제 2 교시

수학 영역

만든 놈: crazy_hansuckwon
수학희, 오르비 : 한석원의눈물

5지선다형

간단한 지수계산

1. $\sqrt[3]{27}\times 4^{-\frac{1}{2}}$ 의 값은? [2점]

① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{4}$ ③ 1 ④ $\frac{5}{4}$ ⑤ $\frac{3}{2}$

㉠ $3\times\frac{1}{2}=\boxed{\frac{3}{2}}$

미분계수의 정의

2. 함수 $f(x)=x^2-2x+3$ 에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f'(x)=2x-2$ 이고,

$\lim_{h\to 0}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=f'(3)$ 이므로

㉠ $f'(3)=\boxed{4}$

시그마 분리~

3. 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 $\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=60$ 일 때, $\sum_{k=1}^{10}a_k$ 의 값은? [3점]

① 10 ② 15 ③ 20 ④ 25 ⑤ 30

$\sum_{k=1}^{10}(2a_k+3)=2\sum_{k=1}^{10}a_k+30=60$

$\therefore$ ㉠ $\sum_{k=1}^{10}a_k=\boxed{15}$

연속의 정의. 간단!

4. 실수 전체의 집합에서 연속인 함수 $f(x)$ 가

$$\lim_{x\to 1}f(x)=4-f(1)$$

을 만족시킬 때, $f(1)$ 의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

$f(x)$: 연속 $\to \lim_{x\to 1}f(x)=f(1)$

$\therefore f(1)=4-f(1)$ 이므로 ㉠ $f(1)=\boxed{2}$

만든 놈: ㅇ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

곱의 미분법 아니?

5. 다항함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=(x^3+1)f(x)$$

라 하자. $f(1)=2$, $f'(1)=3$일 때, $g'(1)$의 값은? [3점]

① 12 ② 14 ③ 16 ④ 18 ⑤ 20

$g'(x)=3x^2f(x)+(x^3+1)f'(x)$ 에서

㉠ $g'(1)=3f(1)+2f'(1)$
$=6+6$
$=\boxed{12}$

sin과 cos 동시에 등장 ⇒ $\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$ 이용가치 ↑↑

6. $\cos\theta<0$이고 $\sin(-\theta)=\frac{1}{7}\cos\theta$일 때, $\sin\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{3\sqrt{2}}{10}$ ② $-\frac{\sqrt{2}}{10}$ ③ 0 ④ $\frac{\sqrt{2}}{10}$ ⑤ $\frac{3\sqrt{2}}{10}$

$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ 이므로

$-\sin\theta=\frac{1}{7}\cos\theta \xrightarrow{\text{양변제곱}} \sin^2\theta=\frac{1}{49}\cos^2\theta$

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$임을 이용하면

$\sin^2\theta=\frac{1}{49}(1-\sin^2\theta)$

$\therefore \sin^2\theta=\frac{1}{50}$ 에서 $\sin\theta=\pm\frac{\sqrt{2}}{10}$

이때, $\sin\theta=-\frac{1}{7}\cos\theta$ 인데 $\cos\theta<0$ 이므로

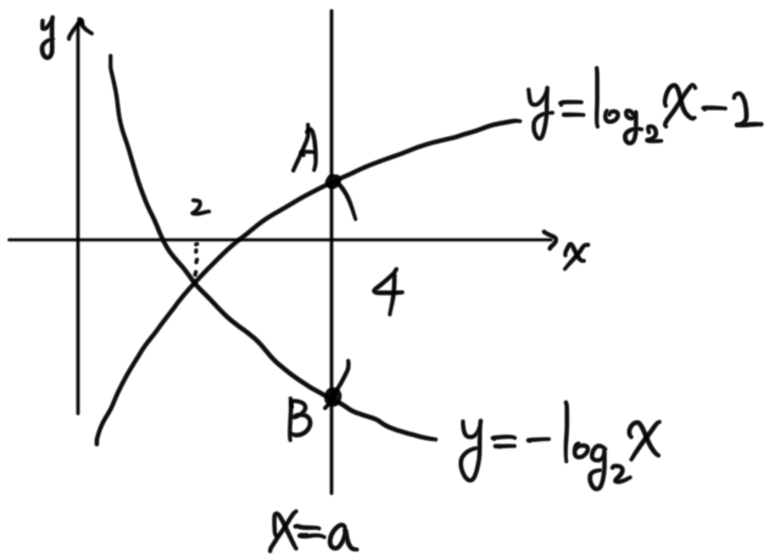
㉠ $\sin\theta=\boxed{\frac{\sqrt{2}}{10}}$

좌표대입. ⊕ 거리는 절댓값! 그래프를 안 그리면 A가 위인지 B가 위인지 헷갈리게 됨 ⇒ 절댓값!

7. 상수 $a\,(a>2)$에 대하여 함수 $y=\log_2(x-a)$의 그래프의 점근선이 두 곡선 $y=\log_2\frac{x}{4}$, $y=\log_{\frac{1}{2}}x$와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. $\overline{AB}=4$일 때, a의 값은? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8 ④ 10 ⑤ 12

$y=\log_2(x-a)$의 점근선 : $x=a$
$y=\log_2\frac{x}{4}=\log_2 x-2$
$y=\log_{\frac{1}{2}}x=-\log_2 x$
이므로 그래프를 그려보면



곧 $\overline{AB}=(\log_2 a-2)-(-\log_2 a)=4$

$\therefore \log_2 a=3$ 이므로 $a=\boxed{8}$

이젠 익숙해져야 함. 차이 함수!

8. 두 곡선 $y=2x^2-1$, $y=x^3-x^2+k$가 만나는 점의 개수가 2가 되도록 하는 양수 k의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

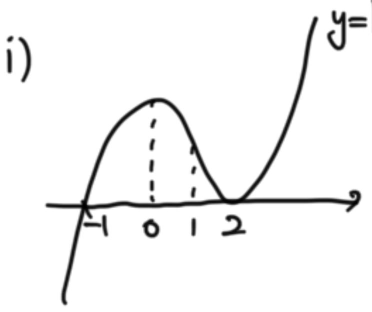
$f(x): 2x^2-1$, $g(x): x^3-x^2+k$ 로 두고 $h(x)=g(x)-f(x)$ 로 두면

$h(x)=x^3-3x^2+k+1$

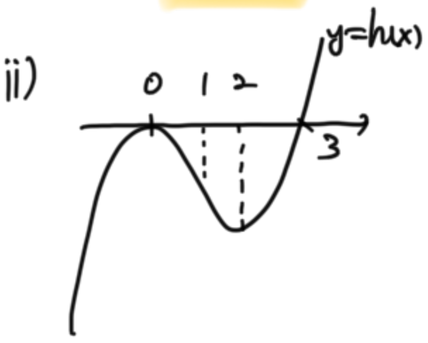
$\rightarrow h'(x)=3x^2-6x$
$=3x(x-2)$

에서 $y=h(x)$가 x축이 두 점에서 만나야 함

i)



ii)



$\Rightarrow h(-1)=h(2)=0$ 이므로 $k=3$

$\Rightarrow h(0)=h(3)=0$ 이므로 $k=-1$

㉠ 양수 $k=\boxed{3}$

등차수열의 합 ⊕ 부분분수

9. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(2k-1)a_k}=n^2+2n$$

을 만족시킬 때, $\sum_{n=1}^{10}a_n$의 값은? [4점]

① $\frac{10}{21}$　② $\frac{4}{7}$　③ $\frac{2}{3}$　④ $\frac{16}{21}$　⑤ $\frac{6}{7}$

상수항이 0인 이차식 : 등차수열의 합

$\Rightarrow \frac{1}{(2k-1)a_k}$ 는 등차수열이고, 이차식의 이차항 계수가 1이므로

등차수열의 공차 $=2$ 이다.

