예비 2024학년도

ELEC 모의고사

수학 영역

해설 자료 〔1〕

목차

검수자의 시험 총평

시험 총평을 정성스럽게 남겨주신 asdf1234님, Hayate님 감사드립니다.
아래 총평은 asdf1234님께서 작성해주셨습니다.

백분위 100	100
1등급컷	84
2등급컷	75
3등급컷	68

전반적으로 공통영역은 작년 6월, 9월, 수능에 비해 난이도가 다소 높다고 생각합니다. 괴랄하게 어렵지 않고 최근 트렌드인 빡빡한 준킬러와 예상치 못한 지점에서 시간이 다소 소요되는 문항들이 포진되어 있습니다. 쉬운 3점문항에도 수험생들이 학습할때 가졌으면 하는 안목과 태도들을 출제자분께서 심어놓았다고 생각합니다.

6번문항에서 흠칫한 수험생분들도 있을거라 생각합니다. 수험생들이 (sin + cos)자체를 치환하여 관찰하기 용이한 상태로 식조작하는 마인드를 배워갔으면 하는 문항입니다.

8번문항은 생각지도 못하게 점수 나가신 분들이 존재할 것 같습니다. 일단 8번문제에서 가져야 할 태도는 두 도함수의 관계는 각각 관찰하는것보다 빼서 관찰하는것이 편리하다는 점과 두 위치그래프의 차 함수에서 변곡점이 $t=2$인 것을 고려하여 원점이 어디에 존재할 수 있는지 가능한 모든 경우의 수를 생각했어야 합니다.

9번문항은 무난한 수열의 역추적 문항입니다.

10번문항은 문항번호에 비해 괴랄해보이지만 결국 삼각함수의 그래프는 직사각형8개를 바탕으로 작도해나간다면 막힘없이 해결할 수 있었습니다. 각DAE가 90°인것을 통해 기울기를 바로 파악할 수 있어야 했습니다.

11번 문항은 수직인 직선과 이차함수와의 근과 계수의 관계를 이용하여 Q의 x좌표를 구한뒤 닮음을 이용하여 해결한다면 계산이 그렇게 복잡하지 않았을것입니다.

12번 문항은 대칭성을 파악한 후, A좌표를(p.q)로 미지수 설정하고 B를 대칭성으로 구한뒤 C(p+q.-p+q)파악하고 CH직선식과 $y=x$을 연립하여 교점을 구하여 해결하였습니다. 수험생분들이 4점 초중반에서 턱 막히는 상황을 대비하기에 적합한문항이라 생각합니다.

18번문항에서는 수험생들이 $\{f(x)+f(-x)\}$함수 자체가 우함수임을 파악했어야 합니다.

19번 문항은 도함수가 연속이라면 원래함수는 미분가능함을 파악해야 합니다. 이는 이미 교육청에도 수험생들이 알고 있겠지 생각하며 출제된 내용입니다. 함수 식 작성을 할 때 두함수의 차를 이용하여 작성할 줄도 알아야합니다. 이때 $(a-x)$는 이차함수의 $x=k$에서 접선역할을 하는 구나 생각을 떠올리셔도 좋습니다. 마지막 처리 과정에서 직사각형에서 이차함수 넓이공식을 이용했다면 계산이 쉬웠을 것입니다.

수험생분들이 막히거나 틀렸을만한 13 14 15 21 22는 처음 문제를 봤을때 풀었던 방식의 손풀이와 comment로 대체하겠습니다!

문항을 풀면서 문항 제작, 검토에대한 출제자분의 고뇌, 노력에 감탄하며 퀄리티 좋고 학습차원에서 배울점이 많은 문항들을 무료 배포해주셔서 다시 한번 감사 인사를 드립니다.

출제자의 시험 총평 / 출제자의 말

27번 문항 : 극한값을 이용하여 부정적분의 적분상수를 구하는 문제였습니다. 2023 수능 29번과 유사한 문항이기에 극한값의 부호를 치환하는 과정만 제외하면 어려운 부분이 없습니다.

28번 문항 : 전형적인 라이프니츠 유형이었습니다. 미분 계산이 빡빡하나, 중간중간 간단히 할 부분은 묶어주거나 상수로 바꿔주는 등의 전략을 취했다면 실수 확률을 확 줄일 수 있습니다.

