6월 평가원 모의고사

해설 - Ⅱ 수학

I 수학

• 수학 영역 A형 •

번호	정답	번호	정답	번호	정답	번호	정답
1	④	9	④	17	①	25	2
2	⑤	10	③	18	①	26	9
3	①	11	⑤	19	⑤	27	3
4	③	12	②	20	③	28	15
5	②	13	⑤	21	③	29	8
6	④	14	②	22	11	30	120
7	①	15	④	23	10		
8	③	16	②	24	19		

1. 정답: ④ [행렬과 그래프]

$$A+2B=\begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&2\\6&4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&4\\7&4\end{pmatrix}$$

2. 정답: ⑤ [지수함수와 로그함수]

$2+3=5$

3. 정답: ① [수열의 극한]

$$\lim_{n\to\infty}\left\{6+\left(\frac{5}{9}\right)^n\right\}=6$$

4. 정답: ③ [수열]

$\{a_n\}$이 등차수열 이므로 $a_{13}-a_{11}=2d=14$

5. 정답: ② [지수함수와 로그함수]

$$\log_2\left(5\times\frac{4}{5}\right)=\log_2 4=2$$

6. 정답: ④ [행렬과 그래프]

그래프의 각 꼭짓점에 연결된 변의 개수는 꼭짓점 사이의 연결관계를 나타내는 행렬에서 행의 모든 성분의 합과 같다. 변의 개수가 3개인 꼭짓점의 개수는 4개이므로 모든 성분의 합이 3인 행의 개수는 4개다.

7. 정답: ① [함수의 극한]

$\lim\limits_{x\to1}\dfrac{4x-a}{x-1}=b$이고 $\lim\limits_{x\to1}(x-1)=0$이므로

$\lim\limits_{x\to1}(4x-a)=0 \quad \therefore\ a=4$

$$\lim_{x\to1}\frac{4x-4}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{4(x-1)}{x-1}=4=b$$

$\therefore\ a+b=8$

8. 정답: ③ [수열]

$$5\sum_{k=1}^{11}a_k+\sum_{k=1}^{11}b_k=20+24=44$$

9. 정답: ④ [함수의 극한]

$\lim\limits_{x\to-1}f(x)=1,\ \lim\limits_{x\to1+0}f(x)=3$이므로

$$\therefore \lim_{x\to-1}f(x)+\lim_{x\to1+0}f(x)=1+3=4$$

10. 정답: ③ [행렬과 그래프]

$$A=(A^{-1})^{-1}=\frac{1}{a}\begin{pmatrix}a&0\\1&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\\frac{1}{a}&\frac{1}{a}\end{pmatrix}$$

(A^{-1}존재하므로 $a\neq0$)

모든 성분의 합: $1+\dfrac{2}{a}=3 \quad \therefore\ a=1$

11. 정답: ⑤ [다항함수의 미분법]

$$\lim_{h\to0}\frac{f(1+2h)-f(1)}{2h}\times2=2f'(1)$$

$f'(x)=2x+8$

$f'(1)=10$

$\therefore\ 2f'(1)=20$

12. 정답 ② [수열의 극한]

등비수열 $\{a_n\}$의 합 $S_n=\dfrac{a_1(3^n-1)}{2}$이므로

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_1(3^n-1)}{2\cdot 3^n}=\frac{a_1}{2}$$

$\therefore \frac{a_1}{2}=5$

$\therefore a_1=10$

13. 정답: ⑤ [다항함수의 미분법]

$g'(x)=f(x)$, $g'(2)=f(2)=1$

$y=g(x)$ 위의 점 $(2,\ g(2))$에서의 접선의 방정식은

$y=g'(2)(x-2)+g(2)$

$\ =1\cdot(x-2)+g(2)$

y절편은 $g(2)-2=-5$, $g(2)=-3$

$y=x-5$이므로 x절편은 5

14. 정답:② [수열의 극한]

$f(x)=n$

$(x-3)^2=n$

$x^2-6x+9-n=0$ 의 두 근을 α,β라 하면

$\alpha+\beta=6$, $\alpha\beta=9-n$

$h(n)=|\alpha-\beta|=\sqrt{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta}$

$\quad=\sqrt{36-4(9-n)}=\sqrt{4n}$

$\therefore h(n)=\sqrt{4n}$

$\quad h(n+1)=\sqrt{4(n+1)}$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\{h(n+1)-h(n)\}$

$=\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}(\sqrt{4n+4}-\sqrt{4n})$

$=\lim_{n\to\infty}\frac{4\sqrt{n}}{\sqrt{4n+4}+\sqrt{4n}}=1$

15. 정답 ④ [지수함수와 로그함수]

함수 $y=\log_3 x$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내는 함수는 $y=\log_3(x-a)+2$이다.

$\therefore\ f(x)=\log_3(x-a)+2$ ……㉠

함수 $f(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 서로 $y=x$에 대칭이므로

$y=\log_3(x-a)+2$

$\Leftrightarrow x=\log_3(y-a)+2$

$\Leftrightarrow y=3^{x-2}+a$

함수 $f(x)$의 역함수가 $f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$이므로

$\therefore a=4$

다른 풀이) 함수 $f(x)$와 그 역함수 $f^{-1}(x)$에 대해

$(f\circ f^{-1})(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$

인 관계가 항상 성립하므로 함수

$f(x)=\log_3(x-a)+2$와 그 역함수

$f^{-1}(x)=3^{x-2}+4$를 합성하면

$f^{-1}(f(x))=3^{f(x)-2}+4=3^{\log_3(x-a)}+4$

$=x-a+4$

$\therefore a=4$

16. 정답: ② [수열]

공차가 6인 등차수열이므로 $a_n=6n+p$라 하자.

a_2, a_k, a_8이 등차수열 이루므로

$2a_k=a_2+a_8$

$12k+2p=(12+p)+(48+p)=60+2p$

$\therefore\ k=5$

a_1, a_2, a_5 순서로 등비수열을 이루므로

$\{a_2\}^2=a_1\cdot a_5$

$(12+p)^2=(6+p)(30+p)$

$12p=-36$, $p=-3$

$a_1=6-3=3$

$\therefore\ k+a_1=5+3=8$

17. 정답: ① [수열의 극한]