이 때 초항을 구하기 위해 양변에 1을 대입하면 $\frac{1}{a_1}=S_1=3$ 이다.

곧 $\left\{\frac{1}{(2k-1)a_k}\right\}$는 $2k+1$ $(k\geq 1)$ 이고,

$a_k=\frac{1}{(2k-1)(2k+1)}$ 이다.

㉠ $\sum_{n=1}^{10}a_n=\sum_{n=1}^{10}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{19} - \frac{1}{3}-\cdots-\frac{1}{19}-\frac{1}{21}\right)$

$=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{21}\right)$

$=\boxed{\frac{10}{21}}$

넓이와 정적분 사이의 관계

10. 양수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

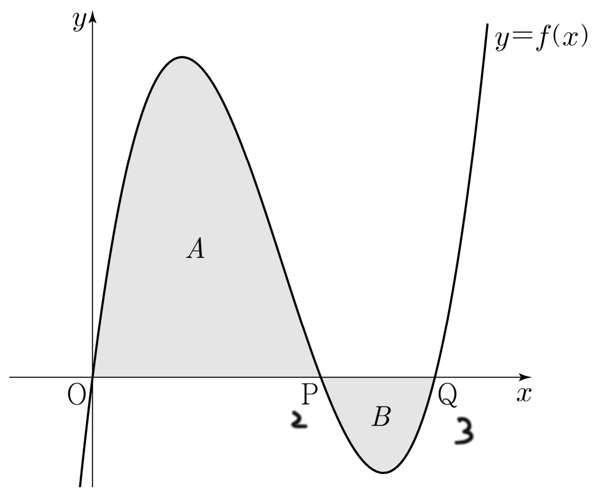
$$f(x)=kx(x-2)(x-3)$$

이다. 곡선 $y=f(x)$와 x축이 원점 O와 두 점 P, Q $(\overline{OP}<\overline{OQ})$에서 만난다. 곡선 $y=f(x)$와 선분 OP로 둘러싸인 영역을 A, 곡선 $y=f(x)$와 선분 PQ로 둘러싸인 영역을 B라 하자.

$$(A\text{의 넓이})-(B\text{의 넓이})=3$$

일 때, k의 값은? [4점]

① $\frac{7}{6}$　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{3}{2}$　④ $\frac{5}{3}$　⑤ $\frac{11}{6}$



A의 "넓이" = A의 정적분
B의 "넓이" = B의 정적분 × (−1)

곧 A의 넓이 − B의 넓이
= A의 정적분 + B의 정적분 = 3

$\Rightarrow \int_0^3 f(x)dx=3$

$\therefore k\int_0^3 x(x-2)(x-3)dx$

$=k\int_0^3(x^3-5x^2+6x)dx$

$=k\left[\frac{1}{4}x^4-\frac{5}{3}x^3+3x^2\right]_0^3=3$ 이므로 이를 계산하면

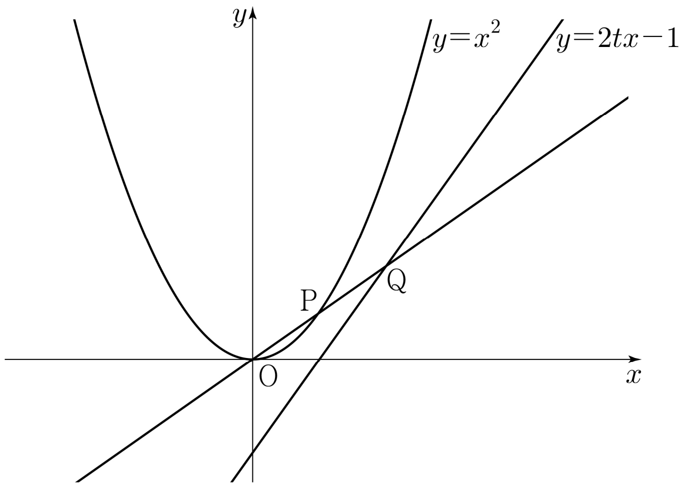
㉠ $k=\boxed{\frac{4}{3}}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

점 P만 잡고나면 그 이후로는 일사천리. 마지막 극한계산 실수 ㄴㄴ

11. 그림과 같이 실수 $t\,(0<t<1)$에 대하여 곡선 $y=x^2$ 위의 점 중에서 직선 $y=2tx-1$과의 거리가 최소인 점을 P라 하고, 직선 OP가 직선 $y=2tx-1$과 만나는 점을 Q라 할 때,

$\lim_{t\to1-}\dfrac{\overline{\mathrm{PQ}}}{1-t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\sqrt{6}$ ② $\sqrt{7}$ ③ $2\sqrt{2}$ ④ 3 ⑤ $\sqrt{10}$

직선과의 거리가 최소인 지점 : 점 P에서의 접선의 기울기가 직선의 기울기와 동일한 지점

$\Rightarrow$ $y=2tx-1$ 의 기울기 : $2t$ 이므로 $P(t, t^2)$

($\because$ $y=x^2$ 에서의 접선의 기울기 $2t$인 지점이 P)

곧 $\overline{OP}$는 기울기가 t인 직선이므로 $y=tx$ 이고, 이 직선과 $y=2tx-1$ 사이의 교점 $Q(\frac{1}{t}, 1)$ 이다.

$\therefore$ $\overline{PQ}=\sqrt{(t-\frac{1}{t})^2+(t^2-1)^2}$ 이므로

㉠ $\lim_{t\to1-}\dfrac{\sqrt{(t-\frac{1}{t})^2+(t^2-1)^2}}{1-t}=\lim_{t\to1-}\dfrac{\sqrt{\frac{1}{t^2}(t^2-1)^2+(t^2-1)^2}}{1-t}$

$=\lim_{t\to1-}\dfrac{\sqrt{(t^2-1)^2(\frac{1}{t^2}+1)}}{1-t}=\lim_{t\to1-}\sqrt{(t+1)^2(\frac{1}{t^2}+1)}$

$\therefore \sqrt{4\times2}$

$=\boxed{2\sqrt{2}}$

b_n이 등차수열임을 찾는게 우선. $n(A\cap B)=3$인 조건의 의미 파악이 제일 중요!!