29번 문항 : $\pi-\theta$를 α로 치환할 수 있는가, 또 적절한 보조선을 통해 정확한 방법으로 $g(\theta)$를 구할 수 있느냐가 관건이었습니다. $g(\theta)$를 구하는 과정 중 $\overline{\mathrm{O'H}}$가 $\theta<\frac{\pi}{2}$일 때 음수가 되는 것에 대해서 이해하기 난해할 수 있습니다. $\theta>\frac{\pi}{2}$일 때는 $\overline{\mathrm{O'H}}$가 다른 선분의 일부분이며 $\theta<\frac{\pi}{2}$일 때는 선분의 일부분이 아닌 선분의 제(除)해지는 부분으로 보면 됩니다. 보조선 긋기가 어렵고 $\overline{\mathrm{O'H}}$의 기하적인 이해 두 포인트 때문에, 개인적으로 30번보다 어려운 문항이었다고 생각됩니다.

30번 문항 : 점대칭함수와 선대칭함수, 그리고 그래프 개형을 정확히 그릴 수 있는지를 물어보는 문제였습니다. 또한 미지수의 '후보'를 찾을 때 정수 조건을 활용하여 케이스를 나눌 수 있는지의 발상을 요구합니다. (2021 7월 21번 참고) 사고 과정을 뜯어보면 복잡해 보이지만, 사실 직관적인 풀이로는 빨리 풀 수 있는 문제입니다.

5페이지부터 자세한 해설이 있으니 참고하시기 바랍니다.

2023학년도 대학수학능력시험은 준킬러 위주가 아닌 킬러 위주의 문항 구성으로 출제되었습니다. 이는 바로 직전 시험인 2023학년도 9월 모의평가의 기조와도 배치되는 양상이었습니다. 평가원이 언제든 마음만 먹으면 22수능형 '준킬러 폭격'과 23수능형 '킬러 촌철살인' 스타일을 오갈 수 있다는 점을 주의해야 한다고 생각했습니다. 이에 따라 2023 수능에서 다시 일보 물러선 '준킬러 폭격' 스타일로 문항을 구성해 보았습니다.

1~8번에서 최대한 기본적인 것을 묻고자 하였지만 shortcut을 제대로 활용하지 못했다면 조금 빡빡하게 느껴졌을 수 있습니다. 조급해지지 맙시다. 9~15번, 19~21번은 난이도 차이가 거의 나지 않습니다. 오히려 15번이 13, 14번보다 쉽고 20번이 21번보다 어려웠을 수 있습니다. 문항 순서에 신경쓰지 말고 꿋꿋이 풀자는 교훈을 얻어갑시다. (2022 수능 공통 미적, 2023 6평 미적, 2023 9평 공통 참고)

성적 분포 양상은 2022학년도(시행) 10월 학평, 2022학년도 수능과 비슷하고, 등급컷 분포 양상은 2023학년도 수능과 비슷할 것으로 보입니다. 만점자의 비중이 상당히 높게 나오지만 1등급컷 자체는 낮을 것으로 보입니다.

<출제자의 말>

이 실전 모의고사는 제가 고2~고3일 때 만든 자작 문제 중 계산이 거의 없고 발상 위주의 신박한, 가장 좋은 퀄리티의 문항만을 선별하여 구성한 시험지입니다. 이제는 문항 제작을 그만두게 되었지만, 오르비에 제가 만들었던 좋은 문항을 한 데 엮어 무료배포하면 좋을 것 같다고 생각하였습니다. 제가 오르비에 올리는 마지막 수학 과목 학습자료이니만큼, 영혼을 갈아넣어 양질의 퀄리티의 문항을 제공해드리고자 하였습니다. 2024학년도 수능을 준비하시는 여러분께 많은 도움이 되었으면 합니다.