$f(x)=g(x)$

$3x^3-x^2-3x=x^3-4x^2+9x+a$

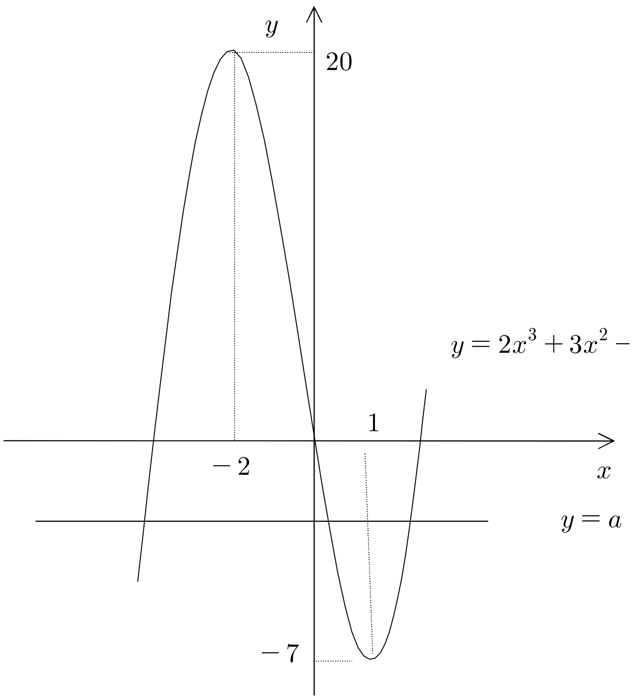
$2x^3+3x^2-12x=a$

$y=2x^3+3x^2-12x$ 와 $y=a$ 이 서로 다른 두 개의 양의 실근과 한 개의 음의 실근을 갖도록 a값을 구하면 되므로

$y=2x^3+3x^2-12x$

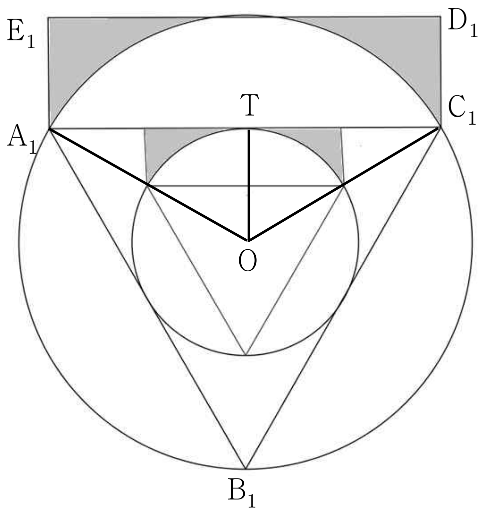
$y'=6x^2+6x-12=6(x+2)(x-1)$

$x=-2$ 에서 극댓값 20과 $x=1$ 에서 극솟값 -7을 가지므로



$\therefore\ -7<a<0$ 인 정수 a는
$-6,\ -5,\ -4,\ -3,\ -2,\ -1$로 총 6개다.

18. 정답 ① [수열의 극한]



원 O_1의 반지름의 길이가 2이고, 내접하는 삼각형이 정삼각형이므로 원O_1의 중심에서 선분A_1C_1에 수선의 발 T라 하면 $\overline{OC_1}=2, \overline{OT}=1, \angle A_1OC_1=\frac{2\pi}{3}$이다.

그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 $\overline{A_1C_1}=2\sqrt{3}$, $\overline{A_1E_1}=1$인 직사각형의 넓이에서 활꼴 A_1OC_1의 넓이를 빼면 되므로

$$S_1=2\sqrt{3}-\left\{\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}\right\}=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

그림 R_2에서 정삼각형에 내접하는 작은 원의 반지름은 1이므로 닮음비가 $1:\frac{1}{2}$이므로 넓이의 비는 $1:\frac{1}{4}$이다.

그림 R_n에서 새로 색칠되는 부분의 넓이를 a_n이라 하면 $a_1=S_1=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$이고 $a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n\,(n\geq 1)$이므로

$$\begin{aligned}\therefore \lim_{n\to\infty}S_n&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}a_n\\&=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}\\&=\frac{3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{4}}\\&=4\sqrt{3}-\frac{16}{9}\pi\end{aligned}$$

19. 정답: ⑤ [수열]

식 (*)의 양변에 S_n을 더하여 정리하면

$S_n+a_{n+1}=2^nS_n+2^n-S_n-1+S_n$,

$S_{n+1}+1=2^n(S_n+1)$이다. ⋯⋯(ㄱ)

$b_n=\log_2(S_n+1)$이라 하면 $b_1=1$이다.

(ㄱ)식의 양변에 밑이 2인 로그를 취해주면

$b_{n+1}=\boxed{(n)}+b_n$ ←(가) 이다.

수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}k=1+\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n^2-n+2}{2}$ 이므로

$S_n=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-1\ (n\geq 1)$이다.

그러므로 $a_1=1$이고, $n\geq 2$일 때,

$$\begin{aligned}a_n&=S_n-S_{n-1}\\&=2^{\frac{n^2-n+2}{2}}-2^{\boxed{\frac{(n-1)^2-(n-1)+2}{2}}}\ \cdots\ (나)\\&=2^{\boxed{\frac{(n-1)^2-(n-1)+2}{2}}}\times(2^{n-1}-1)\end{aligned}$$

이다.

따라서 $f(n)=n$이고,

$g(n)=\frac{(n-1)^2-(n-1)+2}{2}$ 이므로

$f(12)=12,\ g(5)=7$이다.

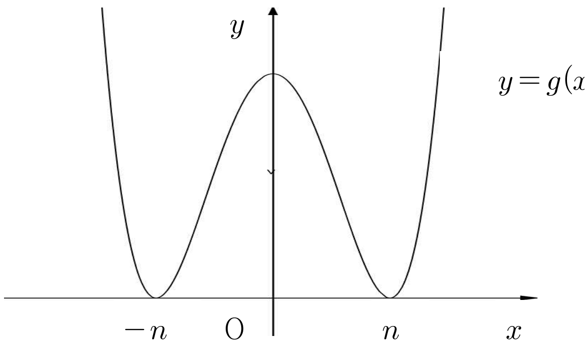
20. 정답: ③ [지수함수와 로그함수]

20이하의 두 자연수 a, b이고 $f(x)$가 지표이므로

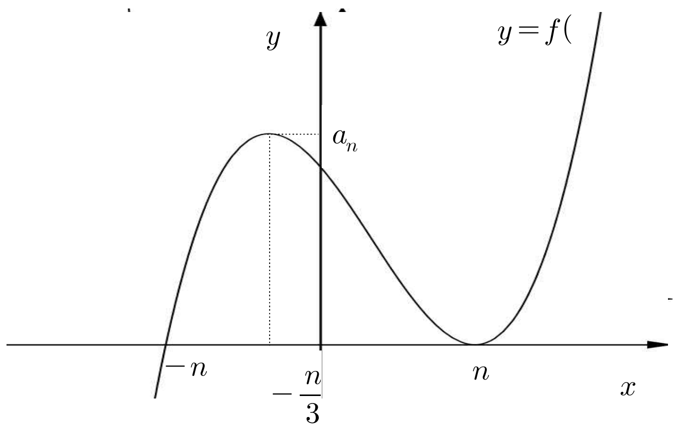
ⅰ) $1 \le a < 10,\ 1 \le b < 10$
$f(a)=0,\ f(b)=0$이고 $1 \le ab < 100$이므로
$f(ab)=0$ 또는 $f(ab)=1$를 만족한다.
$f(ab)=f(a)f(b)+2$이므로 성립하지 않는다.

