4점 vs A형 해설편

제 2 교시

수학 영역 (A형)

1. 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $2 \le a \le 30$, $2 \le b \le 30$ (나) 곡선 $y=a^x$와 직선 $y=-x+b$의 교점의 x좌표를 α라 할 때, $1 \le \alpha \le 2$이다.

순서쌍 개수를 구하기 위하여 a를 고정시킨 다음에 직선 $x+y=b$의 y절편 b를 최솟값부터 y축의 양의 방향으로 평행이동시켜 나타내어 보면 (지수함수가 밑$(=a)$이 커짐에 따라 함숫값이 기하급수적으로 증가하기 때문에 a를 기준으로 접근합니다. (바로 뒤에 배치되어있는 2번과 같은 맥락)

$a=2$일 때, $3 \le b \le 6$ ($y=2^x$가 $(1,\ 2)$, $(2,\ 4)$를 지나기 때문입니다.)

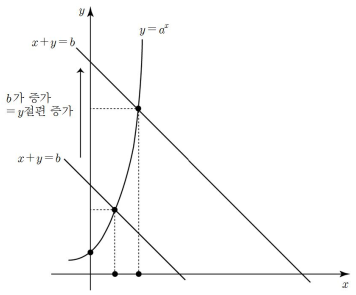
$a=3$일 때, $4 \le b \le 11$($y=3^x$가 $(1,\ 3)$, $(2,\ 9)$를 지나기 때문입니다.)

이를 일반화시키면 $a=n$일 때, $n+1 \le b \le n^2+2$

이 때, $a=5$일 때, $6 \le b \le 27$이므로

$a=6$이상 $(n \ge 6)$ 에서는 항상 $n+1 \le b \le 30$입니다.

작년 수능과 같이 등비수열과 등차수열이 결합된 문제입니다.



-참고그림

답 $=348$

+ 함께 공부해볼 개념- 행렬&그래프, $\sum_{k=1}^{n} k$입니다.

참고1) 등차수열의 합을 구하는 과정을 행렬&그래프+교과서로 공부해보세요.

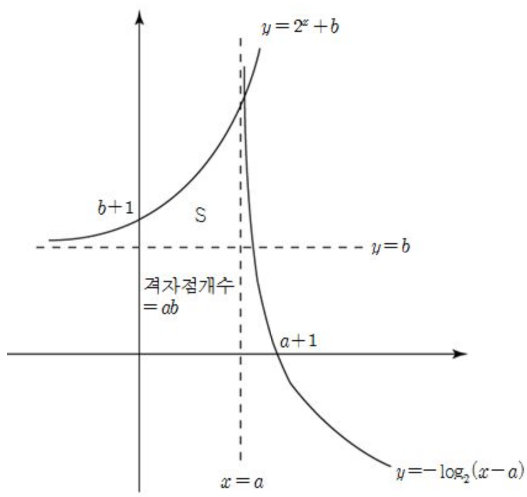
참고2) 29×29칸의 표

2. 두 곡선

$$y=-\log_2(x-a),\ y=2^x+b$$

와 좌표축으로 둘러싸인 영역의 내부 또는 그 경계에 포함되고 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수가 100이하가 되도록 하는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수를 구하시오. [4점]

-풀이의 핵심은 점근선 $x=a$, $y=b$이라는 점, 이를 통해 알 수 있는 격자점의 개수는 가로의 길이가 a, 세로의 길이가 b인 직사각형의 넓이이기도 하며, 영역 S에 있는 점의 개수는 등비수열의 합과 관련이 있습니다.



-위의 영역의 내부, 경계에 포함되고 x, y좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 a, b에 관하여 식을 정리하면 $ab+2^{a+1}-2$입니다.