예비 2024학년도 ELEC 모의고사

수학 영역 정답표

<table>
<tr><td colspan="6">공통 과목</td><td colspan="3">선택 과목
미적분</td></tr>
<tr><td>문항
번호</td><td>정답</td><td>배점</td><td>문항
번호</td><td>정답</td><td>배점</td><td>문항
번호</td><td>정답</td><td>배점</td></tr>
<tr><td>1</td><td>③</td><td>2</td><td>12</td><td>③</td><td>4</td><td>23</td><td>②</td><td>2</td></tr>
<tr><td>2</td><td>④</td><td>2</td><td>13</td><td>⑤</td><td>4</td><td>24</td><td>③</td><td>3</td></tr>
<tr><td>3</td><td>④</td><td>3</td><td>14</td><td>②</td><td>4</td><td>25</td><td>⑤</td><td>3</td></tr>
<tr><td>4</td><td>①</td><td>3</td><td>15</td><td>③</td><td>4</td><td>26</td><td>②</td><td>3</td></tr>
<tr><td>5</td><td>①</td><td>3</td><td>16</td><td>1</td><td>3</td><td>27</td><td>④</td><td>3</td></tr>
<tr><td>6</td><td>④</td><td>3</td><td>17</td><td>18</td><td>3</td><td>28</td><td>①</td><td>4</td></tr>
<tr><td>7</td><td>⑤</td><td>3</td><td>18</td><td>32</td><td>3</td><td>29</td><td>150</td><td>4</td></tr>
<tr><td>8</td><td>①</td><td>3</td><td>19</td><td>16</td><td>3</td><td>30</td><td>74</td><td>4</td></tr>
<tr><td>9</td><td>③</td><td>4</td><td>20</td><td>23</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>10</td><td>②</td><td>4</td><td>21</td><td>104</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>11</td><td>②</td><td>4</td><td>22</td><td>75</td><td>4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

예비 2024 ELEC 모의고사

수학 영역 해설지

1. 지수
$2^{3\sqrt{3}}\times 2^{-3\sqrt{3}+6}=2^6=64$

[정답] ③

2. 미분
$f'(x)=9x^2+4x+1$이므로 $f'(1)=14$

[정답] ④

3. 수열
$a_2+a_4+a_6=30$

$a_4=10$

$a_8+2a_{11}=a_8+a_{10}+a_{12}=75$

$a_{10}=25$

공차의 6배는 15이다.

$a_4+4\times(\text{공차})=30$

[정답] ③

4. 함수의 연속
$x=1$에서 좌극한 5

$x=1$에서 우극한 $1+k$

$x=1$에서 함숫값 5

세 값이 모두 같으려면 $k=4$

[정답] ①

5. 미분
$f(2)=5,\ f'(2)=3$

$\frac{d}{dx}\{x^2f(x)\}=2xf(x)+x^2f'(x)$에

$x=2$를 대입하면 $4f(2)+4f'(2)=32$

직선 $y=32(x-2)+20$이 $y=g(x)$

$x=1$ 대입하면 $32-44=-12$

[정답] ①

6. 삼각함수
$32\sin\theta=\frac{9}{\cos\theta}$

$\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{32}$이므로

$\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{1+\frac{9}{16}}=\frac{5}{4}$

$(\sin\theta+\cos\theta)^2+(\sin\theta+\cos\theta)-2$

$=\frac{25}{16}+\frac{5}{4}-2=\frac{13}{16}$

[정답] ④

7. 수열의 합
$\sum_{k=1}^{5}k^2=\frac{5\times6\times11}{6}=55$

$\sum_{k=1}^{5}\frac{1}{a_k}=\frac{3\times(2^5-1)}{2-1}=93$

$55+93=148$

[정답] ⑤

8. 미분
$x_{\mathrm{P}}(t)=2t^3+t^2+4t$

$x_{\mathrm{Q}}(t)=t^3+7t^2+kt$

$x_{\mathrm{P}}(t)-x_{\mathrm{Q}}(t)=t^3-6t^2+(4-k)t$

(i) $k=4$일 때와

(ii) $k=-5$일 때 위 함수는 $x>0$일 때 $y=0$인 x값이 하나만 존재한다.

k의 최솟값은 -5이다.

[정답] ①

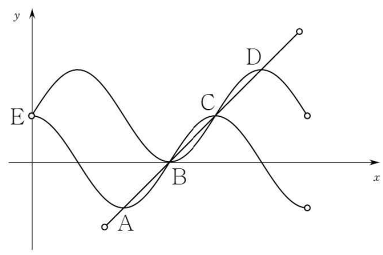
9. 수학적 귀납법

a_4	a_3	a_2	a_1
5	2	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{4}$
			X
		4	$\frac{3}{2}$
			16
	25	12	$\frac{11}{2}$
			144
		625	X
			X

$m=-\frac{1}{4},\ M=144$이다.