ⅱ) $1 \le a < 10,\ 10 \le b < 20$
$f(a)=0,\ f(b)=1$이고 $10 \le ab < 200$이므로
$f(ab)=1$ 또는 $f(ab)=2$를 만족한다.
$f(ab)=f(a)f(b)+2$에서 $f(ab)=2$인 경우, 즉,
$100 \le ab < 200$를 만족하는 순서쌍은
$a=5$일 때, $b=20$
$a=6$일 때, $b=17, 18, 19, 20$
$a=7$일 때, $b=15, 16, 17, 18, 19, 20$
$a=8$일 때, $b=13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$
$a=9$일 때, $b=12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20$
순서쌍 $(8, 13)$, $(9, 12)$에서 $a+b$의 최솟값21 을 갖는다.
ⅲ) $10 \le a < 20,\ 1 \le b < 10$
ⅱ)의 경우와 동일한 최솟값을 갖는다.
ⅳ) $10 \le a < 20,\ 10 \le b < 20$
$f(a)=1,\quad f(b)=1$이고 $\quad 100 \le ab < 400$이므로
$f(ab)=2$를 만족한다.
$f(ab)=f(a)f(b)+2$이므로 성립하지 않는다.

21. 정답: ③ [다항함수의 미분법]
$g(x)=(x+n)f(x)$라 하면 조건 (가)에서 $f(n)=0$ 이므로
$g(n)=0,\ g(-n)=0$
조건 (나)에서 모든 실수 x에 대하여 $g(x) \ge 0$이므로
함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



즉, 사차함수
$g(x)=(x+n)f(x)=(x+n)^2(x-n)^2$이므로
삼차함수 $f(x)=(x+n)(x-n)^2$이다.
삼차함수 $f(x)$에서
$$\begin{aligned} f'(x) &= 2(x-n)^2+2(x+n)(x-n) \\ &= (x-n)(x-n+2x+2n) \\ &= (x-n)(3x+n) \end{aligned}$$
함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 $x=-\dfrac{n}{3}$에서 극댓값을 가지므로
$$a_n=f\left(-\frac{n}{3}\right)=\frac{2n}{3}\cdot\frac{16n^2}{9}=\frac{32}{27}n^3$$
따라서 a_n이 자연수가 되도록 하는 n의 최솟값은 3이다.
0

22. 정답: 11 [함수의 극한]
$\lim_{x\to 2}(x-1)=1(\neq 0)$이므로
$$\lim_{x\to 2}\frac{x^2+7}{x-1}=\frac{11}{1}=11$$

23. 정답: 10 [다항함수의 미분법]
$f'(x)=3x^2+10$
$\therefore f'(0)=10$

24. 정답: 19 [수열]
$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k=\frac{n(n+1)}{2}$이므로
$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{10}(2k+a) &= 2\sum_{k=1}^{10}k+10a \\ &= 2\cdot\frac{10\cdot 11}{2}+10a \\ &= 110+10a \end{aligned}$$
$\therefore 110+10a=300$
$\therefore a=19$

25. 정답: 2 [행렬과 그래프]
연립일차방정식이 무수히 많은 해를 가지므로 역행렬은 존재하지 않는다.
$D=2a^2-8a+8=2(a-2)^2=0$
$\therefore\ a=2$

26. 정답: 9 [수열의 극한]
$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}$이 수렴하므로 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=0$

$\therefore \lim_{n\to\infty}\frac{a_n+9n}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_n}{n}+9\right)=9$

27. 정답 3 [다항함수의 미분법]

함수 $f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$가 열린 구간 $(-a,\ a)$에서 감소하려면 열린 구간 $(-a,\ a)$의 모든 실수 x에 대하여 $f'(x)\le 0$이어야 한다.

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-9x+3$에서

$f'(x)=x^2-9$

$f'(x)=x^2-9\le 0$에서

$(x+3)(x-3)\le 0$

$\therefore\ -3\le x\le 3$

따라서 실수 a의 최댓값은 3이다.

28. 정답: 15 [지수함수와 로그함수]

$f(-5)=0$이므로 $(x)=m(x+5)\quad(m>0)$

$2^{f(x)}\le 2^3$에서 $f(x)\le 3$

부등식 $m(x+5)\le 3$의 해가 $x\le -4$이므로

방정식 $m(x+5)=3$의 해가 -4이다.

$\therefore\ m=3,\ f(x)=3(x+5)$

$f(0)=15$

29. 정답: 8 [함수의 극한]

직선 $y=t$가 곡선 $y=|x^2-2x|$와 만나는 점의 개수를 구하면

$f(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 2 & t=0\\ 4 & 0<t<1\\ 3 & t=1\\ 2 & t>1\end{cases}$ 이므로

$f(t)$는 $t=0$과 $t=1$에서 불연속.

$f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속이므로

$t=0$과 $t=1$에서 연속이어야 함.

i) $t=0$에서 연속

$\lim_{t\to 0}f(t)g(t)=f(0)g(0)$이므로

$\lim_{t\to+0}f(t)g(t)=\lim_{t\to-0}f(t)g(t)=f(0)g(0)$

$\therefore g(0)=0$

ii) $t=1$에서 연속

$\lim_{t\to 1}f(t)g(t)=f(1)g(1)$이므로

$\lim_{t\to 1+0}f(t)g(t)=\lim_{t\to 1-0}f(t)g(t)=f(1)g(1)$

$\therefore g(1)=0$

최고차항의 계수가 1인 이차함수는

$g(t)=t(t-1)$ 이다.

$\therefore\ f(3)+g(3)=2+6=8$

30. 정답: 120 [지수함수와 로그함수]

i) $n=2$인 경우

① $k=5$일 때

$a<2^5,\ \ b\le \log_2 a$에서는

$b=1$일 때, $2\le a<2^5$ 이므로 순서쌍 30개

$b=2$일 때, $2^2\le a<2^5$ 이므로 순서쌍 28개

$b=3$일 때, $2^3\le a<2^5$ 이므로 순서쌍 24개

$b=4$일 때, $2^4\le a<2^5$ 이므로 순서쌍 16개

총 98개

$a\ge 2^5,\ b\le -(a-2^5)^2+25$에서는

$a=32$일때, $1\le b\le 25$ 이므로 순서쌍 25개

$a=33$일때, $1\le b\le 24$ 이므로 순서쌍 24개

$a=34$일때, $1\le b\le 21$ 이므로 순서쌍 21개

$a=35$일때, $1\le b\le 16$ 이므로 순서쌍 16개

$a=36$일때, $1\le b\le 9$ 이므로 순서쌍 9개

총 95개

$n=2,\ k=5$이면 순서쌍이 193개이므로 만족하지 않음.

