미라클 모의고사
수학 영역 정답

1	①	2	④	3	③	4	③	5	①
6	⑤	7	②	8	③	9	②	10	④
11	⑤	12	②	13	①	14	⑤	15	④
16	5	17	17	18	25	19	11	20	3
21	48	22	476						

공통과목 해설

1. 로그의 성질을 활용하여 계산하는 문제입니다.

$\log_3\sqrt{5}+\log_3\frac{\sqrt{15}}{5}=\log_3(\sqrt{5}\times\frac{\sqrt{15}}{5})=\log_3\frac{\sqrt{75}}{5}$

$=\log_3\frac{5\sqrt{3}}{5}=\log_3 3^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}$

2. 도함수에 대한 문제입니다.
$f(x)=x^3-2x^2-x+1$에서 $f'(x)=3x^2-4x-1$이고
$f'(1)=3-4-1=-2$입니다.

3. 등차수열에 대한 문제입니다.
주어진 등차수열의 첫째항은 2이고, 공차를 d라고 하면
$a_3+a_4=(2+2d)+(2+3d)=4+5d=19$, $d=3$입니다.

4. 함수의 극한에 대한 문제입니다.
$f(-1)=1$이고, $\lim_{x\to1+}f(x)=-1$이므로
$f(-1)+\lim_{x\to1+}f(x)=0$입니다.

5. 삼각함수의 성질을 활용한 문제입니다.
$\sin\theta=4+4\cos(\theta+\frac{\pi}{2})$에서 $\cos(\theta+\frac{\pi}{2})=-\sin\theta$이므로
$\sin\theta=4-4\sin\theta$, $5\sin\theta=4$, $\sin\theta=\frac{4}{5}$입니다.
$\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로 $\cos\theta=-\sqrt{1-\sin^2\theta}=-\sqrt{1-\frac{16}{25}}=-\frac{3}{5}$이고,
$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\frac{4}{3}$입니다.

6. 함수의 극대, 극소에 대한 문제입니다.
함수 $f(x)=2x^3-9x^2+ax+3$에 대하여 $f'(x)=6x^2-18x+a$이고, $f'(2)=24-36+a=0$, $a=12$이고 이때
$f(x)=2x^3-9x^2+12x+3$입니다.
$f'(x)=6x^2-18x+12=6(x-1)(x-2)$에서 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 극댓값을 가지며, $f(1)=2-9+12+3=8$입니다.

7. 수열의 합을 구하는 문제입니다.
이차함수 $f(x)=-x^2+2nx-n+2=-(x-n)^2+n^2-n+2$의 최댓값은 $a_n=n^2-n+2$이며, $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}(n^2-n+2)$의 값은
$\frac{10\times11\times21}{6}-\frac{10\times11}{2}+10\times2=350$입니다.

8. 부정적분에 대한 문제입니다.
$f'(x)=\begin{cases}2x-3 & (x\le1)\\3x^2-4x & (x>1)\end{cases}$를 적분하여 원시함수를 구하면
$f(x)=\begin{cases}x^2-3x+a & (x\le1)\\x^3-2x^2+b & (x>1)\end{cases}$이고, $f(-1)=1+3+a=2$에서
$a=-2$입니다.
$f(x)=\begin{cases}x^2-3x-2 & (x\le1)\\x^3-2x^2+b & (x>1)\end{cases}$가 연속이어야 하므로
$\lim_{x\to1-}f(x)=-4$, $\lim_{x\to1+}f(x)=-1+b$에서 $-1+b=-4$, $b=-3$입니다.
$f(x)=\begin{cases}x^2-3x-2 & (x\le1)\\x^3-2x^2-3 & (x>1)\end{cases}$에서 $f(3)=27-18-3=6$입니다.

9. 수직선 위를 움직이는 점의 운동에 대한 문제입니다.
$\frac{dv}{dt}=2t+a$이며, $t=2$일 때의 가속도는 $4+a=1$에서 $a=-3$입니다. $v(t)=t^2-3t+b$이고, 점 P의 $t=0$부터 $t=3$까지 위치의 변화량이 0이므로 $\int_0^3 v(t)dt=0$입니다.
$\int_0^3(t^2-3t+b)dt=\left[\frac{t^3}{3}-\frac{3}{2}t^2+bt\right]_0^3=9-\frac{27}{2}+3b=0$
$b=\frac{3}{2}$입니다. 따라서 $ab=-3\times\frac{3}{2}=-\frac{9}{2}$입니다.