12. $a_2=-4$이고 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을 $b_n=a_n+a_{n+1}\,(n\ge1)$이라 하고, 두 집합 A, B를

$$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\},\quad B=\{b_1, b_2, b_3, b_4, b_5\}$$

라 하자. $n(A\cap B)=3$이 되도록 하는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 a_{20}의 값의 합은? [4점]

① 30 ② 34 ③ 38 ④ 42 ⑤ 46

등차수열을 일정한 개수 & 간격으로 묶어낸 수열 역시 등차수열

$\Rightarrow$ $b_n=a_n+a_{n+1}$ 도 등차수열

이 때 a_n의 공차 $=d$로 두면 b_n의 공차 $=2d$이다.

($a_n=dn+c$ 이면 $a_{n+1}=d(n+1)+c$ 이고 $b_n=\underbrace{2d}_{\text{공차}}n+2c+d$)

결국 이를 직선으로 생각하게 되면

a_n은 기울기 d인 직선 위의 점, b_n은 기울기 $2d$인 직선 위의 점이다.

이 말의 의미가 중요한데, a_n의 두 항 차이 $=b_n$의 한 항 차이라는 것이다.

곧, 만약 $\{A\cap B\}$의 원소에 a_1이 없다면

$a_2=b_1$ 이더라도 $a_4=b_2$으로 $n(A\cap B)$은 최대 2개이다.

$\therefore$ $\{A\cap B\}$에는 a_1이 무조건 포함되어야 하고, 남은 원소들은 두 항씩 떨어진 a_3, a_5 이어야 한다.

i) $a_1=b_1$인 경우 $a_1=a_1+a_2$ 이므로 $a_2=0$ 에서 모순

ii) $a_1=b_2$인 경우 $a_1=a_2+a_3$ 이므로 $a_3-a_1=4$ 에서

$d=2$

$\therefore$ $a_{20}=a_2+18d=-4+36$

$=32$

iii) $a_1=b_3$인 경우 $a_1=a_3+a_4$ 이므로 $-a_3=a_4-a_1$에서

$-(-4+d)=3d$ $\therefore$ $d=1$

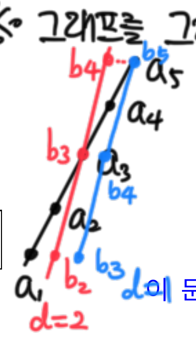
$\therefore$ $a_{20}=a_2+18d=14$

iv) $a_1=b_4$인 경우 $a_3=b_5$ 뿐이라 $n(A\cap B)=2$: 모순

v) $a_1=b_5$도 마찬가지로 $n(A\cap B)=1$: 모순

㉠ a_{20}의 합 : $\boxed{46}$

※ 그래프를 그려보면 (공차 양수로 가정, 음수도 동일함)



과 같다.

$d=2$일 때 $a_1=b_2$, $a_3=b_3$, $a_5=b_4$

$d=1$일 때 $a_1=b_3$, $a_3=b_4$, $a_5=b_5$

관히 원의 지름에서 직각 이용하려고 하다가 헤맴. 굳이 기하적 성질 이용할 필요가 없는 문제

13. 그림과 같이

$$\overline{BC}=3,\ \overline{CD}=2,\ \cos(\angle BCD)=-\frac{1}{3},\ \angle DAB>\frac{\pi}{2}$$

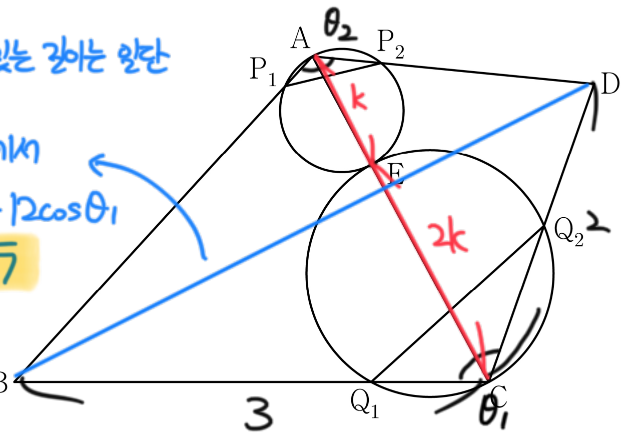
인 사각형 ABCD에서 두 삼각형 ABC와 ACD는 모두 예각삼각형이다. 선분 AC를 1 : 2로 내분하는 점 E에 대하여 선분 AE를 지름으로 하는 원이 두 선분 AB, AD와 만나는 점 중 A가 아닌 점을 각각 P_1, P_2라 하고, 선분 CE를 지름으로 하는 원이 두 선분 BC, CD와 만나는 점 중 C가 아닌 점을 각각 Q_1, Q_2라 하자. $\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이고 삼각형 ABD의 넓이가 2일 때, $\overline{AB}+\overline{AD}$의 값은? (단, $\overline{AB}>\overline{AD}$) [4점]

표기할 수 있는 길이는 일단 다 표기!

Cos Law에서

$\overline{BD}^2=3^2+2^2-12\cos\theta_1$

$\therefore \overline{BD}=\sqrt{17}$



① $\sqrt{21}$ ② $\sqrt{22}$ ③ $\sqrt{23}$ ④ $2\sqrt{6}$ ⑤ 5

Sin Law 적용.

① $\overline{EC}$를 지름으로 하는 원에서 $\dfrac{\overline{Q_1Q_2}}{\sin\theta_1}=2k$

이 때 $\cos\theta_1=-\frac{1}{3}$이므로 $\sin\theta_1=\frac{2\sqrt{2}}{3}$이고, $(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi)$

곧 $\overline{Q_1Q_2}=\frac{4\sqrt{2}}{3}k$이다.

② $\overline{AE}$를 지름으로 하는 원에서 $\dfrac{\overline{P_1P_2}}{\sin\theta_2}=k$

$\therefore \overline{P_1P_2}=k\sin\theta_2$이다.

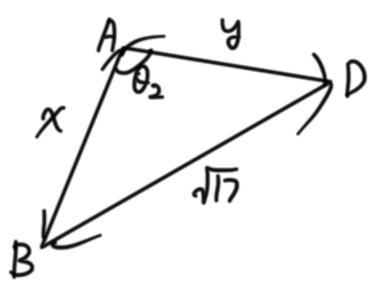
조건에서

$\overline{P_1P_2}:\overline{Q_1Q_2}=3:5\sqrt{2}$이므로 $k\sin\theta_2:\frac{4\sqrt{2}}{3}k=3:5\sqrt{2}$

$\Rightarrow 4\sqrt{2}k=5\sqrt{2}k\sin\theta_2$ $\therefore \sin\theota_2=\frac{4}{5}$, $\cos\theta_2=-\frac{3}{5}$ 주의!