② $k=6$일 때

$a<2^6,\ \ b\le \log_2 a$ 에서는

$b=1$일 때, $2\le a<2^6$ 이므로 순서쌍 62개

$b=2$일 때, $2^2\le a<2^6$ 이므로 순서쌍 60개

$b=3$일 때, $2^3\le a<2^6$ 이므로 순서쌍 56개

$b=4$일 때, $2^4\le a<2^6$ 이므로 순서쌍 48개

$b=5$일 때, $2^4\le a<2^6$ 이므로 순서쌍 32개

총 258개

$a\ge 2^6,\ b\le -(a-2^6)^2+36$에서는

$a=64$일때, $1\le b\le 36$ 이므로 순서쌍 36개

$a=65$일때, $1\le b\le 35$ 이므로 순서쌍 35개

$a=66$일때, $1\le b\le 32$ 이므로 순서쌍 32개

$a=67$일때, $1\le b\le 27$ 이므로 순서쌍 27개

$a=68$일때, $1\le b\le 20$ 이므로 순서쌍 20개

$a=69$일때, $1\le b\le 11$ 이므로 순서쌍 11개

총 161개

$n=2,\ k=6$이면 순서쌍이 419개로 만족.

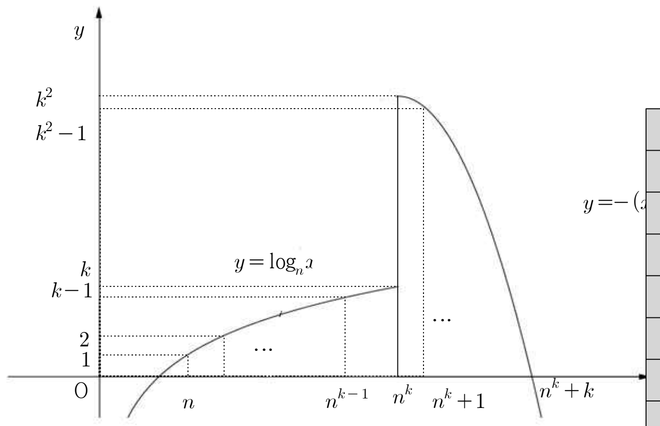
$\therefore\ f(2)=6$

같은 방법으로 $n=3, n=4$일 때를 구하면

$f(3)=5, f(4)=4$ 이 되므로

$\therefore\ f(2)\times f(3)\times f(4)=120$

위 내용을 일반화시켜 생각해 보면 다음과 같다.



Ⅰ) $a < n^k$, $b \le \log_n a$일 때,
$b=1$ 일 때, a: $n^k - n$개
$b=2$ 일 때, a : $n^k - n^2$개
⋮
$b=k-1$ 일 때, a : $n^k - n^{k-1}$개

$$\sum_{m=1}^{k-1}\{n^k - n^m\} = (k-1)\cdot n^k - \frac{n\{n^{k-1}-1\}}{n-1}$$
$$= (k-1)\cdot n^k - \frac{n^k - n}{n-1}$$

Ⅱ) $a \ge n^k$, $b \le -(a-n^k)^2 + k^2$일 때
$a=n^k$ 일 때 b : k^2 개
$a=n^k+1$ 일 때 b : k^2-1^2 개
$a=n^k+2$ 일 때, b : k^2-2^2 개
⋮
$a=n^k+k-1$ 일 때, b : $k^2-(k-1)^2$ 개
$$\sum_{m=1}^{k}\{k^2-(m-1)^2\} = k^3 - \frac{(k-1)k(2k-1)}{6}$$
$$= \frac{4k^3+3k^2-k}{6}$$

∴ $(a,\ b)$의 순서쌍의 개수는
$(k-1)\cdot n^k - \dfrac{n^k-n}{n-1} + \dfrac{4k^3+3k^2-k}{6}$ 이 된다.

• 수학 영역 B형 •

번호	정답	번호	정답	번호	정답	번호	정답
1	④	9	①	17	⑤	25	6
2	②	10	④	18	②	26	2
3	③	11	②	19	④	27	68
4	⑤	12	④	20	③	28	4
5	①	13	①	21	④	29	25
6	③	14	③	22	9	30	128
7	⑤	15	①	23	11		
8	②	16	⑤	24	10		

1. 정답 ④ [행렬과 그래프]
$A+2B = \begin{pmatrix}1&2\\1&0\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}0&1\\3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&4\\7&4\end{pmatrix}$ 이므로 $(1,2)$성분은 4이다.

2. 정답 ② [지수함수와 로그함수]
$\log_2 5 + \log_2 \frac{4}{5} = \log_2\left\{5\times\frac{4}{5}\right\} = \log_2 4 = 2$

3. 정답 ③ [함수의 극한과 연속]
주어진 식의 분자 분모에 $\sqrt{3}$ 을 곱해주면
$\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{3}x)}{x} = \lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{3}\ln(1+\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}x}$ 이 되고,
$\lim_{x\to 0}\dfrac{\ln(1+\sqrt{3}x)}{\sqrt{3}x} = 1$이므로 주어진 식의 값은 $\sqrt{3}$ 이다.

4. 정답 ⑤ [삼각함수]
$\tan\theta = \frac{1}{7}$ 이므로
$\sin\theta = \pm\frac{1}{\sqrt{50}}$, $\cos\theta = \pm\frac{7}{\sqrt{50}}$ (복부호동순)
∴ $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = \frac{7}{25}$

5. 정답 ① [적분법]
$\int_0^1 e^{x+4}dx = \left[e^{x+4}\right]_0^1 = e^5 - e^4$

6. 정답 ③ [일차변환과 행렬]

$f^{-1}:(4,1)\to(a,b)$이므로

$f:(a,\ b)\to(4,1)$ 따라서

$\begin{pmatrix}2&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$, $2a=4,\ b=1$

이므로 $a+b=3$

7. 정답 ⑤ [삼각함수]

주어진 삼각함수 식을 합성하면

$f(x)=a\sin x+\sqrt{11}\cos x$

$\quad=\sqrt{a^2+11}\sin(x+\theta)$

(단, θ는 점 $A(a,\ \sqrt{11})$라 할 때, $\overline{OA}$의 동경의 크기)

$-1\le\sin(x+\theta)\le 1$ 이므로

$-\sqrt{a^2+11}\le\sqrt{a^2+11}\sin(x+\theta)\le\sqrt{a^2+11}$

그러므로 최댓값은 $\sqrt{a^2+11}=6$이다.