[정답] ③

10. 삼각함수의 그래프
$y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프 개형을 그려보면 다음과 같다.



높이가 같고 밑변의 길이가 같은 두 삼각형 BDE와 ACE의 넓이는 2이다.

삼각형 ACE는 직각이등변삼각형이므로

$\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{AC}}=2,\ \overline{\mathrm{CE}}=2\sqrt{2}=\frac{2\pi}{b}$

따라서 $a=\frac{1}{\sqrt{2}},\ b=\frac{\pi}{\sqrt{2}}$

$y=mx+n$은 $\mathrm{B}\left(\frac{3}{\sqrt{2}},0\right)$을 지나고 기울기가 1인 직선이다.

$m=1,\ n=-\frac{3}{\sqrt{2}}$

$a^2+m^2+n^2=6$

[정답] ②

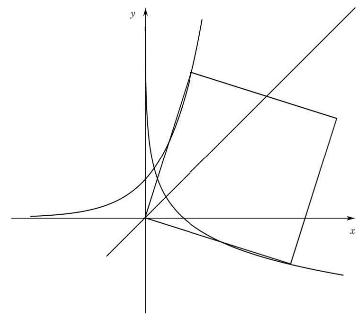
11. 함수의 극한
점 P에서 법선의 기울기는 미분값의 역수에서 양음을 전환한 $-\frac{1}{2t}$이고, 직선 PQ의 방정식은 $y=-\frac{1}{2t}x+t^2+\frac{1}{2}$이다.

$y=x^2$와의 두 교점 중 x좌표가 작은 점의 x좌표는 근과 계수의 관계에 따라 $-\frac{1}{2t}-t$이다.

$\overline{\mathrm{PH}}=t^2,\ \overline{\mathrm{QH}}=\frac{1}{4t^2}+1+t^2$이므로

$\lim_{t\to0+}f(t)=\lim_{t\to0+}t^2\left(\frac{1}{4t^2}+1+t^2\right)=\frac{1}{4}$이다.

12. 지수로그의 그래프
$y=\log_{\frac{1}{3}}x$는 $y=3^x$를 원점에 대하여 시계방향으로 직각 돌린 꼴과 같다. 이에 따라 A, B, C, O로 정사각형이 만들어지도록 나타내면 다음과 같다.



각 점의 좌표를 나타내면 $\mathrm{A}(t,3^t)$, $\mathrm{B}(3^t,-t)$, $\mathrm{C}(3^t+t,3^t-t)$이다. 점 C에서 $y=x$에 내린 수선의 기울기는 -1이므로 $\mathrm{H}(3^t,3^t)$이다.

$\overline{\mathrm{AH}}=3^t-t,\ \overline{\mathrm{BH}}=3^t+t$이므로

조건 (나)에 의하여 $3^t=3\sqrt{3},\ t=\frac{3}{2}$

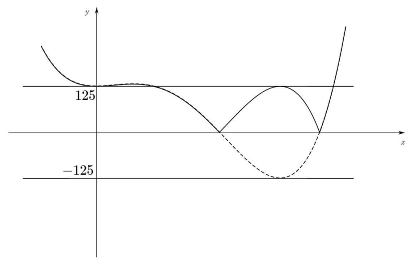
사각형 AOBC의 넓이는 $\overline{\mathrm{OA}}^2$와 같다.

$\frac{9}{4}+27=\frac{117}{4}$

[정답] ③

13~15. 공통킬러 손해설 참조

* 14번 참고 자료 ($y=f(x)$ 개형)



16. 로그

$\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$, $\tan\frac{\pi}{6}=\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\frac{1}{2}-\left(-\frac{1}{2}\right)=1$

[정답] 1

17. 부정적분

$f'(x)$를 부정적분하면

$f(x)=x^4+x^3-6x^2+9x+C$이다.

$f(1)=5+C=5$이므로 적분상수는 0

$f(2)=16+8-24+18=18$

[정답] 18

18. 미분

$f(x)+(-x)$는 우함수이다.