10. 거듭제곱근의 개수에 대한 문제입니다.
2 이상의 자연수 n에 대하여 $\frac{4-n}{2n-19}$는 $n=4$일 때 0이며, $2\le n\le3$ 또는 $n\ge10$일 때 음수이며, $5\le n\le9$일 때 양수입니다.
$\frac{4-n}{2n-19}$의 부호와 관계없이 n이 홀수인 경우 $a_n=1$이며, n이 짝수인 경우 $\frac{4-n}{2n-19}<0$이면 $a_n=0$, $\frac{4-n}{2n-19}=0$이면 $a_n=1$, $\frac{4-n}{2n-19}>0$이면 $a_n=2$입니다.
$n=2$부터 $n=9$까지 a_n의 값을 순서대로 적으면 0, 1, 1, 1, 2, 1, 2, 1이며, $\sum_{n=2}^{9}a_n=9$입니다.
$n\ge10$부터는 0, 1이 반복되며, $a_{11}=a_{13}=a_{15}=a_{17}=1$이고 $a_{10}=a_{12}=a_{14}=a_{16}=a_{18}=0$이므로 $\sum_{n=2}^{17}a_n=\sum_{n=2}^{18}a_n=13$입니다. 따라서 모든 m의 값의 합은 17+18=35입니다.

11. 함수의 연속에 대한 문제입니다.
$\sqrt{4x^2-4x+1}=\sqrt{(2x-1)^2}=|2x-1|$이므로 (가)에 주어진 식은 $f(x)=(3-|2x-1|)g(x)$이고, $x\ne-1$이고 $x\ne2$인 경우 함수 $g(x)$는 다음과 같습니다.

$$g(x)=\begin{cases}\frac{f(x)}{2x+2} & (x<-1\text{ 또는 }-1<x<\frac{1}{2})\\\frac{f(x)}{-2x+4} & (\frac{1}{2}\le x<2\text{ 또는 }x>2)\end{cases}$$

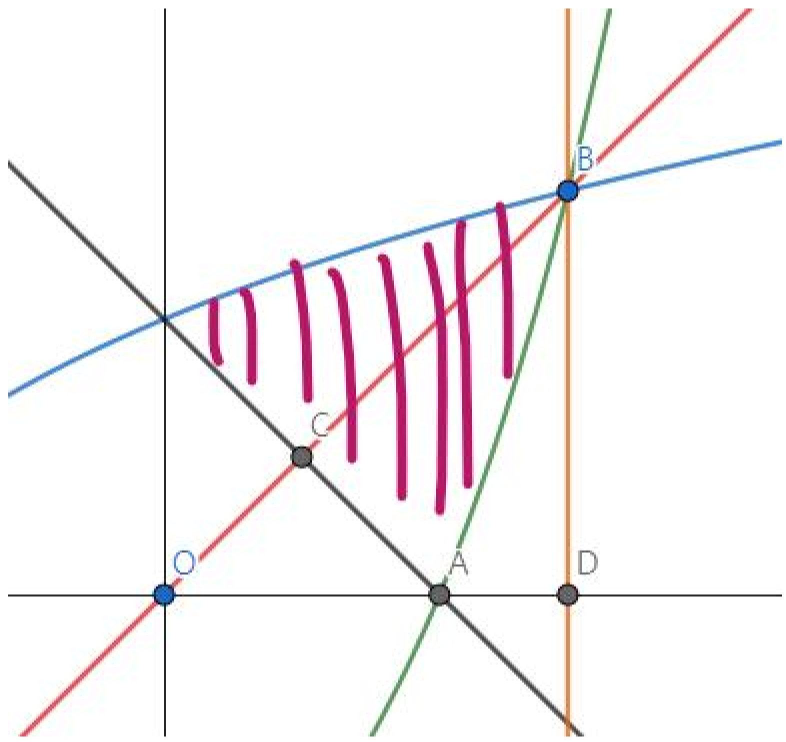
함수 $g(x)$는 연속함수이므로 $\lim_{x\to-1}g(x)=g(-1)$, $\lim_{x\to2}g(x)=g(2)$가 성립합니다. $g(2)=3$이므로 $\lim_{x\to2}g(x)=\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{-2x+4}=3$이어야 하고, 우선 $\lim_{x\to2}(-2x+4)=0$이므로 $\lim_{x\to2}f(x)=f(2)=0$일 필요가 있습니다.
함수 $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로 $f(x)=(x-2)(x-a)(x-b)$로 놓을 수 있고, $\lim_{x\to2}\frac{f(x)}{-2x+4}$
$=\lim_{x\to2}\frac{(x-2)(x-a)(x-b)}{-2(x-2)}=\lim_{x\to2}\frac{-(x-a)(x-b)}{2}=3$이어야 합니다.