$\therefore$ 양수 $a=5$

8. 정답 ② [수열의 극한]

$a_n=a_1\cdot 3^{n-1}$ 이고 $S_n=\dfrac{a_1(3^n-1)}{2}$

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{S_n}{3^n}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_1(3^n-1)}{2\cdot 3^n}=\dfrac{a_1}{2}=5$

$\therefore\ a_1=10$

9. 정답 ① [순열과 조합]

${}_4\Pi_5=4^5=1024$

10. 정답 ④ [수열의 극한]

점 $P(n,2n^2)$를 지나고 직선 $y=2nx$에 수직인 직선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2n}x+2n^2+\dfrac{1}{2}$ 이다.

점 Q는 이 직선의 x 절편이므로

$0=-\dfrac{1}{2n}x+2n^2+\dfrac{1}{2}$ 에서

점Q의 x 좌표는 $x=4n^3+n$ 이고

$l_n=4n^3+n$이므로

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{l_n}{n^3}=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4n^3+n}{n^3}=4$

11. 정답 ② [방정식과 부등식]

주어진 방정식 $\dfrac{2}{f(x)-1}=\dfrac{1}{1-x}+\dfrac{1}{1+x}$ 에 최소공배수 $\{f(x)-1\}(1-x)(1+x)$를 곱하면

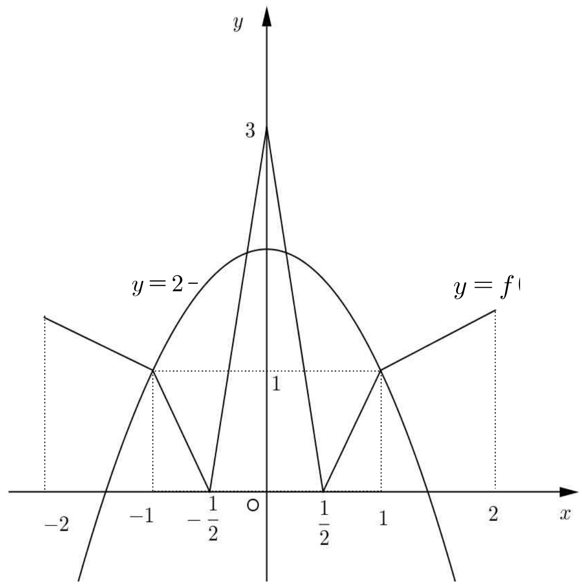
$2(1-x)(1+x)=$

$\{f(x)-1\}(1+x)+\{f(x)-1\}(1-x)$

$\Leftrightarrow 2(1-x^2)=2f(x)-2$

$\Leftrightarrow 1-x^2=f(x)-1$

$\Leftrightarrow 2-x^2=f(x)$



즉, 주어진 $y=f(x)$그래프와 $y=2-x^2$ 의 그래프의 교점의 개수를 구한다.

교점의 개수는 4개가 나오는데, 그 중 무연근 $x=\pm 1$을 제외하면 정답은 2개

12. 정답 ④ [이차곡선]

$\overline{\mathrm{PF}}=c$, $\overline{\mathrm{F'F}}=2c$이고 타원의 정의에 의하여 $\overline{\mathrm{PF'}}=4-c$.

$\overline{\mathrm{PF}}$ 가 원의 반지름이므로 $\triangle\mathrm{PFF'}$은 직각삼각형이다.

$4\cdot c^2=c^2+(4-c)^2$

따라서 $c=-2+2\sqrt{3}$

13. 정답 ① [적분법]

$y=g(x)$의 그래프가 $(1,2)$를 지나고 x축에 평행하므로 $y=g(x)=2$이고

둘러싸인 부분의 넓이는 $\displaystyle\int_1^3\{f(x)-g(x)\}dx$이다.

$$\int_1^3\{f(x)-g(x)\}dx=\int_1^3\left(2\sqrt{2}\sin\frac{\pi}{4}x-2\right)dx$$

$$= 2\sqrt{2} \times \frac{4}{\pi} \times \left[-\cos\frac{\pi}{4}x\right]_1^3 - 4$$

$$= 2\sqrt{2} \times \frac{4}{\pi} \times \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 4$$

$$= \frac{16}{\pi} - 4$$

14. 정답 ③ [미분법]

일차함수 $y = g(x)$가 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(1, 2)$을 지나고 닫힌구간 $[0, 4]$에서 함수 $y = f(x)$ 보다 항상 위쪽에 있으려면

$y = g(x)$는 $(1, 2)$에서 곡선 $y = f(x)$의 접선이 되어야 한다.

따라서 접선의 기울기 $g'(x) = f'(1)$이므로

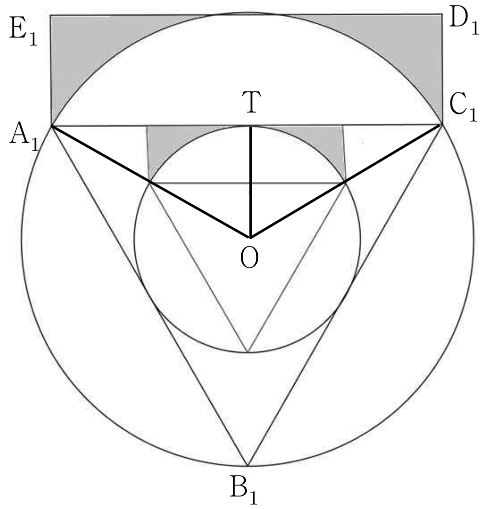
$$f'(x) = 2\sqrt{2} \times \frac{\pi}{4} \times \cos\frac{\pi}{4}x$$

$$\therefore\ f'(1) = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore\ g(x) = \frac{\pi}{2}x + 2 - \frac{\pi}{2}$$

$g(3) = 2 + \pi$

15. 정답 ① [수열의 극한]



원 O_1의 반지름의 길이가 2이고, 내접하는 삼각형이 정삼각형이므로 원 O_1의 중심에서 선분 A_1C_1에 수선의 발 T라 하면 $\overline{OC_1} = 2, \overline{OT} = 1, \angle A_1OC_1 = \frac{2\pi}{3}$이다.

그림 R_1에서 색칠된 부분의 넓이는 $\overline{A_1C_1} = 2\sqrt{3}$, $\overline{A_1E_1} = 1$인 직사각형의 넓이에서 활꼴 A_1OC_1의 넓이를 빼면 되므로

$$S_1 = 2\sqrt{3} - \left\{\frac{4}{3}\pi - \sqrt{3}\right\} = 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$$

그림 R_2에서 정삼각형에 내접하는 작은 원의 반지름은 1이므로 닮음비가 $1 : \frac{1}{2}$이므로 넓이의 비는 $1 : \frac{1}{4}$이다.