따라서 $|f(x)+f(-x)|$도 우함수이고, 이 함수는 모두 $x=-3$, $x=-1$, $x=1$, $x=3$에서 미분가능하지 않다.

$f(x)+f(-x)$

$=2(x+3)(x+1)(x-1)(x-3)$이고,

양변을 미분하면

$f'(x)-f'(-x)=8x^3-40x$

$x=-1$을 대입하면 답은 32이다.

[정답] 32

19. 정적분

$f(x)-f(0)$을 미분한 $g(x)$가 연속이므로 $f(x)$는 미분가능하다.

$f(k)-f(0)=0$이다.

(i) $k<0$이라면

$f(k)=f(0)$을 만족시키는 이차함수 x^2+ax+b는 $x=\frac{k}{2}$를 대칭축으로 가진다.

또한 $f'(k)=-1$이므로 $k=-1$이다.

(ii) $k>0$이라면

$f(k)=f(0)$을 만족시키는 k가 없다.

$a=1$이고, $f(x)$는 연속이므로

$2=b$

$f(x)=\begin{cases}-x+1 & (x\le -1)\\ x^2+x+2 & (x>-1)\end{cases}$이고,

$\int_{-2}^{-1}f(x)dx=\frac{5}{2}$

$\int_{-1}^{0}f(x)dx=\frac{11}{6}$

따라서 $\int_{-2}^{0}f(x)dx=\frac{13}{3}$이다.

[정답] 16

20. 연속

$f(x)$에 따라 구간함수 $g(x)$의 정의가 결정되고, 연속점의 수를 맞춰주기 위해 p를 조정한다고 생각해주자.

$f(x)$의 개형을 잡기 위한 특징

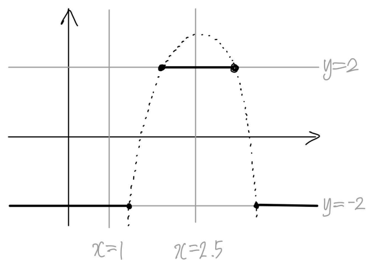
A : $f(1)$과 -2의 대소비교

B : $f(x)=2$의 판별식

을 통해 a를 기준으로 케이스 분류.

(i) $-4<a<-2$

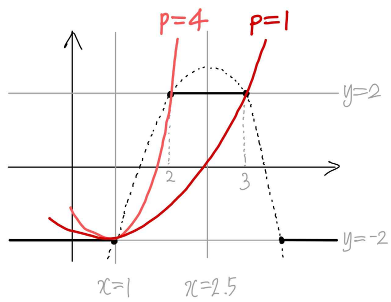
A에서 $f(1)<-2$이고 B에서 $D>0$



함수 $g(x)$의 불연속점이 2개가 되도록 하는 p가 존재하지 않는다.

(ii) $a=-2$

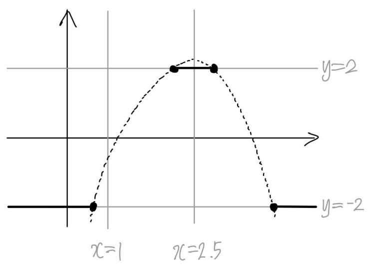
A에서 $f(1)=-2$이고 B에서 $D>0$



함수 $g(x)$의 불연속점이 2개가 되도록 하는 p의 값은 1, 4뿐이다.

(iii) $-2<a<-\frac{32}{17}$

A에서 $f(1)>-2$이고 B에서 $D>0$



함수 $g(x)$의 불연속점이 2개가 되도록 하는 p가 존재하지 않는다.

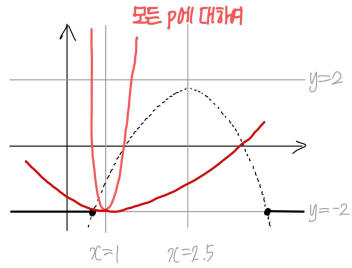
(iv) $a=-\frac{32}{17}$

A에서 $f(1)>-2$이고 B에서 $D=0$

함수 $g(x)$의 불연속점이 2개가 되도록 하는 p의 값은 $\frac{16}{9}$뿐이다.

