{109}} = 109$

54) [정답] ③

[해설]

다음은 모든 자연수 k에 대하여

$$\sum_{k=1}^{2n} (-1)^{k-1}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \cdots\cdots (*)$$

이 성립함을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

$(*)$에서 $S_n = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^{k-1}\dfrac{1}{k}$, $T_n = \sum_{k=1}^{n}\dfrac{1}{n+k}$이라 하자.

(i) $n=1$일 때,

$S_1 = \boxed{\dfrac{1}{2}} = T_1$이므로 $(*)$이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때,

$(*)$이 성립한다고 가정하면 $S_m = T_m$이다.

$n=m+1$일 때, $(*)$이 성립함을 보이자.

$S_{m+1} = S_m + \dfrac{1}{2m+1} + \boxed{\left(-\dfrac{1}{2m+2}\right)}$,

$T_{m+1} = T_m + \boxed{\left(-\dfrac{1}{m+1}\right)} + \dfrac{1}{2m+1} + \dfrac{1}{2m+2}$이다.

$S_{m+1} - T_{m+1} = S_m - T_m$이고, $S_m = T_m$이므로

$S_{m+1} = T_{m+1}$이다.

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(i),(ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

$$a = \frac{1}{2},\ f(m) = -\frac{1}{2m+2},\ g(m) = -\frac{1}{m+1}$$

따라서 $a + \dfrac{g(5)}{f(14)} = \dfrac{11}{2}$

55) [정답] ③

[해설]

집합 A_k의 원소의 개수는 k 이하의 자연수 중에서 2개를 선택하는 조합의 수와 같으므로

$$\boxed{(가)} = {}_kC_2 = \frac{k(k-1)}{2}$$

집합 $\{(1,\ k+1),\ (2,\ k+1),\ \cdots,\ (k,\ k+1)\}$에서 $k+1$이 k개이므로 그 합은 $k(k+1)$

즉, $\boxed{(나)}=k(k+1)$

그러므로 $f(k)=\dfrac{k(k-1)}{2}$, $g(k)=k(k+1)$

따라서 $f(10)+g(9)=45+90=135$

56) [정답] ④

[해설]

(ii) $n=m$일 때, (*)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m} a_k=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1} a_k=\sum_{k=1}^{m} a_k+a_{m+1}$$

$$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$

$$+\{2^{2(m+1)}-1\}\times 2^{(m+1)m}+m\times 2^{-(m+1)}$$

$$=2^{m(m+1)}-(m+1)\times 2^{-m}$$

$$+(2^{2m+2}-1)\times\boxed{2^{m(m+1)}}+m\times 2^{-m-1}$$

$$=\boxed{2^{m(m+1)}}\times\boxed{2^{2m+2}}-\frac{m+2}{2}\times 2^{-m}$$

$$=2^{(m+1)(m+2)}-(m+2)\times 2^{-(m+1)}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 (*)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k=2^{n(n+1)}-(n+1)\times 2^{-n}$이다.

따라서 $f(m)=2^{m(m+1)}$, $g(m)=2^{2m+2}$이므로

$$\frac{g(7)}{f(3)}=\frac{2^{16}}{2^{12}}=2^4=16$$

57) [정답] ③

[해설]

(i) $n=1$일 때 (좌변)$=1$, (우변)$=1$이므로 ($*$)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때 ($*$)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}{}_{m}\mathrm{C}_k}{k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$$

이다. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{(-1)^{k-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_k}{k}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}{}_{m+1}\mathrm{C}_k}{k}+\boxed{\frac{(-1)^m}{m+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^{k-1}({}_{m}\mathrm{C}_k+{}_{m}\mathrm{C}_{k-1})}{k}+\boxed{\frac{(-1)^m}{m+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m+1}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{k}\times\frac{\boxed{m!}}{(m-k+1)!(k-1)!}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{m+1}\left\{\frac{(-1)^{k-1}}{\boxed{m+1}\times\dfrac{(m+1)!}{(m-k+1)!k!}}\right\}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}+\frac{1}{m+1}=\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k}$$

이다. 따라서 $n=m+1$일 때도 ($*$)이 성립한다.

(i), (ii)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 ($*$)이 성립한다.

$f(m)=\dfrac{(-1)^m}{m+1}$, $g(m)=m!$, $h(m)=m+1$이므로

$$\frac{g(3)+h(3)}{f(4)}=50$$

58) [정답] ②

[해설]

(i) $n=1$일 때, (좌변)$=\dfrac{{}_{2}\mathrm{P}_1}{2^1}=1$, (우변)$=\dfrac{2!}{2^1}=1$이므로

($*$)이 성립한다.

(ii) $n=m$일 때, ($*$)이 성립한다고 가정하면

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_k}{2^k}\le\frac{(2m)!}{2^m}$$

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_\mathrm{k}}{2^k}=\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2}\mathrm{P}_\mathrm{k}}{2^k}+\frac{{}_{2\mathrm{m}+2}\mathrm{P}_{\mathrm{m}+1}}{2^{\mathrm{m}+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\frac{{}_{2k}\mathrm{P}_\mathrm{k}}{2^k}+\frac{(2\mathrm{m}+2)!}{2^{\mathrm{m}+1}\times(\mathrm{m}+1)!}$$

$$\le\frac{(2m)!}{2^m}+\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}\times(m+1)!}$$

$$=\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}\times\left\{\frac{1}{(2m+1)(m+1)}+\frac{1}{(m+1)!}\right\}$$

$$<\frac{(2m+2)!}{2^{m+1}}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여 $(*)$이 성립한다.

$p=1,\ f(m)=(2m+2)!,\ g(m)=(2m+1)(m+1)$

$\therefore p+\dfrac{f(2)}{g(1)}=1+\dfrac{6!}{9\times5}=1+16=17$

59) [정답] ⑤

[해설]

(ⅰ) $n=1$일 때,

$(\text{좌변})=a_1,\ (\text{우변})=a_2-\boxed{\dfrac{1}{2}}=\left(1+\dfrac{1}{2}\right)-\boxed{\dfrac{1}{2}}=1=a_1$

이므로 $(*)$이 성립한다.

(ⅱ) $n=m$일 때 $(*)$이 성립한다고 가정하면

$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m=\dfrac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)$이다.

$n=m+1$일 때 $(*)$이 성립함을 보이자.

$$\begin{aligned}
&a_1+2a_2+3a_3+\cdots+ma_m+(m+1)a_{m+1}\\
&=\frac{m(m+1)}{4}(2a_{m+1}-1)+(m+1)a_{m+1}\\
&=(m+1)a_{m+1}\left(\boxed{\frac{m}{2}}+1\right)-\frac{m(m+1)}{4}\\
&=\frac{(m+1)(m+2)}{2}a_{m+1}-\frac{m(m+1)}{4}\\
&=\frac{(m+1)(m+2)}{2}\left(a_{m+2}-\boxed{\left(\frac{1}{m+2}\right)}\right)-\frac{m(m+1)}{4}\\
&=\frac{(m+1)(m+2)}{4}(2a_{m+2}-1)
\end{aligned}$$

따라서 $n=m+1$일 때도 $(*)$이 성립한다.

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 모든 자연수 n에 대하여

$$\begin{aligned}
&a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n\\
&=\frac{n(n+1)}{4}(2a_{n+1}-1)
\end{aligned}$$

이 성립한다.

$p=\dfrac{1}{2},\ f(m)=\dfrac{m}{2},\ g(m)=\dfrac{1}{m+2}$

따라서 $p+\dfrac{f(5)}{g(3)}=13$