그림 R_n에서 새로 색칠되는 부분의 넓이를 a_n이라 하면

$a_1 = S_1 = 3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi$이고 $a_{n+1} = \frac{1}{4}a_n\ (n \geq 1)$

이므로

$$\therefore \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} a_n$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\left(3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}$$

$$= \frac{3\sqrt{3} - \frac{4}{3}\pi}{1 - \frac{1}{4}}$$

$$= 4\sqrt{3} - \frac{16}{9}\pi$$

16. 정답 ⑤ [함수의 극한과 연속]

함숫값 $g(f(1)) = g(1) = \frac{5}{2}$

좌극한값

$$\lim_{x\to 1-0} g(f(x)) = g(a) = 2^a + 2^{-a}$$

우극한값

$$\lim_{x\to 1+0} g(f(x)) = g(1) = \frac{5}{2}$$

함숫값과 극한값이 같아야 하므로

$2^a + 2^{-a} = \frac{5}{2}$ 이고 양변에 2^a 를 곱하면

$(2^a)^2 - 5\cdot 2^a + 2 = 0$

$2^a = \frac{1}{2},\ 2^a = 2$

따라서 $a = -1,\ 1$ 이고 곱은 -1이다.

17. 정답 ⑤ [수열]

식 (*)의 양변에 S_n을 더하여 정리하면

$$S_n + a_{n+1} = 2^n S_n + 2^n - S_n - 1 + S_n,$$

$S_{n+1} + 1 = 2^n(S_n + 1)$이다. ⋯⋯ (ㄱ)

$b_n = \log_2(S_n + 1)$이라 하면 $b_1 = 1$이다.

(ㄱ)식의 양변에 밑이 2인 로그를 취해주면

$b_{n+1} = \boxed{(n)} + b_n \leftarrow$(가) 이다.

수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1} k = 1 + \frac{n(n-1)}{2} = \frac{n^2 - n + 2}{2}$$ 이므로

$S_n = 2^{\frac{n^2-n+2}{2}} - 1 \ (n \geq 1)$이다.

그러므로 $a_1 = 1$이고, $n \geq 2$일 때,

$$a_n = S_n - S_{n-1}$$
$$= 2^{\frac{n^2-n+2}{2}} - 2^{\boxed{\frac{(n-1)^2-(n-1)+2}{2}}} \cdots (\text{나})$$
$$= 2^{\boxed{\frac{(n-1)^2-(n-1)+2}{2}}} \times (2^{n-1}-1)$$

이다.

따라서 $f(n) = n$이고,

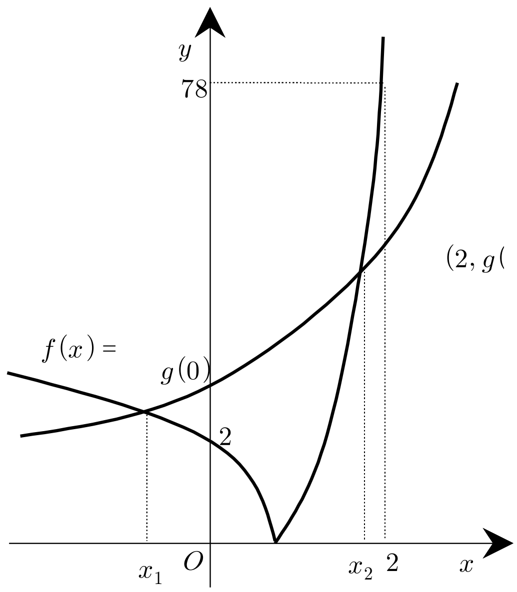
$g(n) = \dfrac{(n-1)^2-(n-1)+2}{2}$ 이므로

$f(12) = 12$, $g(5) = 7$이다.

18. 정답 ② [지수함수와 로그함수]

함수 $f(x) = |9^x - 3|$, $g(x) = 2^{x+k}$ 이라 하자.

함수 $y = g(x)$는 실수전체에서 증가함수이므로 그래프는 다음과 같다.



따라서 $y = f(x)$와 $y = g(x)$의 교점의 x 좌표를 x_1, x_2 라 할 때

$x_1 < 0$, $0 < x_2 < 2$을 만족시키기 위해서는

$g(0) > f(2)$ 이고 $g(2) > f(2)$이어야 한다.

$\therefore g(0) = 2^k > 2 \Rightarrow k > 1$

$\therefore g(2) = 2^{2+k} < 78 \Rightarrow k \leq 4$

따라서 $1 < k \leq 4$ 이므로 $k = 2, 3, 4$ 이고

합은 $2+3+4 = 9$

19. 정답 ④ [이차곡선]

점P, 점Q는 모두 두 쌍곡선 위의 점이므로, 쌍곡선의 정의에 따라

$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2$, $\overline{PG'} - \overline{PG} = 2 \cdots$(ㄱ) 가 성립한다.

그런데, $\overline{PF'} = \overline{QF}$, $\overline{PG'} = \overline{QG}$이므로 ($\because$ 두 점 P, Q 는 원점대칭이므로)

(ㄱ)은 $\overline{QF} - \overline{PF} = 2$, $\overline{QG} - \overline{PG} = 2 \cdots$(ㄴ)이 된다.

주어진 등식 $\overline{PF} \times \overline{QF} = 4$, $\overline{PG} \times \overline{QG} = 8$과 각각 연립하면

$$\begin{cases} \overline{QF} - \overline{PF} = 2 \\ \overline{QF} \times \overline{PF} = 4 \end{cases}, \quad \begin{cases} \overline{QG} - \overline{PG} = 2 \\ \overline{QG} \times \overline{PG} = 8 \end{cases}$$

$\overline{QF} + \overline{PF} = 2\sqrt{5}$, $\overline{QG} + \overline{PG} = 6$

그러므로 사각형 $PGQF$의 둘레의 길이는 $2\sqrt{5}+6$

20. 정답 ③ [지수함수와 로그함수]

$1 \leqq t < 100$ 의 양변에 로그를 취하면

$0 \leqq \log t < 2$

즉, $\log t$ 의 지표를 m이라고 하면

$\log t = m + f(t) \quad (0 \leqq f(t) < 1)$

$\log t^n = n \log t = mn + nf(t)$ 이고

1) $n = 4$ 일 때

$0 \leqq 4f(t) < 4$ 이므로

① $0 \leqq f(t) < \frac{1}{4}$ 일 때

$4f(t) + 2f(t) = 1$, $f(t) = \frac{1}{6}$,

② $\frac{1}{4} \leqq f(t) < \frac{1}{2}$ 일 때

$4f(t) - 1 + 2f(t) = 1$, $f(t) = \frac{1}{3}$,

③ $\frac{1}{2} \leqq f(t) < \frac{3}{4}$ 일 때

$4f(t) - 2 + 2f(t) = 1$, $f(t) = \frac{1}{2}$,

④ $\frac{3}{4} \leqq f(t) < 1$ 일 때

$4f(t) - 3 + 2f(t) = 1$, $f(t) = \frac{2}{3}$는 주어진 구간에 존재하지 않는다.