(v) $-\frac{32}{17}<a<0$

A에서 $f(1)>-2$이고 B에서 $D<0$



모든 양수 p에 대하여 함수 $g(x)$의 불연속점이 2개다.

따라서 $a=-2$, $p_1=1$, $p_2=4$이다.

따라서 구하는 답은 $-2+5^2=23$

[정답] 23

21~22. 공통킬러 손해설 참조

23. 수열의 극한

분자에서 주도하는 지수 $2^2=4$

분모에서 주도하는 지수 4

분자에서 그 지수의 계수 3

분모에서 그 지수의 계수 $\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$

따라서 $\frac{9}{4}$가 극한값이다.

[정답] ②

24. 덧셈 공식

tan값이 3, $\frac{1}{3}$인 두 직선이 이루는 예각의 tan값은 덧셈공식에 의해

$\frac{3-\frac{1}{3}}{1+3\times\frac{1}{3}}=\frac{\frac{8}{3}}{2}=\frac{4}{3}$이다.

$\tan\theta=\frac{4}{3}$이고 θ는 예각이므로 $\sin\theta=\frac{4}{5}$

[정답] ③

25. 미분

양변을 미분하면

$2x+2y+2x\frac{dy}{dx}-6y\frac{dy}{dx}=0$

$x=2$, $y=1$을 대입하면

$6-2\frac{dy}{dx}=0$, 따라서 접선의 기울기는 3이다.

[정답] ⑤

26. 무등비

첫 도형은 반지름이 1인 반원이고, 넓이는 $\frac{\pi}{2}$이다. 또한 특수각의 변 길이 비를 통해

$\angle B_1A_1C_1=\frac{\pi}{3}$

A_2, C_2에서 선분 A_1C_1에 수선을 내리면 직사각형이 만들어진다.

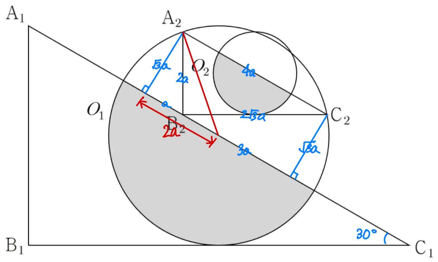
대충 닮음 이용해서 길이를 구하면 닮음비

$a=\frac{1}{\sqrt{7}}$

무등비 첫 넓이 $\frac{\pi}{2}$, 공비 $\frac{1}{7}$

무등비값은 $\frac{7}{12}\pi$

[정답] ②



27. 부정적분

$f'(x)=e^x+C_1$

$f(x)=e^x+C_1x+C_2$

(나) 조건을 해석하면

$\lim_{x\to-\infty}\{g(x)-x\}=k$

$\lim_{x\to-\infty}\{-f(x)-x\}=k$

따라서 $C_1=-1$이다.

$g(x)$는 미분가능하므로

$f''(x)=-f'(x)$

$e^x=1-e^x$의 실근이 p이다.

$p=-\ln 2$

$g(x)$는 연속이므로

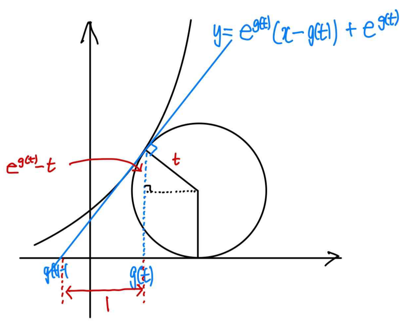
$-f(-\ln 2)=f'(-\ln 2)$

$C_2=-\ln 2$

$k=-C_2=\ln 2$

[정답] ④

28. 미분



그림과 같이 원과 $y=e^x$의 접점의 좌표를 $(g(t), f(t))$라 하자. $e^{g(t)}=f(t)$이다.

접점에서 $y=e^x$에 그은 접선의 방정식은 위 그림과 같다. 접선의 x절편은 $g(t)-1$이고, 직각삼각형의 닮음에 의해 위쪽 직각삼각형의 변의 길이는 빗변 t와 나머지 변 $e^{g(t)}-t$, $e^{g(t)}\{e^{g(t)}-t\}$이다.