$\lim\limits_{x\to-1} g(x)=g(-1)$이 성립해야 하므로 $\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{2x+2}$의 값이 존재해야 하고, $\lim\limits_{x\to-1}(2x+2)=0$이므로 $\lim\limits_{x\to-1}f(x)=f(-1)=0$이어야 합니다.
이때 $a=-1$이라고 하면 $f(x)=(x-2)(x+1)(x-b)$입니다.
$=\lim\limits_{x\to2}\frac{(x-2)(x+1)(x-b)}{-2(x-2)}=\lim\limits_{x\to2}\frac{-(x+1)(x-b)}{2}=-\frac{3}{2}(2-b)=3$
에서 $b=4$입니다.
$f(x)=(x-2)(x+1)(x-4)$이고, $\lim\limits_{x\to-1}g(x)=g(-1)$에서
$\lim\limits_{x\to-1}\frac{f(x)}{2x+2}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x-2)(x+1)(x-4)}{2(x+1)}=\lim\limits_{x\to-1}\frac{(x-2)(x-4)}{2}$
$=\frac{-3\times(-5)}{2}=\frac{15}{2}$입니다.

12. 삼각함수의 그래프에 대한 문제입니다.
점 A의 좌표를 $(t, \tan\frac{\pi t}{2})$라고 하면 $0<t<1$이고, $\tan\frac{\pi t}{2}>1$에서 $\frac{\pi}{4}<\frac{\pi t}{2}<\frac{\pi}{2}$이며, $\frac{1}{2}<t<1$입니다.
두 점 A, B의 x좌표의 차이가 1이므로 점 B의 좌표는 $(t+1, \tan\frac{\pi(t+1)}{2})$로 놓을 수 있습니다. 선분 BC의 중점의 x좌표가 2이므로 점 C의 좌표는 $(3-t, \tan\frac{\pi(3-t)}{2})$입니다.
선분 AC의 중점의 y좌표는 $\frac{1}{2}\left\{\tan\frac{\pi t}{2}+\tan\frac{\pi(3-t)}{2}\right\}=3$에서
$\tan\frac{\pi t}{2}+\tan(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi t}{2})=6$, $\tan(\frac{3\pi}{2}-\frac{\pi t}{2})=\frac{1}{\tan\frac{\pi t}{2}}$에서
$\tan\frac{\pi t}{2}=d$라고 하면 $d+\frac{1}{d}=6$, $d^2-6d+1=0$, $d>1$이므로 $d=3+2\sqrt{2}$입니다.
선분 AB의 중점의 y좌표는 $\frac{1}{2}\left\{\tan\frac{\pi t}{2}+\tan\frac{\pi(t+1)}{2}\right\}$이며,
$\tan\frac{\pi(t+1)}{2}=\tan(\frac{\pi t}{2}+\frac{\pi}{2})=-\frac{1}{\tan\frac{\pi t}{2}}$에서 선분 AB의 중점의 y좌표는 $\frac{1}{2}(d-\frac{1}{d})=\frac{1}{2}(3+2\sqrt{2}-\frac{1}{3+2\sqrt{2}})=2\sqrt{2}$입니다.