따라서, 만족하는 $f(t)$의 개수는 3개이다. 지표 m은 $0, 1$이므로 $3 \times 2 = 6$가지 이다.

2) $n = 5$ 일 때

$0 \leqq 5f(t) < 5$ 이므로

① $0 \leqq f(t) < \frac{1}{5}$일 때

$5f(t) + 2f(t) = 1$, $f(t) = \frac{1}{7}$,

② $\frac{1}{5} \leqq f(t) < \frac{2}{5}$일 때

$5f(t)-1+2f(t)=1, f(t)=\frac{2}{7}$,

③ $\frac{2}{5} \leqq f(t) < \frac{3}{5}$일 때

$5f(t)-2+2f(t)=1, f(t)=\frac{3}{7}$,

④ $\frac{3}{5} \leqq f(t) < \frac{4}{5}$일 때

$5f(t)-3+2f(t)=1,\ f(t)=\frac{4}{7}$

$\frac{4}{7} < \frac{3}{5}$이므로 구간에 존재하지 않는다.

⑤ $\frac{4}{5} \leqq f(t) < 1$일 때

$5f(t)-4+2f(t)=1,\ f(t)=\frac{5}{7}$

$\frac{5}{7} < \frac{4}{5}$ 이므로 구간에 존재하지 않는다.

따라서 조건을 만족하는 $f(t)$의 개수는 3가지 이고, 지표 m이 될 수 있는 경우의 수가 2가지 이므로 6 가지이다.

$\therefore a_4+a_5=12$

21. 정답 ④ [미분법]

실수 전체의 집합에서 정의된 미분 가능한 함수 $f(x)$가 역함수를 가지려면 $f(x)$가 증가 함수 이거나 감소 함수 이어야 한다.

즉 $f'(x) \geq 0, f'(x) \leq 0$이어야 함을 알 수 있다.

$f'(x)=e^{x+1}(x^2+nx+1)+a$ 이고

$\lim_{x\to\infty} f'(x)=\infty$이므로 실수 전체의 집합에서

$f'(x) \geq 0$ 즉, $f'(x)$의 최솟값≥ 0 이다.

$f'(x)$의 최솟값을 구하기 위해 도함수인 $f''(x)$를 구해보면

$$f''(x)=e^{x+1}\{x^2+(n+2)x+n+1\}$$
$$=e^{x+1}(x+1)(x+n+1)$$

이고 $x=-1$에서 극솟값 이면서 최솟값을 가지고, $x=-n-1$에서 극댓값을 가지는 것을 알 수 있다.

($\because n>2$인 자연수 n에 대하여

$\lim_{x\to-\infty} f'(x)=a>(1-n+1)+a=f'(-1)$)

따라서

$f'(-1)=(1-n+1)+a \geq 0, a \geq n-2$

즉 $g(n)=n-2$이다.

$1 \leq n-2 \leq 8, 3 \leq n \leq 10$ 이므로 만족시키는 모든 n의 값의 합은 52이다.

(참고 $\lim_{x\to-\infty} e^x x^2=0$)

22. 정답 9 [방정식과 부등식]

무리방정식 $\sqrt{7x+1}=x-1$ 의 양변을 제곱하면

$7x+1=x^2-2x+1$

$x^2-9x=0$

$x=0,\ 9$

여기서 $x=0$ 은 무연근이므로 $x=9$

23. 정답 11 [수열]

$\{a_n\}$이 첫째항이 2인 등차수열이라고 주어졌으므로 공차를 d라 하면 일반항은 $a_n=2+(n-1)d$

$a_7=2+6d,\ a_{11}=2+10d$ 이므로

$a_7+a_{11}=4+16d=20,\ d=1$이다.

$a_{10}=2+9d=11$

24. 정답 10 [이차곡선]

$y^2=20x$ 에 접하는 기울기 $\frac{1}{2}$인 접선의 방정식은

$y=\frac{1}{2}x+10$ 이므로 y 절편은 10

25. 정답 6 [미분법]

매개변수 미분법에 의하여

$\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2t}(2t^2+10)=t+\frac{5}{t}$ 이고

$t=1$를 대입해주면 $\frac{dy}{dx}=6$ 이다.

26. 정답. 2 [행렬과 그래프]

주어진 연립방정식을 정리하면

$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 4a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} ay \\ 2x-y \end{pmatrix}$ $\Rightarrow$

$\begin{pmatrix} 1 & -1-a \\ -3 & 4a+1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

이 연립방정식이 $x=0,\ y=0$ 이외의 해를 가지기 위해서는

$\begin{pmatrix} 1 & -1-a \\ -3 & 4a+1 \end{pmatrix}$의 역행렬이 존재하지 않아야 한다.

따라서 $4a+1-(-3)(-1-a)=0$

$\therefore a=2$

27. 정답 68 [순열과 조합]

0이상의 정수 $x,\ y,\ z,\ u$에 대하여 $x+y+z+u=6$을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수에서 $x=u$를 만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수를 빼면 된다.

i) $x+y+z+u=6$을 만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수: ${}_4H_6={}_9C_6={}_9C_3=84$

ii) $x=u$를 만족하는 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ u)$의 개수

$x+y+z+u=6$

$\Rightarrow 2x+y+z=6$

① $x=0$일 때, $y+z=6$이 되므로 ${}_2H_6={}_7C_6={}_7C_1=7$

② $x=1$일 때, $y+z=4$이 되므로 ${}_2H_4={}_5C_4={}_5C_1=5$

③ $x=2$일 때, $y+z=2$이 되므로 ${}_2H_2={}_3C_2={}_3C_1=3$

④ $x=3$일 때, $y+z=0$이 되므로 ${}_2H_0={}_1C_0=1$

즉, $84-(7+5+3+1)=68$.

28. 정답 4 [일차변환]

합성변환 $f\circ g$ 에 의하여 $(4,\ 0)$이 옮겨지는 점의 좌표 B는

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}4\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\cos\theta\\2\sin\theta\end{pmatrix}$$

따라서 $B(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$

합성변환 $g\circ f^{-1}$ 에 의하여 B가 옮겨지는 점의 좌표 C는

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2\cos\theta\\2\sin\theta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

따라서 $C(1,\ 0)$

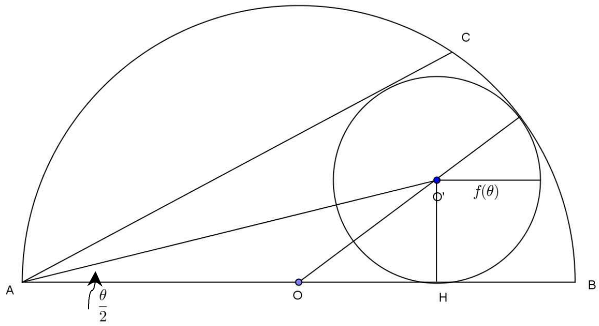
$\triangle ABC$ 의 넓이가 1 이므로

$\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin\theta=1$ 에서 $\sin\theta=\frac{1}{3}$

따라서 $p+q=4$

29. 정답 25 [함수의 극한과 연속]

반원의 중심을 O, 내접원의 중심을 O', 내접원과 선분 AB의 접점을 H라 하자.