$(\frac{\pi}{2}<\theta_2<\pi)$

이제야 우리는 $\triangle ABD=2$ 조건을 써먹을 수 있다.



에서 $2=\frac{1}{2}xy\sin\theta_2$ 이므로

$xy=5$

또한, $\triangle ABD$에서 Cos Law를 적용하면

$17=x^2+y^2-2xy\cos\theta_2$이고, $xy=5$, $\cos\theta_2=-\frac{3}{5}$이므로

$17=(x+y)^2-10+6$ ㉠ $x+y=\boxed{\sqrt{21}}$ $(x+y>0)$

계산 역재에서 14번임?

14. 실수 $a\,(a\ge 0)$에 대하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t\,(t\ge 0)$에서의 속도 $v(t)$를

$$v(t)=-t(t-1)(t-a)(t-2a)$$

라 하자. 점 P가 시각 $t=0$일 때 출발한 후 운동 방향을 한 번만 바꾸도록 하는 a에 대하여, 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 점 P의 위치의 변화량의 최댓값은? [4점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{7}{30}$ ③ $\frac{4}{15}$ ④ $\frac{3}{10}$ ⑤ $\frac{1}{3}$

운동방향 변동 ⇒ 속도 그래프 부호변동점!

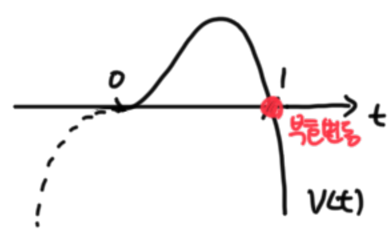
곧 

과 같은 꼴은 불가능. 부호변동점 1개여야 함

⇒ t축과 V(t)가 접하는 지점이 존재해야 함!

i) $a=0$일 때

$V(t)=-t^3(t-1)$



위치의 변화량 : $\int_0^2 -t^3(t-1)\,dt$

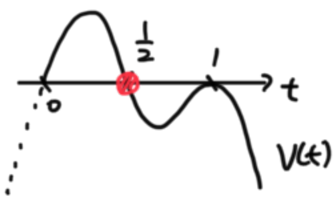
$=\int_0^2(-t^4+t^3)\,dt$

$=\left[-\frac{1}{5}t^5+\frac{1}{4}t^4\right]_0^2$

$=-\frac{12}{5}$

ii) $a=\frac{1}{2}$일 때

$V(t)=-t(t-\frac{1}{2})(t-1)^2$



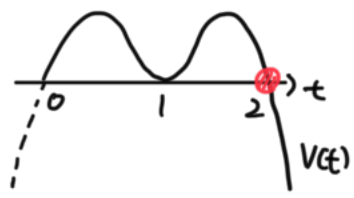
위치의 변화량 : $\int_0^2 -t(t-\frac{1}{2})(t-1)^2\,dt$

⇒ 계산생략 . . .

⇒ $-\frac{11}{15}$

iii) $a=1$일 때

$V(t)=-t(t-1)^2(t-2)$



위치의 변화량 : $\int_0^2 -t(t-1)^2(t-2)\,dt$

⇒ 계산생략 . . .

⇒ $\frac{4}{15}$

㉠ 위치 변화량의 최댓값 : $\boxed{\frac{4}{15}}$

만든 놈: ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

case 분류 좀 귀찮긴 한데 순차적으로 a_1부터 쓰면 되니까 어렵지는 않음

15. 자연수 k에 대하여 다음 조건을 만족시키는 수열 $\{a_n\}$이 있다.

: a_3 조건
: a_4 조건
: a_5 조건

> $a_1 = k$이고, 모든 자연수 n에 대하여
>
> $$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + 2n - k & (a_n \le 0) \\ a_n - 2n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$
>
> 이다.

$a_3 \times a_4 \times a_5 \times a_6 < 0$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 10 ② 14 ③ 18 ④ 22 ⑤ 26

"자연수" k이므로 $a_1=k>0$

⇒ $a_2=a_1-2-k$
$= k-2-k = -2$ ∴ $a_2=-2$ (고정)

$a_2<0$ 이므로

⇒ $a_3=a_2+4-k$
$=-2+4-k = 2-k$ 〈 $2-k>0$ / $2-k<0$ 으로 case 분류!

※ 왜 $2-k\le 0$이 아닌 $2-k<0$ 인가? $a_3=0$ 이면 $a_3a_4a_5a_6<0$은 애초에 불가능하기 때문 ⇒ 앞으로의 case 분류도 지금처럼 0 제외하고 할거임

i) $2-k>0$인 경우 ($2>k$ 전제)

$a_4=a_3-6-k$
$=(2-k)-6-k = -4-2k$ 이고, $2>k$인 자연수 k는 1뿐이므로 $k=1$

곧 $a_4=-6$이고, 주어진 규칙을 통해 나머지 항도 구해보면 $a_5=1, a_6=-10$

∴ $a_3a_4a_5a_6=(+)\times(-)\times(+)\times(-)>0$ 이므로 $\boxed{\text{모순}}$

ii) $2-k<0$인 경우 ($2<k$ 전제)

$a_4=a_3+6-k$
$=(2-k)+6-k = 8-2k$ 〈 $8-2k>0$ / $8-2k<0$ 또 case 분류필요!

① $8-2k>0$인 경우 ($4>k$ 전제)

$a_5=a_4-8-k$
$=(8-2k)-8-k = -3k<0$ (∵ k는 자연수)

$a_6=a_5+10-k$
$=-3k+10-k = 10-4k$

이 경우 $a_3a_4a_5a_6=(-)\times(+)\times(-)\times ?$ 이므로 $10-4k<0$ 이어야 함.

∴ $\frac{5}{2}<k$, $4>k$, $2<k$의 공통범위: $\frac{5}{2}<k<4$

이를 만족하는 자연수 $k=\boxed{3}$

② $8-2k<0$인 경우부터는 여백 문제로 다음 page

단답형

지수/로그 부등식은 밑 OR 지수 통일이 기본

16. 부등식 $2^{x-6} \le \left(\frac{1}{4}\right)^x$을 만족시키는 모든 자연수 x의 값의 합을 구하시오. [3점]

밑 통일

⇒ $2^{x-6}\le 2^{-2x}$ 에서 $x-6\le -2x$

∴ $x\le 2$ 이므로

⑦ 모든 자연수 x의 합: $1+2=\boxed{3}$

부정적분 ⊕ 적분상수 결정

17. 함수 $f(x)$에 대하여 $f'(x)=8x^3-1$이고 $f(0)=3$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\int f'(x)dx = 2x^4-x+C$ 에서 $f(0)=3$이므로

$f(x)=2x^4-x+3$

⑦ $f(2)=\boxed{33}$

15번 문제 이어서

만든 놈: [인] crazy_hansuckwon
수란희, 오르비 : 한석원의눈물

② $8-2k<0$ 인 경우 ($4<k$ 전제)