13. 지수함수의 그래프에 대한 문제입니다.
점 A의 x좌표를 a라고 하면 $2^a-4<0$이므로 $|2^a-4|=4-2^a$, $4-2^a=\frac{k+2^a}{3}$이 성립하고, $\frac{4}{3}\times2^a=4-\frac{k}{3}$, $2^a=3-\frac{k}{4}$에서 $a=\log_2(3-\frac{k}{4})$입니다.
점 B의 x좌표를 b라고 하면 $2^b-4>0$이므로 $|2^b-4|=2^b-4$, $2^b-4=\frac{k+2^b}{3}$이 성립하고, $\frac{2}{3}\times2^b=4+\frac{k}{3}$, $2^b=6+\frac{k}{2}$에서 $b=\log_2(6+\frac{k}{2})$입니다.
$b-a=2$에서 $\log_2(6+\frac{k}{2})=2+\log_2(3-\frac{k}{4})=\log_2 4(3-\frac{k}{4})$, $\log_2(6+\frac{k}{2})=\log_2(12-k)$, $6+\frac{k}{2}=12-k$, $\frac{3}{2}k=6$, $k=4$입니다.
이때 $a=\log_2 2=1$로 점 A의 좌표는 (1, 2), $b=\log_2 8=3$로 점 B의 좌표는 (3, 4)입니다.
점 C의 좌표는 (2, 0)이며, 선분 AB의 길이는 $2\sqrt{2}$이고 직선 AB($x-y+1=0$)와 점 C 사이의 거리는 $\frac{|2-0+1|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{3}{\sqrt{2}}$입니다.
따라서 삼각형 ABC의 넓이는 $\frac{1}{2}\times2\sqrt{2}\times\frac{3}{\sqrt{2}}=3$입니다.

14. 사잇값 정리와 적분에 대한 문제입니다.
$f(x)=x^3+x-1$에 대하여 $f(\alpha)=\alpha^3+\alpha-1=0$이 성립합니다.
$f(\frac{2}{3})=-\frac{1}{27}<0$이고, $f(\frac{7}{10})=\frac{43}{1000}>0$이므로 사잇값 정리에 의하여 $\frac{2}{3}<\alpha<\frac{7}{10}$이 성립합니다. (참)
ㄴ에서, 곡선 $y=f(x)$와 좌표축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_0^\alpha|f(x)|dx$로 구할 수 있습니다. $0\le x\le\alpha$에서 $f(x)\le0$이므로 $\int_0^\alpha\{-f(x)\}dx=\int_0^\alpha\{-x^3-x+1\}dx$가 넓이가 됩니다.
$\left[-\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{2}x^2+x\right]_0^\alpha=\alpha-\frac{\alpha}{4}(\alpha^3+2\alpha)$인데, $\alpha^3+\alpha-1=0$에서 $\alpha^3+\alpha=1$이고, $\alpha-\frac{\alpha}{4}(\alpha^3+2\alpha)=\alpha-\frac{\alpha}{4}(\alpha^3+\alpha+\alpha)$
$=\alpha-\frac{\alpha}{4}(1+\alpha)=\frac{3\alpha-\alpha^2}{4}$입니다. (참)
ㄷ에서, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$과 직선 $x+y=\alpha$로 둘러싸인 부분의 넓이는 그림에서 빗금 친 부분과 같습니다.



곡선 $y=f(x)$와 x축과의 교점을 A라고 하고, 두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$이 만나는 점을 B라고 하면 점 A의 x좌표는 α이고, 점 B는 직선 $y=x$ 위에 있습니다. 점 B의 좌표를 구하기 위해 방정식 $f(x)=x$를 풀면 $x^3+x-1=x$, $x=1$이고, 점 B의 좌표는 (1, 1)입니다.
점 A에서 직선 $y=x$에 내린 수선의 발을 C라고 하고, 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 D라고 하면 그림에서 빗금 친 부분의 넓이는 직선 $y=x$에 의하여 이등분되며, 이등분된 부분의 넓이는 삼각형 BOD의 넓이에서 삼각형 COA의 넓이를 뺀 뒤, 곡선 $y=f(x)$와 x축, 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이를 뺀 것과 같습니다.
우선 삼각형 BOD의 넓이는 $\frac{1}{2}\times1\times1=\frac{1}{2}$이며, 삼각형 COA의

넓이는 $\frac{1}{2}\times\frac{\alpha}{2}\times\alpha=\frac{\alpha^2}{4}$입니다. 또한 곡선 $y=f(x)$와 x축, 직선 $x=1$로 둘러싸인 부분의 넓이는 $\int_\alpha^1 f(x)dx=\left[\frac{x^4}{4}+\frac{x^2}{2}-x\right]_\alpha^1$ $=-\frac{1}{4}+\alpha-\frac{\alpha}{4}(\alpha^3+2\alpha)=\frac{3\alpha-\alpha^2-1}{4}$입니다.