지수함수가 밑$(=a)$이 커짐에 따라 함숫값이 기하급수적으로 증가하기 때문에 $1 \le a \le 5$로 a의 값을 한정지을 수 있고, 가능한 b의 개수는

$a=1$일 때, 98, $a=2$일 때, 47, $a=3$일 때, 28

$a=4$일 때, 17, $a=5$일 때, 7

입니다. 답 $=197$

+ 함께 공부해볼 개념- 등비수열

3. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 두 자연수 a, b의 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $f(1)+f(2)+f(3)$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) $1 \le a \le 10$, $1 \le b \le 10$
> (나) 두 점 $(a, 2^a)$, $(2^b, b)$를 지나는 직선이 원 $(x-n)^2+(y-n)^2=2$와 만나지 않는다.

6월 미리보기 A형 문제입니다. 자세한 해설은 6월 미리보기 글이 있으니 활용해 보세요.

답 $=226$

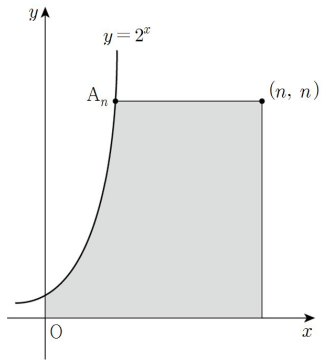
+ 함께 공부해볼 개념- 행렬&그래프
참고) 10×10칸의 표

4. 좌표평면에서 자연수 n에 대하여 두 영역

$$\{(x, y) \mid x \le n,\ y \le n\}$$
$$\{(x, y) \mid 0 \le y \le 2^x\}$$

에 모두 속하는 점 중 x좌표와 y좌표가 모두 자연수인 점의 개수를 a_n이라 하자. 예를 들어, $a_4=14$이다. $\sum_{n=5}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

난이도가 쉬우므로 그래프만 간단히 그려보면



답 => $a_5+a_6+a_7+a_8+a_9+a_{10}$
$=21+30+41+54+68+84$
$=298$

그래프를 그려보니, 3번문제와 마찬가지의 방법으로 전체 $n\times n$의 가짓수에서 지수함수 윗부분에 있는 격자점의 개수를 빼는 방법이 최적임을 공부해 볼 수 있는 문제입니다.

+ 함께 공부해볼 개념- 행렬&그래프, $\sum_{k=1}^{n} k^2$

5. 2이상 10이하의 자연수 n에 대하여 방정식

$$\log_n x = 8 - x$$

의 해를 α라 할 때, $[\alpha]=k$를 만족시키는 모든 자연수 n의 값의 합을 a_k라 하자. $a_5+a_6+a_7$의 값을 구하시오. (단, $[x]$는 x보다 크지 않은 최대의 정수이다.) [4점]

곡선 $y=\log_n x$와 직선 $y=-x+8$의 교점의 위치를 묻는 문제입니다.

$a_5=2,\ a_6=3+4+5+6=18,\ a_7=7+8+9+10=34$

이므로

답 $=54$

결국, 2이상 자연수 n에 대하여 n이 증가함에 따라 로그함수는 직선 $y=-x+8$과 항상 만나게 되며 $2 \le n \le 10$인 자연수를 모두 더하면 답이 되는 것을 의도했습니다.

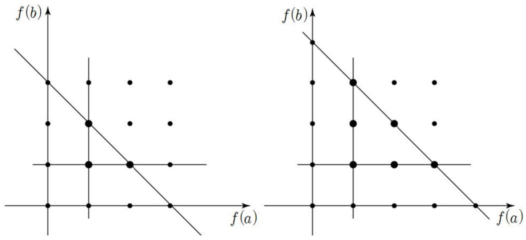
+ 함께 공부해 볼 문제- 2013학년도 6월 30번

6. 양수 t에 대하여 $\log t$의 지표를 $f(t)$라 할 때, 두 자연수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a \ge 10,\ b \ge 10$
(나) $f(a)+f(b) \le n$
(다) $\log a$와 $\log b$의 가수는 모두 $\log 2.5$이하이다.

$b-a$의 최댓값을 a_n이라 할 때, $\dfrac{a_4}{a_3}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{81}{8}$ ② $\dfrac{41}{4}$ ③ $\dfrac{83}{8}$ ④ $\dfrac{21}{2}$ ⑤ $\dfrac{85}{8}$



풀이의 핵심은 $f(a)+f(b) \le n$와 $f(a) \ge 1,\ f(b) \ge 1$이며

$n=3$일 때, $b-a$의 최댓값 a_3의 값은 $250-10=240$

$n=4$일 때, $b-a$의 최댓값 a_4의 값은 $2500-10=2490$

입니다.