$a_5=a_4+8-k$
$=(8-2k)+8-k=16-3k$
- $16-3k>0$
- $16-3k<0$

마지막 case 분류

(i) $16-3k>0$ 인 경우 ($\frac{16}{3}>k$ 전제)

$a_6=a_5-10-k$
$=(16-3k)-10-k=6-4k$

이 경우 $a_3a_4a_5a_6=(-)\times(-)\times(+)\times?$ 이므로 $6-4k<0$ 이어야 함

$\therefore$ $\frac{3}{2}<k$, $\frac{16}{3}>k$, $4<k$, $2<k$ 의 공통범위는 $4<k<\frac{16}{3}$

이를 만족하는 자연수 $k=\boxed{5}$

(ii) $16-3k<0$ 인 경우 ($\frac{16}{3}<k$ 전제)

$a_6=a_5+10-k$
$=(16-3k)+10-k=26-4k$

이 경우 $a_3a_4a_5a_6=(-)\times(-)\times(-)\times?$ 이므로 $26-4k>0$ 이어야 함

$\therefore$ $\frac{13}{2}>k$, $\frac{16}{3}<k$, $4<k$, $2<k$ 의 공통범위는 $\frac{16}{3}<k<\frac{13}{2}$

이를 만족하는 자연수 $k=\boxed{6}$

곧, ㉮ k의 합 : $3+5+6$
$=\boxed{14}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

그저 미분...

18. 두 상수 a, b에 대하여 삼차함수 $f(x)=ax^3+bx+a$는 $x=1$에서 극소이다. 함수 $f(x)$의 극솟값이 -2일 때, 함수 $f(x)$의 극댓값을 구하시오. [3점]

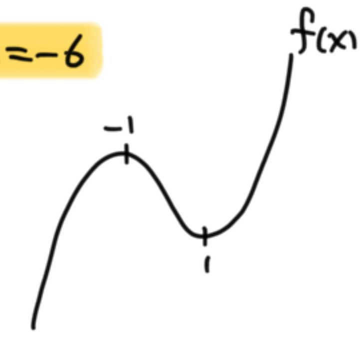
$f(1)=a+b+a$
$=2a+b=-2$ … ①

$f'(x)=3ax^2+b$ 이 $x=1$에서 극소이므로

$f'(1)=3a+b=0$ … ②

①과 ②를 연립하면 $a=2,\ b=-6$

곧 $f'(x)=6x^2-6$
$=6(x+1)(x-1)$ 에서



㉮ 극댓값 $f(-1)=2\times(-1)^3-6\times(-1)+2$
$=\boxed{6}$

함숫값의 범위와 주기의 결정. 19번치고는 어려웠을수도?

19. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\sin bx+8-a$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

(가) 모든 실수 x에 대하여 $f(x)\geq 0$이다.
(나) $0\leq x<2\pi$일 때, x에 대한 방정식 $f(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

$-1\leq \sin bx\leq 1$ 에서 출발.

$-a\leq a\sin bx\leq a \quad (a>0)$

$\rightarrow -a+(8-a)\leq a\sin bx+8-a\leq a+8-a$

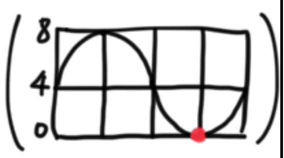
$\Rightarrow 8-2a\leq a\sin bx+8-a\leq 8$ 이므로

(가) 조건에 의해 $8-2a\geq 0$ 이다. $\therefore 4\geq a$

이 때, $f(x)=0$의 실근이 존재해야 하므로 $8-2a=0$ 이다.

$\therefore a=4 \rightarrow f(x)=4\sin bx+4$

이 때, 한 주기마다 실근이 1개 존재하므로



실근이 4개 존재하려면 주기 4번 반복되어야 함

$\Rightarrow b=4$

㉮ $a+b=\boxed{8}$

지겹도록 나왔던 유형. 개형 잘 추려보세요

20. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수

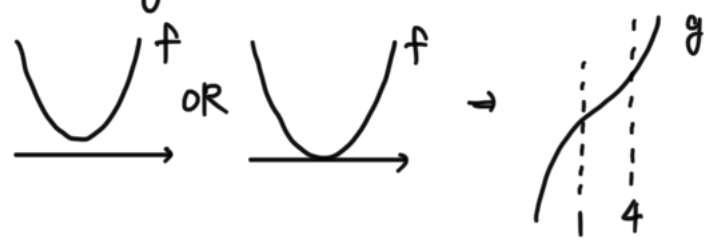
$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$$

가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(9)$의 값을 구하시오. [4점]

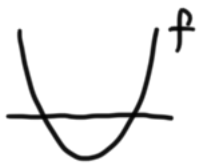
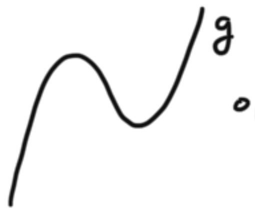
$x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여
$g(x)\geq g(4)$이고 $|g(x)|\geq |g(3)|$이다.

$g(x)=\int_0^x f(t)dt$ 에서
① $g(x)$는 최고차항계수 $\frac{1}{3}$인 삼차함수
② $g'(x)=f(x)$
③ $g(0)=0$ ($g(x)$는 원점지난다)

이제 $f(x)$가 $g(x)$의 도함수이므로 $f(x)$의 개형따라 case 분류

i) 

$\Rightarrow$ $g(x)$는 증가함수이므로 $x\geq 1$인 모든 실수 x에 대하여 $g(x)\geq g(4)$ 모순.

곧  이고, 이 경우  이다.

조건을 해석해보면

① $x\geq 1$인 "모든 실수" x에 대해 $g(x)\geq g(4)$: $g(4)$는 $g(x)$의 극솟값

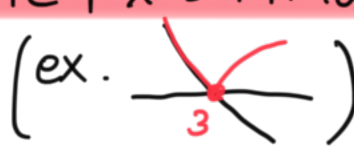
if) 극솟값이 아니라면? 4 주변 어딘가에서는 무조건 $g(x)<g(4)$

② 〃 $|g(x)|\geq|g(3)|$: $|g(x)|$는 $x=3$에서 극소

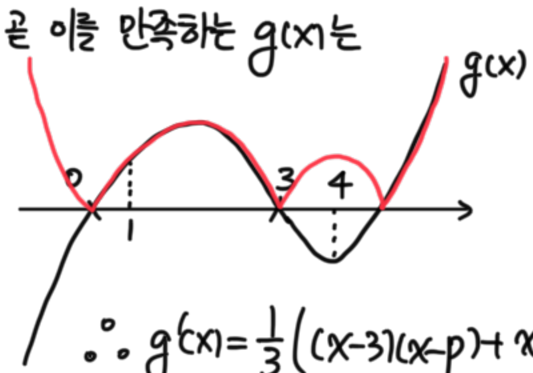
$\Rightarrow$ 이미 $g(x)$는 $x=4$에서 극소이므로 $x=3$은 두가지 case 존재.

i) $g(3)<0$ 이고, $g(x)$는 $x=3$에서 극대였을 경우 

$\Rightarrow$ 이 경우 $g(0)=0$ 조건 만족시키지 못한다. ($g(0)<0$ 일 수밖에 없음)

ii) $g(x)$가 절댓값에 의해 접히면서 $x=3$에서 새롭게 극솟값을 가질 경우 $\Rightarrow g(3)=0$ (ex. )

곧 이를 만족하는 $g(x)$는



이고, $g(x)=\frac{1}{3}x(x-3)(x-p)$ 이다.