따라서 빗금 친 부분이 직선 $y=x$에 의하여 이등분된 영역의 넓이는 $\frac{1}{2}-\frac{\alpha^2}{4}-\frac{3\alpha-\alpha^2-1}{4}=\frac{3-3\alpha}{4}$이며, 빗금 친 부분의 전체 넓이는 $\frac{3}{2}(1-\alpha)$입니다. ㄱ에서 $\frac{2}{3}<\alpha<\frac{7}{10}$이므로

$\frac{9}{20}<\frac{3}{2}(1-\alpha)<\frac{1}{2}$이고, 주어진 부분의 넓이는 $\frac{9}{20}$보다 크고 $\frac{1}{2}$보다 작습니다. (참)

따라서 ㄱ, ㄴ, ㄷ 모두 옳습니다.

15. 귀납적으로 정의된 수열에 대한 문제입니다.
$a_{n+1}(a_{n+1}-1)=a_n(a_n+1)$을 정리하면
$(a_{n+1})^2-a_{n+1}-(a_n)^2-a_n=0$, $(a_{n+1}+a_n)(a_{n+1}-a_n-1)=0$
에서 $a_{n+1}=-a_n$ 또는 $a_{n+1}=a_n+1$입니다.
주어진 수열이 조건 (나)를 만족시키는 경우를 몇 가지 나열하면 다음과 같습니다.
(첫째항부터 제10항까지)
(5, 6, 7, 8, 9, -9, -8, 8, 9, 10)
(5, -5, 5, -5, 5, 6, 7, 8, 9, 10)
(5, 6, -6, 6, 7, 8, -8, 8, 9, 10)
$1\le n\le 9$인 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=-a_n$인 자연수 n은 4개, $a_{n+1}=a_n+1$인 자연수 n은 5개가 필요합니다.
a_4+a_8이 최대인 경우, 주어진 수열은 다음과 같습니다.
(5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, -12, -11)
$a_4=8$이고 $a_8=12$이므로 a_4+a_8의 최댓값은 20입니다.
a_4+a_8이 최소인 경우 주어진 수열은 다음과 같습니다.
(5, 6, 7, -7, 7, 8, 9, -9, 9, 10)
$a_4=-7$이고 $a_8=-9$이므로 a_4+a_8의 최솟값은 -16입니다.
따라서 a_4+a_8의 최댓값과 최솟값의 합은 4입니다.

16. 로그함수의 그래프에 대한 문제입니다.
곡선 $y=\log_3(x-a+1)$의 점근선은 직선 $x=a-1$이고, $a-1=4$에서 $a=5$입니다.

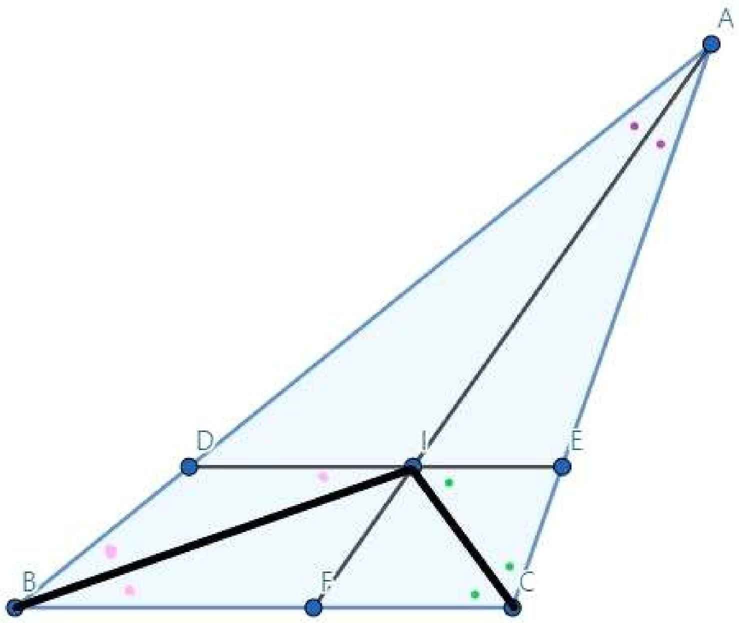
17. 곡선에 접하는 직선에 대한 문제입니다.
$f(x)=x^3-x^2-x+2$라고 하면 $f'(x)=3x^2-2x-1$이고,
$f'(2)=12-4-1=7$입니다. 점 (2, 4)에서의 접선의 방정식은 $y=7(x-2)+4$, $y=7x-10$으로 $m-n=7-(-10)=17$입니다.