$[f(t)\{f(t)-t\}]^2+\{f(t)-t\}^2=t^2$

$\{f(t)-t\}^2[\{f(t)\}^2+1]=t^2$

$t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$을 대입하면

$f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=F$라 하면

$\left(F^2-\frac{4}{\sqrt{3}}F+\frac{4}{3}\right)(F^2+1)=\frac{4}{3}$

$F=\sqrt{3}$, $f\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\sqrt{3}$

$\{f(t)-t\}^2[\{f(t)\}^2+1]=t^2$에서 양변을 미분하면

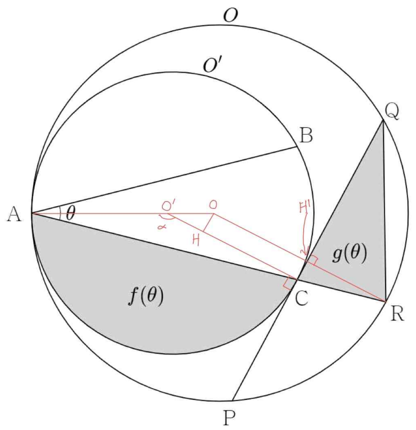
$$2\{f(t)-t\}\{f'(t)-1\}[\{f(t)\}^2+1]+\{f(t)-t\}^2\{2f(t)f'(t)\}=2t$$

$t=\frac{2\sqrt{3}}{3}$을 대입하여 정리하면

$f'\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{6}{5}$이다.

[정답] ①

29. 삼도극



원의 중심에서 현에 수선 그으면 이등분.

$\overline{PR}=\overline{QR}$

한편 $\pi-\theta=\alpha$로 치환하면

$\angle AO'C=\angle AOR=\alpha$

$f(\theta)$를 활꼴 근사를 통해 정리하면

(차수 확인, 빼기꼴 확인 유의)

$\frac{1}{12}\times 9\times\alpha^3=\frac{3}{4}\alpha^3$

$g(\theta)$를 구해보자.

$\overline{H'C}=\overline{OH}=\overline{OO'}\times\sin(\pi-\alpha)=\overline{OO'}\times\sin\alpha$

$\overline{H'Q}=\sqrt{\overline{OQ}^2-\overline{OH'}^2}$

$\overline{OQ}=4$, $\overline{OH'}=3-\overline{O'H}$

$\overline{O'H}=\cos(\pi-\alpha)=-\cos\alpha$ (3페이지 참고)

$\overline{H'Q}=\sqrt{6-6\cos\alpha+\sin^2\alpha}$

$\overline{CQ}=\sqrt{(7+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}+\sin\alpha$

$\angle QCR=\frac{\pi}{2}-\angle ACO'=\frac{\alpha}{2}$

$\overline{CR}=\frac{\overline{CH'}}{\cos\frac{\alpha}{2}}=\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{(7+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}+\sin\alpha\right)\times\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}\times\sin\frac{\alpha}{2}$$

근사로 삼차 나오게 정리하면

$g(\theta)=\frac{3}{4}\alpha^3$

$\lim_{\alpha\to0+}\frac{f(\theta)+g(\theta)}{\alpha}=\frac{3}{2}$

[정답] 150

30. 정적분

$h(x)$의 이계도함수가 연속이므로

$h'(x)=f(x)\{|g(x)|+g(x)\}$는

미분가능하다.

$|g(x)|+g(x)$는 $x=0$과 $x=m$에서

미분가능하지 않으므로 $f(0)=f(m)=0$

따라서 m은 짝수이다.

한편 함수 $x^2h(m)-2m\int_0^x h(t)dt$가

극값을 갖는 x값의 합이 35이므로 이의 도함수 $2xh(m)-2mh(x)$가 부호 변화를 갖는 x값의 합이 35이다.

$h(x)$를 정의하면 다음과 같다.

$$h(x)=\begin{cases}0 & (x\le 0)\\ 2\int_0^x \sin\frac{\pi}{2}t(mt-t^2)dt & (0<x<m)\\ h(m) & (x\ge m)\end{cases}$$

(i) $m=4k$ (k는 자연수)

함수 $y=\sin\frac{\pi}{2}x$가 $\left(\frac{m}{2}, 0\right)$에 대한

점대칭함수이고 함수 $y=mx-x^2$가

$x=\frac{m}{2}$에 대한 선대칭함수이므로 함수

$h'(x)$는 $\left(\frac{m}{2}, 0\right)$에 대한 점대칭함수이고,

$h(x)$는 $x=\frac{m}{2}$에 대한 선대칭함수이다.