$\therefore g'(x)=\frac{1}{3}\{(x-3)(x-p)+x(x-p)+x(x-3)\}$ 에서 $g'(4)=0$ 을 대입하면 $p=\frac{24}{5}$ 이고, 곧 ㉮ $f(9)=g'(9)=\boxed{39}$

만든 놈: crazy_hansuckwon
수면제, 오르비: 한석원의눈물

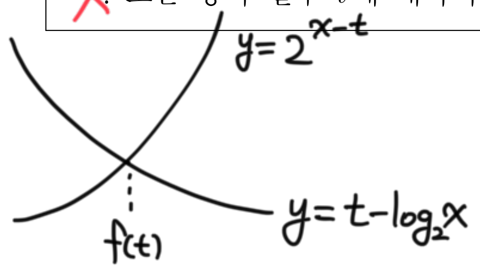
이젠 ㄱㄴㄷ을 8자친다고... 평가원은 건희한다. 옛날 기출 (약10년전)로 돌아간느낌

21. 실수 t에 대하여 두 곡선 $y=t-\log_2 x$와 $y=2^{x-t}$이 만나는 점의 x좌표를 $f(t)$라 하자.
<보기>의 각 명제에 대하여 다음 규칙에 따라 A, B, C의 값을 정할 때, $A+B+C$의 값을 구하시오. (단, $A+B+C \neq 0$) [4점]

• 명제 ㄱ이 참이면 $A=100$, 거짓이면 $A=0$이다.
• 명제 ㄴ이 참이면 $B=10$, 거짓이면 $B=0$이다.
• 명제 ㄷ이 참이면 $C=1$, 거짓이면 $C=0$이다.

<보 기>

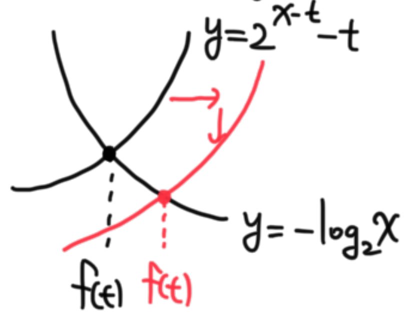
ㄱ. $f(1)=1$이고 $f(2)=2$이다.
ㄴ. 실수 t의 값이 증가하면 $f(t)$의 값도 증가한다.
~~ㄷ~~. 모든 양의 실수 t에 대하여 $f(t) \geq t$이다.



연립하는 거 아님!!

ㄱ. 명제의 참/거짓만 판별하면 되므로
$t=1$ 일 때 $y=2^{x-1}$과 $y=1-\log_2 x$ 교점 x좌표 $f(1)$
$\Rightarrow$ $x=1$ 대입하면 $2^{1-1}=1-\log_2 1$ $\therefore f(1)=1$
$t=2$ 일 때 마찬가지로 $x=2$ 대입하면 $2^{2-2}=2-\log_2 2$
이므로 $f(2)=2$ $\therefore A=\boxed{100}$

ㄴ. t가 양변에 있으므로 처리하기 기분나쁘다 $\Rightarrow$ 한쪽으로 몰아!
(사실 그냥 처리해도 상관없긴 함)
$2^{x-t}=t-\log_2 x$ 만족하는 x : $f(t)$ 이므로 t를 이항
$\Rightarrow$ $\underbrace{2^{x-t}-t}_{\text{변수}} = \underbrace{-\log_2 x}_{\text{고정}}$을 만족하는 x : $f(t)$
곧 t가 증가하면 $y=2^{x-t}-t$는 오른쪽/아래로 이동하므로



그림에서 $f(t)$는 증가한다.
$\therefore B=\boxed{10}$

ㄷ. 다음 page

생각보다 많이 쉬움. 아마 준킬러에 데여서 이건 생긴것만 보고 쳐다보지도 않았을듯?

22. 정수 $a\,(a \neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를 "정수" k의 곱 $=-12$의 중요성!

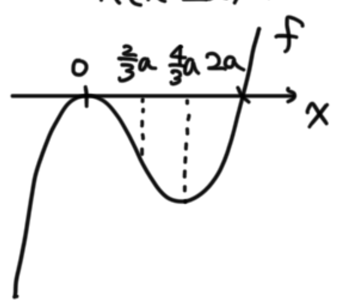
$$f(x)=x^3-2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

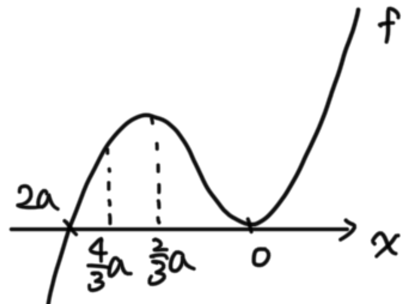
함수 $f(x)$에 대하여 $\left\{\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\} \times \left\{\dfrac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\} < 0$ 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\ k+\dfrac{3}{2}\right)$에 존재한다.

함수 증/감에 따라 부호변동 하나는 (+), 하나는 (−)

$f(x)=x^3-2ax^2$
$=x^2(x-2a)$이므로 a의 부호에 따라 case 분류해보면



<a>0>



<a<0>

이 때, $\left\{\dfrac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}$은 $(x_1, f(x_1)) \sim (x_2, f(x_2))$의 평균변화율
$\left\{\dfrac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}$은 $(x_2, f(x_2)) \sim (x_3, f(x_3))$의 평균변화율

둘이 부호가 다르려면 구간 $\left(k, k+\frac{3}{2}\right)$에 극점이 존재해야 한다.

왜? 기울기의 부호가 바뀐다는 의미이므로 증/감 한 번은 바뀌어야 함

케이스 분류는 다음 page

※ 확인 사항 ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오. ○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

21번 ㄷ & 부연설명 (위에선 여백문제로 설명 못한부분)

지수 & 로그함수 : 특히 밑이 2일 때 !!