18. 등비수열에 대한 문제입니다.
등비수열의 첫째항을 a, 공비를 r이라고 하면
$\frac{a_{12}}{a_{10}+a_8}=\frac{ar^{11}}{ar^9+ar^7}=\frac{r^4}{r^2+1}=\frac{9}{4}$이 성립하고, $4r^4-9r^2-9=0$
$(4r^2+3)(r^2-3)=0$에서 $r^2=3$입니다.
$a_3=ar^2=75$이므로 $a_1=a=\frac{75}{r^2}=25$입니다.

19. 함수의 극한에 대한 문제입니다.
$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)\{f(x)-2x^2\}}{x^3}=4$에서 $f(x)\{f(x)-2x^2\}$가 삼차함수이고, $f(x)$는 이차함수이므로 $f(x)-2x^2$는 일차함수여야 합니다.
이때 $f(x)=2x^2+mx+n$라고 하면
$\lim_{x\to\infty}\frac{(2x^2+mx+n)(mx+n)}{x^3}=2m=4$에서 $m=2$입니다.
$f(x)=2x^2+2x+n$에 대하여 $\lim_{x\to-2}\frac{f(x)-3}{x-(-2)}$의 값이 존재하므로 $f(-2)=3$이어야 하며, 이때 $n=-1$로 $f(x)=2x^2+2x-1$입니다.
$f(x)-3=2x^2+2x-4=2(x+2)(x-1)$에서 $b=1$이며,
$f(2b)=f(2)=11$입니다.

20. 정적분으로 정의된 함수에 대한 문제입니다.
$\int_2^x f(t)dt=xf(x)-ax^3-bx^2$의 양변을 미분하면
$f(x)=xf'(x)+f(x)-3ax^2-2bx$, $xf'(x)=3ax^2+2bx$,
$f'(x)=3ax+2b$입니다.
$f(x)=\frac{3}{2}ax^2+2bx$에서 $f(2)=6a+4b$이고,
$\int_2^x f(t)dt=xf(x)-ax^3-bx^2$의 양변에 $x=2$를 대입하면
$2f(2)-8a-4b=4a+4b=0$, $b=-a$입니다.
$f(x)=\frac{3}{2}ax^2-2ax$에서 $\int_0^x f(x)dx=\frac{1}{2}ax^3-ax^2$이고, x에 대한 방정식 $\int_0^x f(t)dt+\frac{16}{9}=0$, $\frac{1}{2}ax^3-ax^2+\frac{16}{9}=0$의 서로 다른 실근의 개수가 2입니다.
$g(x)=\frac{1}{2}ax^3-ax^2+\frac{16}{9}$이라고 하면
$g'(x)=f(x)=\frac{3}{2}ax^2-2ax$이고, $g'(0)=g'(\frac{4}{3})=0$입니다.
$g(0)\neq 0$이므로 $g(\frac{4}{3})=0$인 경우 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2가 됩니다.
$g(\frac{4}{3})=\frac{32}{27}a-\frac{16}{9}a+\frac{16}{9}=-\frac{16a}{27}+\frac{16}{9}=0$에서 $a=3$이며,
$f(x)=\frac{9}{2}x^2-6x$입니다. $f(k)=\frac{9}{2}k^2-6k=\frac{45}{2}$에서
$3k^2-4k-15=0$, $(k-3)(3k+5)=0$, $k>0$이므로 $k=3$입니다.