따라서 $h(0)=h(m)=0$

따라서 함수

$2xh(m)-2mh(x)=2mh(x)$이고, 이는

$x=\frac{m}{2}$에 대한 선대칭함수이다.

$x=\frac{m}{2}$에서 위 함수는 부호 변화가

불가능하고,

(부호 변화가 일어나는 x의 개수)

$=2\times(0<x<\frac{m}{2}$에서 부호 변화가 발생한

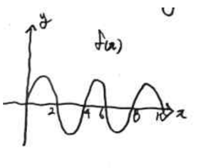
x의 개수)이다.

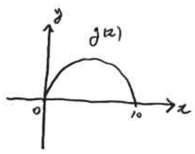
이는 $x=\frac{m}{2}$에 대해 대칭인 쌍을 이루므로

(α의 합)=(짝수 개수)$\times\dfrac{m}{2}=2k\times$(짝수) $\neq 35$이다. 따라서 $m\neq 4k$이다.

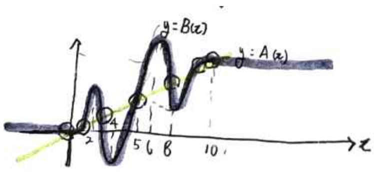
(ii) $m=4k-2$ (k는 자연수)
(i)에서와 같은 논리로 $0\le x\le m$에서 $h(x)$는 $\left(\dfrac{m}{2},\,h\!\left(\dfrac{m}{2}\right)\right)$에 대한 점대칭함수이다.
$2xh(m)-2mh(x)$도 $\left(\dfrac{m}{2},\,0\right)$에 대한 점대칭함수이다.
이 함수는 $x=0$과 $x=\dfrac{m}{2}$, $x=m$에서 부호 변화가 일어남이 자명하고,
점대칭함수의 성질에 의해 $x=\dfrac{m}{2}$를 제외한 위 함수의 부호 변화가 일어나는 x값들이 $x=\dfrac{m}{2}$를 중심으로 대칭인 쌍으로 존재하므로
(α의 합)=(3 이상의 홀수 개수)$\times\dfrac{m}{2}=35$
따라서 $m=10$이고 α의 개수가 7이거나 $m=14$이고 α의 개수가 5일 수 있다.

(i) $m=10$
$A(x)=2xh(m)$, $B(x)=2mh(x)$라 하자.
$0\le x\le 10$에서 $h'(x)=f(x)\times 2g(x)$이다.



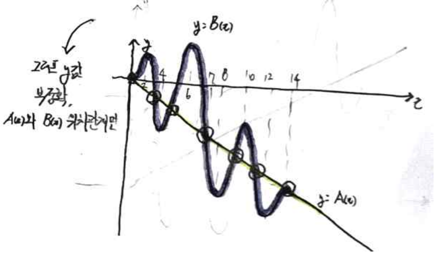


이를 고려하여 $y=A(x)$, $y=B(x)$를 그리면 다음과 같다.



(α의 합)$=5\times 7=35$이므로 조건을 충족한다.

(ii) $m=14$
(i)와 같은 원리로 $y=A(x)$, $y=B(x)$를 그리면 다음과 같다.



(α의 합)$=7\times 7=49$이므로 조건을 만족하지 않는다.

따라서 $m=10$이다.

$h(m)=h(10)$
$=2\times\displaystyle\int_0^{10}(10x-x^2)\sin\frac{\pi}{2}x\,dx$
$=4\times\displaystyle\int_0^{5}(10x-x^2)\sin\frac{\pi}{2}x\,dx$
$=4\times\left\{\left[-\dfrac{2}{\pi}(10x-x^2)\cos\dfrac{\pi}{2}x\right]_0^5+\displaystyle\int_0^5\frac{2}{\pi}(10-2x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx\right\}$
$=\dfrac{16}{\pi}\times\displaystyle\int_0^5(5-x)\cos\frac{\pi}{2}x\,dx=\frac{64}{\pi^3}$
따라서 $m+\pi^3h(m)=10+64=74$
[정답] 74