⇒ □ 과 기울기 ±1인 직선으로 관찰

만든 놈: $\boxed{O}$ crazy_hansukwon
수만휘, 오르비 : 한석원의눈물

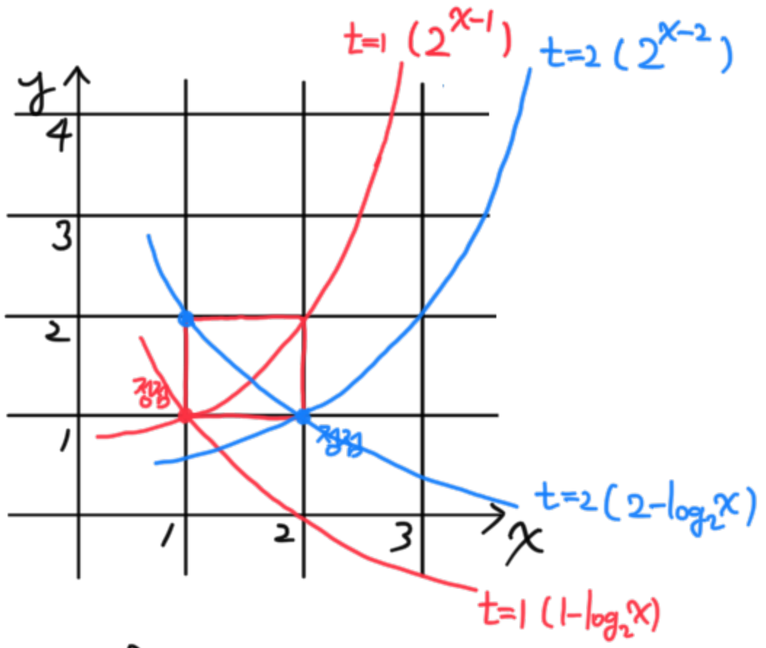
지수 & 로그함수는 특수한 점으로 관찰하는 것 중요. ⇒ "정점"

① $y=t-\log_2 x$ 는 $(1,t)$를 정점으로 가짐

② $y=2^{x-t}$는 $(t,1)$를 정점으로 가짐

⇒ 두 정점은 모두 $x+y=t+1$, 즉 $y=-x+(t+1)$인 직선위의 점임을 알 수 있다.

곧 $t=1$ 와 $t=2$일 때를 보면 (ㄱ선지)



$f(1)=1$, $f(2)=2$ 을 알 수 있다.
교점(1,1) 교점(2,1)

여기서 $f(t)\ge t$ (ㄷ선지)를 해석하기 위해 ㄱ선지를 괜히 준 것이 아니라고 생각.

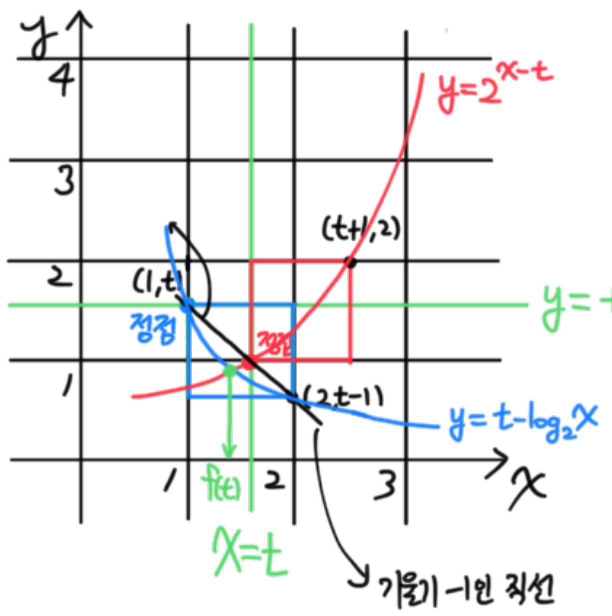
⇒ $1<t<2$ 와 $0<t\le 1$, $2\le t$ 으로 case 분류!

이때 각 정점이 $(t,1)$, $(1,t)$라는데에서 $y=t-\log_2 x$는 $(2,t-1)$를 지나므로

$(1,t)$, $(t,1)$, $(2,t-1)$는 기울기 -1인 직선 $y=-x+(t+1)$ 위의 점임을 알 수 있다.

마찬가지로, $y=2^{x-t}$는 $(t+1,2)$를 지난다는 점도 이용가능.

case 1) $1<t<2$ 인 경우

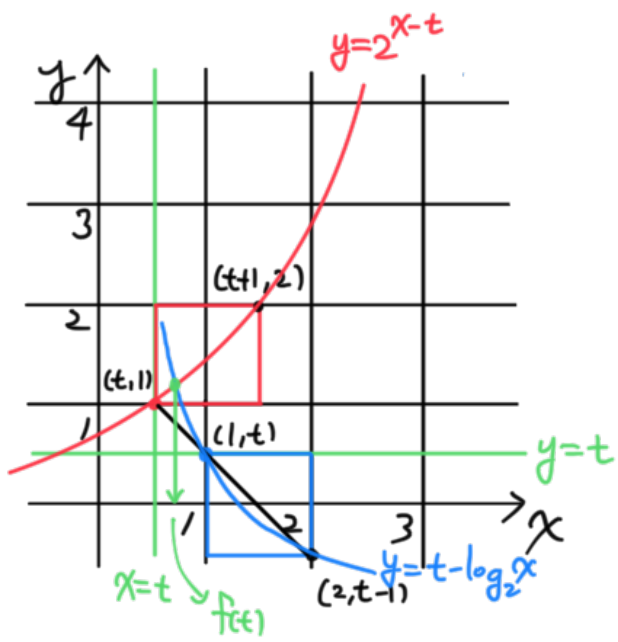


$y=t-\log_2 x$는 $(1,t)$, $(2,t-1)$를 지나지만 이 사이구간을 아래로 볼록하게 지나기 때문에 $y=2^{x-t}$의 정점의 x좌표인 $x=t$보다 왼쪽에서 교점이 발생하게 된다.
(기울기 -1인 직선과의 관계를 잘 생각해보시길!)

∴ $f(t)\le t$ 이므로 모순

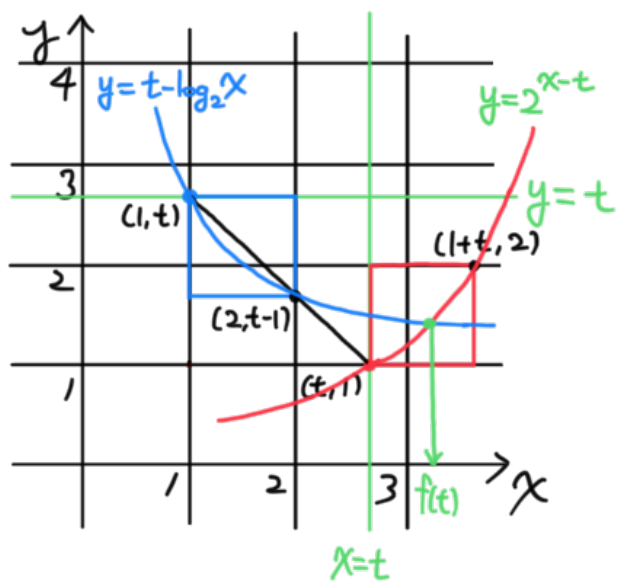
사실 실전에서는 여기까지 풀고 답 찍고 넘어가도 되지만 나머지 케이스도 모두 보자.

case 2) $0<t<1$ 인 경우



똑같은 논리로 $t\le f(t)$ 이므로 이 경우는 성립.

case 3) $2\le t$인 경우



마찬가지로 $t\le f(t)$ 이므로 성립.