답 = ③ $\dfrac{83}{8}$

+ 함께 공부해볼 문제- 2016학년도 6월 A형 20번

참고) 이 문제의 풀이는 좌표평면을 이용했지만 올해 6평 A형 20번은 표를 그려서 해석가능 합니다. 이 문제 또한 표로도 풀 수 있습니다.

7. 1이상의 양수 t에 대하여 $\log t$의 지표와 가수를 각각 $f(t)$, $g(t)$라 하자. 자연수 n에 대하여

$$f(t)=\log_2(3ng(t)+1)$$

을 만족시키는 서로 다른 모든 t의 개수를 a_n이라 할 때, $a_4+a_5+a_6+a_7$의 값을 구하시오. [4점]

지표의 뜻, 가수의 뜻만 알면 깔끔하게 풀 수 있는 문제입니다.

답 => $a_4+a_5+a_6+a_7=4+4+5+5=18$

8. 좌표평면에서 양수 k에 대하여 $\log k$의 지표와 가수를 각각 x좌표와 y좌표로 갖는 점을 P_k라 하자. 점 $\mathrm{A}(3,\ 1)$에 대하여 두 양수 s, t가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $10 \le s < t < 1000$ (나) 세 점 P_s, P_t, A가 한 직선 위에 있다.

$\log\dfrac{t^2}{s}$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$\log k$의 가수를 $g(k)$라 할 때, 점 P_s의 x좌표는 1이고, y좌표는 $g(s)$입니다. 점 P_t의 x좌표는 2이고, y좌표는 $g(t)$입니다.(지표의 뜻을 이용합니다.)

세 점의 y좌표는 등차수열을 이루며, 등차중항에 의하여 $2g(t)=g(s)+1$를 만족시킵니다. (등차수열+좌표평면에서의 직선과의 관계)

$\log\dfrac{t^2}{s}=2\log t-\log s=2(2+g(t))-(1+g(s))=3+1=4$

답 = ④ 4

+ 함께 공부해 볼 개념- 등차수열 + 지표와 가수

9. 최고차항의 계수가 1이고 다음 조건을 만족시키는 삼차함수 $f(x)$의 극댓값과 극솟값의 합은? [4점]

(가) $f(3)=0$

(나) $\lim_{x\to -3}\frac{x}{f(x)}=\infty$

① -24 ② -28 ③ -32 ④ -36 ⑤ -40

인수 결정.. -제곱인수

$f(3)=0$이므로 $f(x)=(x-3)(x^2+ax+b)$꼴로 나타낼 수 있고,

$\lim_{x\to -3}\frac{x}{f(x)}=\infty$이므로 $(x+3)^2$을 인수로 가져야 합니다.

따라서 $f(x)=(x-3)(x+3)^2$

답 =③ -32

+ 함께 공부해볼 만한 문항

2014학년도 9월, 2015학년도 6, 9월, 수능

2016학년도 6월 (다항함수의 미분, 인수 결정 관련 문항)

10. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f'(2)=0$

(나) 함수 $f(x)$는 오직 구간 $(0, \infty)$에서만 증가한다.

$f'(4)$의 값은? [4점]

① 28 ② 40 ③ 52 ④ 64 ⑤ 76

인수 결정.. -제곱인수

(가) 조건에 의하여 $f'(x)=4(x-2)(x^2+ax+b)$입니다.

(나) 조건에 의하여 x를 인수로 갖고, $(x-2)^2$을 가지므로,

$f'(4)=64$

답 = ④ 64

+ 함께 공부해볼 만한 문항

2014학년도 9월, 2015학년도 6, 9월, 수능

2016학년도 6월 (다항함수의 미분, 인수 결정 관련 문항)

참고) (나) 조건은 올해 6평 21번 (나) 부등식조건을 다르게 표현한 방법입니다.

11. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=1$, $f(3)=2$
>
> (나) 임의의 양수 h에 대하여 $f(h)-f(0) \geq \frac{1}{3}h$이다.

$f(5)$의 값은? [4점]

① $\frac{68}{3}$ ② 23 ③ $\frac{70}{3}$ ④ $\frac{71}{3}$ ⑤ 24

인수 결정.. -제곱인수

항상 $\frac{f(h)-f(0)}{h} \geq \frac{1}{3}$이고, $f(0)=1$, $f(3)=2$이므로, 두 점 (0, 1), (3, 2)를 지납니다. 이 두 점을 지나는 직선의 기울기가 $\frac{1}{3}$이고, 곡선 $y=f(x)$에 접하므로 $f(x)$의 관점에서 바라보면 $f(x)$는 $(3,\ f(3)(=2))$을 지나고 이 점에서의 접선의 기울기가 $\frac{1}{3}$입니다.

따라서 다음과 같이 식을 세울 수 있습니다.

$f(x)-\left(\frac{1}{3}x+1\right)=x(x-3)^2$

$\therefore\ f(5)=\frac{68}{3}$

답 =① $\frac{68}{3}$

12. 두 실수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=x^3+ax^2+bx$가 다음 조건을 만족시킬 때, a^2+b^2의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M+m$의 값은? [4점]

> (가) $f(-2)=2$
>
> (나) 함수 $f(x)$는 $x<0$에서 극댓값을 갖고, $0<x\leq 1$에서 극솟값을 갖는다.

① 19 ② $\frac{79}{4}$ ③ $\frac{41}{2}$ ④ $\frac{85}{4}$ ⑤ 22

$f(-2)=2$이므로 $2=-8+4a-2b$

$\Leftrightarrow 2a-b=5$

함수 $f(x)$는 $x<0$에서 극댓값을 갖고, $0<x\leq 1$에서 극솟값을 가지므로 $f'(0)<0$, $f'(1)\geq 0$입니다.

따라서 $b<0$, $b+2a+3\geq 0$이므로 a^2+b^2의 최댓값은 두 직선 $b=2a-5$, $b=-2a-3$의 교점인 $(a,\ b)$가 $\left(\frac{1}{2},\ -4\right)$일 때, $\frac{65}{4}$

a^2+b^2의 최솟값은 5입니다.

답 =④ $\frac{85}{4}$

13. 최고차항의 계수가 $-\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(0)=f(2)=0$
> (나) 점 $(0,\ k)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수가 3인 k의 값의 범위는 $-4<k<0$이다.

$f(1)$의 값은? [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② -1 ③ $-\frac{1}{2}$ ④ 0 ⑤ $\frac{1}{2}$

답 =① $-\frac{3}{2}$

9, 10, 11번처럼 인수정리를 활용해보세요.

14. 자연수 n에 대하여 원

$$x^2+(y-n)^2=1$$

과 직선

$$y=kx$$

의 교점이 존재하지 않도록 하는 모든 자연수 k의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=2}^{10} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

수열의 핵심은 나열하는 것입니다.

원과 직선 사이의 거리 공식을 사용하면 실수할 수 있을 확률이 높을 문제입니다.

$n=2,\ 3,\ \cdots$ 을 대입하여 나열해보면 $a_n=n-1$입니다.

+ 좌표평면에 모눈종이를 만들고, 기울기$(=k)$가 n보다 작게 될 때이며, (즉 k의 값은 1부터 $n-1$까지 입니다.) 따라서 기울기 k의 의미를 정확히 파악할 수 있는지가 의도입니다.

답 =45

15. 자연수 n에 대하여 좌표평면 위의 점 P_n을 다음 규칙에 따라 정한다.

> (가) 점 P_1의 좌표는 $(2,\ 1)$이다.
> (나) 선분 $\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$을 $n : n+1$로 내분하는 점은 $(0,\ 2)$이다.

점 P_9의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [4점]

답 $=11$

6월 미리보기 A형 문제입니다. 자세한 해설은 6월 미리보기 글이 있으니 활용하세요.