21. 코사인법칙을 활용한 문제입니다.
그림에서 두 선분 BC, DE가 서로 평행하므로 $\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{ABC}$이며, 두 삼각형 ADE, ABC는 각 A를 공유하므로 서로 닮음입니다.
두 삼각형 ADE, ABC의 넓이의 비가 9:16이므로 두 삼각형 ADE, ABC의 닮음비는 $\sqrt{9}:\sqrt{16}=3:4$입니다.
이때 두 삼각형 ADE, ABC의 둘레의 길이의 비는 3:4입니다.



삼각형의 내심의 성질에 의하여 $\angle \mathrm{ABI} = \angle \mathrm{CBI}$이며, $\angle \mathrm{ACI} = \angle \mathrm{BCI}$입니다. 또한 두 선분 DE, BC가 서로 평행하므로 $\angle \mathrm{DIB} = \angle \mathrm{CBI}$, $\angle \mathrm{EIC} = \angle \mathrm{BCI}$이 성립합니다.

$\angle \mathrm{DBI} = \angle \mathrm{DIB}$이므로 삼각형 DBI는 $\overline{\mathrm{DB}} = \overline{\mathrm{DI}}$인 이등변삼각형이고, $\angle \mathrm{ECI} = \angle \mathrm{EIC}$이므로 삼각형 ECI는 $\overline{\mathrm{EC}} = \overline{\mathrm{EI}}$인 이등변삼각형입니다.

이때 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{DB}} = \overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{DI}}$이고, $\overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AE}} + \overline{\mathrm{EC}} = \overline{\mathrm{AE}} + \overline{\mathrm{EI}}$이므로 $\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{AD}} + \overline{\mathrm{DE}} + \overline{\mathrm{EA}}$이므로 삼각형 ADE의 둘레의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{AC}}$와 같습니다.

삼각형 ABC의 둘레의 길이는 $\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{AC}} + \overline{\mathrm{BC}}$이고, 선분 BC의 길이가 5이므로 $\overline{\mathrm{AB}} + \overline{\mathrm{AC}} = k$라고 하면 $k : (k+5) = 3 : 4$에서 $k = 15$입니다.

두 선분 AB, AC의 길이의 합이 15이므로 $\overline{\mathrm{AC}} = d$라고 하고, $\overline{\mathrm{AB}} = 15 - d$라고 하고 삼각형 ABC에 코사인법칙을 적용하면

$(15-d)^2 = 5^2 + d^2 - 2 \times 5 \times d \times \cos \mathrm{C}$, $\cos \mathrm{C} = -\dfrac{1}{3}$이므로

$d^2 - 30d + 225 = d^2 + 25 + \dfrac{10}{3}d$, $\dfrac{100}{3}d = 200$, $d = 6$이므로

$\overline{\mathrm{AC}} = 6$, $\overline{\mathrm{AB}} = 9$입니다.

삼각형의 내심의 성질에 의하여 $\angle \mathrm{BAF} = \angle \mathrm{CAF}$이며, 각의 이등분선의 성질에 의하여 $\overline{\mathrm{AB}} : \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BF}} : \overline{\mathrm{FC}}$이며, $\overline{\mathrm{BF}} : \overline{\mathrm{FC}} = 3 : 2$에서 선분 BC의 길이가 5이므로 $\overline{\mathrm{BF}} = 3$, $\overline{\mathrm{FC}} = 2$입니다.

삼각형 AFC에서 코사인법칙을 적용하면

$\overline{\mathrm{AF}}^2 = 6^2 + 2^2 - 2 \times 6 \times 2 \times \left(-\dfrac{1}{3}\right) = 48$으로, 선분 AF를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 $\overline{\mathrm{AF}}^2 = 48$입니다.

22. 사차함수의 그래프의 개형을 파악하고, 최댓값과 최솟값의 변화를 관찰하는 문제입니다.

집합 B의 원소의 개수가 3이므로 방정식 $f'(x) = 0$은 서로 다른 3개의 실근을 갖습니다.