피타고라스의 정리에 의해

$$\overline{OH}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}-f(\theta)\right)^2-f(\theta)^2}=\sqrt{\frac{1}{4}-f(\theta)}$$

삼각형 $AO'H$에서

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{\overline{O'H}}{\overline{AH}}\frac{f(\theta)}{\frac{1}{2}+\sqrt{\frac{1}{4}-f(\theta)}}$$ 이고 주어진 식을 유리화 한 후에 양변을 제곱해 주면

$$\tan\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}-\sqrt{\frac{1}{4}-f(\theta)},$$

$$\tan\frac{\theta}{2}-\frac{1}{2}=-\sqrt{\frac{1}{4}-f(\theta)}$$

이므로 $f(\theta)=\tan\frac{\theta}{2}-\tan^2\frac{\theta}{2}$ 이다. 따라서

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan\frac{\theta}{2}-f(\theta)}{\theta^2}=\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\theta^2}$$

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{\tan^2\frac{\theta}{2}}{\left(\frac{\theta}{2}\right)^2}\frac{1}{4}=\frac{1}{4}=\alpha\left(\because\lim_{\theta\to0}\frac{\tan\theta}{\theta}=1\right)$$

$\alpha=\frac{1}{4}$ 이므로 $100\alpha=25$ 이다.

30. 정답. 128 [적분법}

먼저 함수 $f(k+t)=f(k)$ 는 구간 $[k,\ k+1]$ 에서 상수함수이다.

함수 $f(k+t)=2^t f(k)$ 는 구간 $[k,\ k+1]$ 에서 지수함수이고

이 함수는 $y=2^t$ 의 그래프를 x 축의 방향으로 $\log_2 f(k)$ 만큼 평행이동한 그래프이다.

그런데 함수 $y=f(x)$ 는 주어진 구간에서 연속함수이므로 상수함수의 그래프와 지수함수의 그래프가 연결되어 만들어지는 그래프가 되어야 한다.

또한 지수함수와 상수함수가 만나는 점에서는 미분불가능하므로

미분불가능한 점이 2개이기 위해서는

i) 지수함수-상수함수-지수함수의 그래프이거나

ii) 상수함수-지수함수-상수함수의 그래프가 되어야 한다.

i) 지수함수-상수함수-지수함수인 경우

미분불가능한 점을 $x=\alpha,\ x=\beta$ 라 하면

$$f(x)=\begin{cases}2^x & (0\le x\le\alpha)\\ 2^\alpha & (\alpha\le x\le\beta)\\ 2^{x-\beta+\alpha} & (\beta\le x\le 8)\end{cases}$$ 이다.

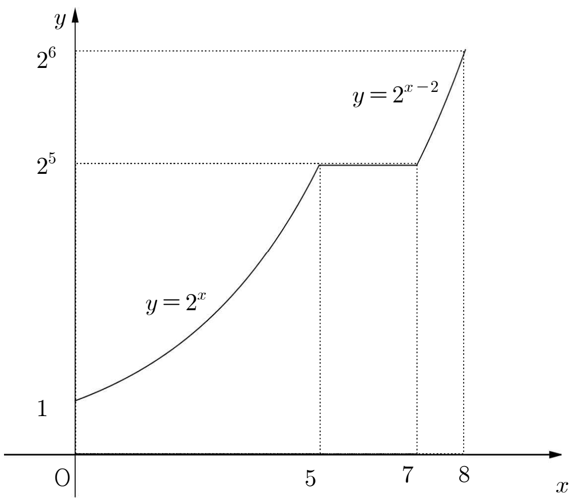
$f(8)=2^{8-\beta+\alpha}\le 100$ 이고

α,β 는 정수이므로 $\beta-\alpha\le 2$

$\int_0^8 f(x)dx$ 의 값이 최대가 되기

위해서는 함숫값이 커야 하므로

$f(8) = 2^6$ 이고 $\beta - \alpha = 2$ 이다.
α, β 는 정수이므로 $\alpha = 5$, $\beta = 7$ 일 때



$\int_0^8 f(x)dx$ 은 최댓값

$\int_0^5 2^x dx + \int_5^7 2^5 dx + \int_7^8 2^{x-2} dx = 64 + \frac{63}{\ln 2}$을 갖는다.

ii) 상수함수-지수함수-상수함수인 경우

미분불가능한 점을 $x = \alpha$, $x = \beta$ 라 하면

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \le x \le \alpha) \\ 2^{x-\alpha} & (\alpha \le x \le \beta) \\ 2^{\beta-\alpha} & (\beta \le x \le 8) \end{cases} \text{이다.}$$

$f(8) = 2^{\beta-\alpha} \le 100$ 이고

α, β 는 정수이므로 $\beta - \alpha \le 6$

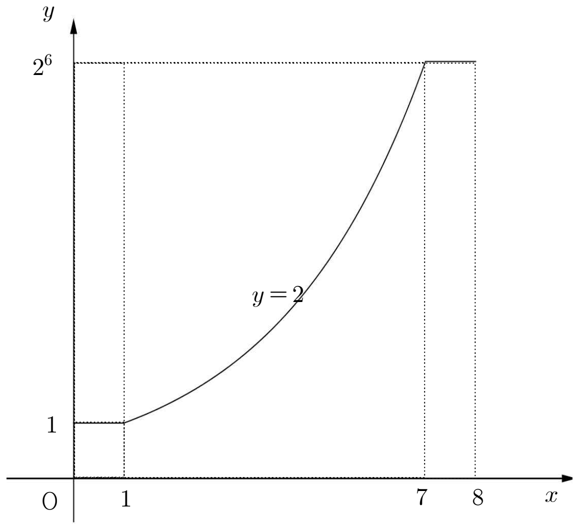
$\int_0^8 f(x)dx$ 의 값이 최대가 되기 위해서는

함숫값이 커야 하므로

$f(8) = 2^6$ 이고 $\beta - \alpha = 6$ 이다.
α, β 는 정수이므로 $\alpha = 1$, $\beta = 7$ 일 때

$\int_0^8 f(x)dx$ 은 최댓값

$\int_0^1 1dx + \int_1^7 2^{x-1} dx + \int_7^8 2^6 dx = 65 + \frac{63}{\ln 2}$을 갖는다.



(i), (ii)에서 $\int_0^8 f(x)dx$ 의 최댓값은 $65 + \frac{63}{\ln 2}$ 이다.

$\therefore p + q = 65 + 63 = 128$