수열의 핵심은 나열하는 것입니다.
내분점의 공식에 얽매이다 보면 풀이가 길어질 수 있는 문제입니다.

+ 이과 학생들은 이 문제를 통해 시점이 $(0,\ 2)$인 벡터들을 생각해 볼 수 있습니다.

16. 좌표평면에서 직선

$$l : x+y=k$$

이 있다. 자연수 n에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{k=1}^{7} a_k$의 값을 구하시오. [4점]

> (가) 직선 l이 원 $x^2+y^2=2^{2n-1}$과 <u>만나지 않는다</u>.
> (나) 직선 l이 원 $x^2+y^2=2^{2n+1}$과 서로 다른 두 점에서 만난다.

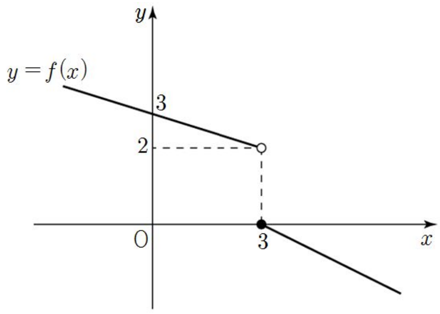
수열의 핵심은 나열하는 것 입니다.

14번과 마찬가지로 일반화하기 위해 원과 직선 사이의 거리 공식을 사용하면 실수할 수 있을 확률이 높을 문제입니다.
15번과 마찬가지로 공식에 얽매이다 보면 풀이가 복잡해 질 수 있는 문제입니다.

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$을 대입하여 나열해보면 $a_n=2^n-1$입니다.

답 $=247$

17. 함수 $f(x)=\begin{cases} -\frac{1}{3}x+3 & (x<3) \\ -\frac{1}{2}x+\frac{3}{2} & (x \geq 3) \end{cases}$ 의 그래프가 그림과 같다.



자연수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$은 $a_1=k$이고

$$a_{n+1}=f(a_n)\ (n \geq 1)$$

을 만족시킬 때, $b_k=\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}$이라 하자. $\sum\limits_{k=1}^{5}b_k$의 값은? [4점]

① $\frac{27}{2}$ ② 14 ③ $\frac{29}{2}$ ④ 15 ⑤ $\frac{31}{2}$

$n=1,\ 2$에서는 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=\frac{9}{4}$임을,

$n=3,\ 4,\ 5$에서는 $\lim\limits_{n\to\infty}a_{2n-1}=3$임을 알 수 있습니다.

+ 함께 공부해 볼 문항- 2014학년도 6월 A형 14번

답 =① $\frac{27}{2}$

18. 다음 조건을 만족시키는 음이 아닌 정수 $a,\ b,\ c,\ d$의 모든 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $a+b+c+d=6$
(나) $2^a\times3^b\times5^c\times6^d$ 은 4로 나누어떨어진다.

4로 나누어떨어지므로 전체의 경우의 수

${}_9C_6$에서 $a+d=0,\ a+d=1$의 경우를 제외하면

i) $a+d=0$인 경우

음이 아닌 정수 $b+c=6$의 순서쌍 개수이므로 7개

ii) $a+d=1$인 경우

음이 아닌 정수 $b+c=5$의 순서쌍 개수이므로 6개$\times2$

($\because a=1,\ d=0$인 경우와 $a=0,\ d=1$인 경우)

를 제외합니다.

$\therefore\ 84-7-12=65$

답 $=65$

19. 닫힌 구간 $[0,\ k]$에서 정의된 연속확률변수 X의 확률밀도함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x)=-ax^2(x-3)$
(나) $\mathrm{P}(t \le X \le 2)=1-\int_0^t f(x)dx \quad (0<t<2)$

$\mathrm{E}(X)=\dfrac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오.
(단, k는 상수이고, p과 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]

(나) $\int_0^t f(x)dx+\mathrm{P}(t \le X \le 2)=1$이므로

$k=2$입니다.

$\int_0^2 f(x)dx=1$이므로 $a=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{E}(X)=\dfrac{7}{5}$ 입니다.

답 $=12$