$f'(x) = 4d(x-a)(x-b)(x-c)$라고 하면(단, a, b, c는 서로 다른 실수이고, d는 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수) 집합 B는 $B = \{a, b, c\}$이며, 집합 $B - A$의 원소가 0뿐이므로 a, b, c 중 하나는 0입니다.

$a = 0$이라고 하면 집합 A는 $A = \{b, c\}$이며, $f(b) = f(c) = 0$이 성립하여 $f(x) = d(x-b)^2(x-c)^2$가 되고, $f(x) = 4dx(x-b)(x-c)$입니다.

$f(x) = d(x-b)^2(x-c)^2$를 미분하면

$f'(x) = 2d(x-b)(x-c)^2 + 2d(x-b)^2(x-c)$

$= 2d(x-b)(x-c)(2x-b-c)$에서 $\dfrac{b+c}{2} = 0$, $c = -b$입니다.

이때 $f(x) = d(x+b)^2(x-b)^2$로 놓을 수 있습니다.(여기서 작성하는 해설은 $b > 0$으로 간주합니다.)

함수 $m(t)$는 구간 $[-\sqrt{2}, t]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값으로, 함수 $f(x)$는 $x = -b$ 또는 $x = b$에서 최솟값 0을 가지므로 함수 $m(t)$는 정의역에 속하는 모든 원소에 대하여 함숫값이 0인 상수함수입니다.

$-b < -\sqrt{2}$인 경우 함수 $m(t)$는 $t \ge b$인 경우에만 $m(t) = 0$이 되므로 상수함수가 아닙니다.

$-b > -\sqrt{2}$인 경우 함수 $m(t)$는 $t \ge -b$인 경우에만 $m(t) = 0$이 되므로 상수함수가 아닙니다.

따라서 $b = -\sqrt{2}$이고,

$f(x) = d(x+\sqrt{2})^2(x-\sqrt{2})^2 = d(x^4 - 4x^2 + 4)$이며, $f(0) = 4$이므로 $d = 1$이고, $f(x) = x^4 - 4x^2 + 4$입니다.

함수 $M(t)$는 구간 $[-\sqrt{2}, t]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값으로, 함수 $f(x)$는 $x = 0$에서 극댓값 4를 가지므로 $-\sqrt{2} < t \le 0$에서 $M(t) = f(t)$입니다.

방정식 $f(x) = 4$의 양의 실근을 구하면 $x^4 - 4x^2 + 4 = 4$, $x^2(x+2)(x-2) = 0$에서 $x = 2$이고, $x = 2$에서 함수 $f(x)$는 증가하는 상태이므로 $0 \le t \le 2$에서 $M(t) = 4$입니다.

$x \ge 2$에서 함수 $f(x)$는 증가하므로 $t \ge 2$에서 $M(t) = f(t)$입니다.

또한 $\displaystyle\lim_{x \to 2-} \frac{M(t) - M(2)}{x-2} = \frac{4-4}{x-2} = 0$이며,

$\displaystyle\lim_{x \to 2+} \frac{M(t) - M(2)}{x-2} = \lim_{x \to 2+} \frac{x^4 - 4x^2 + 4 - 4}{x-2} = \lim_{x \to 2} \frac{x^2(x+2)(x-2)}{x-2}$

$= 16$이므로 함수 $M(t)$는 $x = 2$에서 미분가능하지 않고, $k = 2$입니다.

$\displaystyle\int_{-1}^{3} M(t)dt = \int_{-1}^{0} M(t)dt + \int_{0}^{2} M(t)dt + \int_{2}^{3} M(t)dt$에서

$\displaystyle\int_{-1}^{0} M(t)dt = \int_{-1}^{0} (t^4 - 4t^2 + 4)dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{4t^3}{3} + 4t\right]_{-1}^{0} = \frac{43}{15}$

$\displaystyle\int_{0}^{2} M(t)dt = \int_{0}^{2} 4dt = 8$

$\displaystyle\int_{2}^{3} M(t)dt = \int_{2}^{3} (t^4 - 4t^2 + 4)dt = \left[\frac{t^5}{5} - \frac{4t^3}{3} + 4t\right]_{2}^{3} = \frac{313}{15}$

따라서 구하는 값은 $15\left(\dfrac{43}{15} + 8 + \dfrac{313}{15}\right) = 476$입니다.