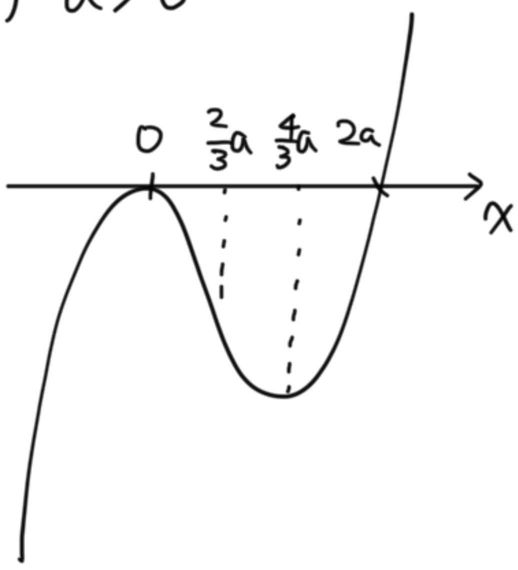
∴ $C=\boxed{0}$

㉠ $A+B+C=\boxed{110}$

22번 이어서 (case 분류)

만든 놈: ⓘ crazy_hansuckwon
수만휘, 오르비: 한석원의눈물

i) $a>0$

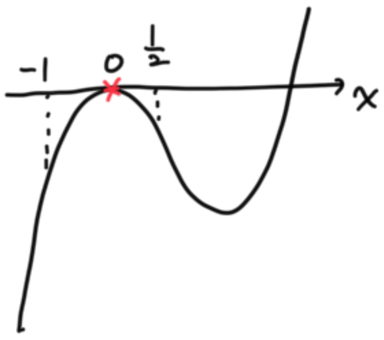


① $k\le -2$ 일때

구간의 끝점 $k+\frac{3}{2}\le -\frac{1}{2}$ 이므로 극점 × : 모순

② $k=-1$ 일때 (∵ k는 정수)

구간이 $(-1,\frac{1}{2})$ 이므로



⇒ 극점 $x=0$에서 보장

③ $k=0$ 일때

⇒ 정수 k의 곱이 -12이므로 $k=0$은 성립하면 안됨.

⇒ $(0,\frac{3}{2})$에 극점 없어야 함

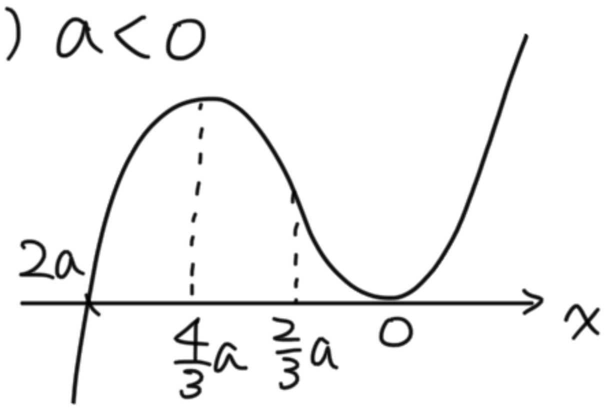
⇒ $\frac{3}{2}\le\frac{4}{3}a$ 이므로 $\frac{9}{8}\le a$

⋮

그런데 생각해보면 구간이 오른쪽으로 순차적으로 이동하므로 가능한 k도 연속된 자연수일텐데 연속된 자연수 k를 곱해서 12를 만들 수 있는 방법은 존재하지 않는다.

∴ $a>0$은 모순

ii) $a<0$

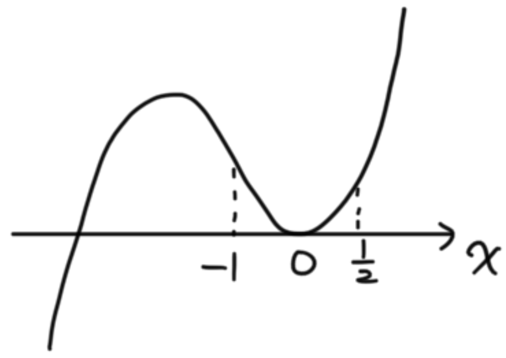


① $k\ge 0$ 일때

구간 내에 극점 존재하지 않음 ⇒ 모순

② $k=-1$ 일때

구간이 $(-1,\frac{1}{2})$ 이므로 사이에 극점 $(x=0)$ 존재



⇒ 성립 보장

여기서 음의 정수 k를 곱해 나머지 12를 만드는 방법은

(i) -2×-6 OR (ii) -3×-4 두 가지 방법뿐이다.

이때 $(-2)\times(-6)$인 경우는 $k=-3,-4,-5$일때 성립하면 ×

하지만 $(-2,-\frac{1}{2})$ 구간에 $x=\frac{4}{3}a$가 존재하다가 $(-3,-\frac{3}{2}),(-4,-\frac{5}{2}),(-5,-\frac{7}{2})$ 에서는 존재하지 않고 다시 $(-6,-\frac{9}{2})$에서 존재하는건 불가능.

(생각해보면 당연함... 극점은 1개밖에 없으니까!)

곧 (ii)인 경우가 정답임을 알 수 있다.

③ $k=-2$일 때

구간이 $(-2,-\frac{1}{2})$ 이므로 사이에 $x=\frac{4}{3}a$이 존재 ×

∴ $\frac{4}{3}a\le -2$ 이므로 $a\le -\frac{3}{2}$

④ $k=-3$일 때

동일하게 $(-3,-\frac{3}{2})$ 안에 $x=\frac{4}{3}a$ 존재

∴ $-3<\frac{4}{3}a<-\frac{3}{2}$ 이므로 $-\frac{9}{4}<a<-\frac{9}{8}$

⑤ $k=-4$일 때

동일하게 $(-4,-\frac{5}{2})$ 안에 $x=\frac{4}{3}a$ 존재

∴ $-4<\frac{4}{3}a<-\frac{5}{2}$ 이므로 $-3<a<-\frac{15}{8}$

⑥ $k\le -5$일 때

$-\frac{7}{2}\le\frac{4}{3}a$ 이면 되므로 $-\frac{21}{8}\le a$

모두 만족하는 정수 a : -2

곧 $f(x)=x^3+4x^2$ 에서

$f'(x)=3x^2+8x$ 이므로

㉠ $f'(10)=\boxed{380}$