SEOL:NAME THE SIGNATURE

설레임 N

테마별 **기출** 분석집

STORY 4. 개수 함수의 특징

설레임 모의고사
Team SeolName

04 개수 함수의 특징

함수 자체는 어렵지 않으니 겁먹지 말자!

STYLE 01

어디서 많이 본 함수 같은데? : 익숙하면서 새로운 함수

난이도가 높은 문제들을 풀다보면 일차함수, 이차함수와 같이 많이 알려진 함수가 아니라
문제에서만 쓰이는 새로운 함수를 정의한 후 조건을 주는 경우가 많아.
그 중 가장 대표적인 경우가 **실근의 개수, 교점의 개수**처럼 **개수랑 관련된 함수**인데,
새롭게 정의된 함수여도 어렵게 생각하지 않고 주어진 조건대로 하나하나 해결하다보면 풀 수 있어!

[2018학년도 9월 모의평가 나형 20번]

삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 $g(t)$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(x)=x^3$이면 함수 $g(t)$는 상수함수이다.
ㄴ. 삼차함수 $f(x)$에 대하여, $g(1)=2$이면 $g(t)=3$인 t가 존재한다.
ㄷ. 함수 $g(t)$가 상수함수이면, 삼차함수 $f(x)$의 극값은 존재하지 않는다.

우리만의 실전 풀이

THINKING!

공통 문제나 미적분 문제를 풀다보면 다음과 같은 발문들을 많이 볼거야.

1. 실수 x에 대한 방정식 ~의 서로 다른 실근의 개수
2. 두 곡선 ~와 ~가 만나는 점의 개수
3. 두 곡선 ~와 ~의 교점의 개수
4. 함수 $y=f(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수

이 발문들의 공통점이 무엇일까?

'함수 그래프의 교점' 또는 '방정식의 서로 다른 실근의 개수'에 대해서 이야기하고 있다는 것이야.

방정식과 삼수의 관계에 대해서 생각해보면 위 두 개의 말이 같은 의미라는 것을 알 수 있을거야.

그럼 이런 발문도 많이 봤을 거야.

"실수 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 하자."

이 경우에는 x에 대한 식과 t를 통해 새로운 함수 $g(t)$를 정의한거야.

함수의 정의는 교과서에 이렇게 나와있어.

〈 함수의 정의 〉

두 집합 X와 Y에 대하여

X의 각 원소에 Y의 각 원소가 오직 하나씩 대응할 때

$$f: X \to Y$$

에서 f를 'X에서 Y로의 함수'라고 한다.

실수 t가 하나 정해지면 $g(t)$의 값이 개수의 값으로 하나만 나오지?

그래서 이런 방식으로 $g(t)$를 함수로 정의할 수 있어.

그런데 이걸 특별히 부르는 명칭이 없으니 여기서는 이런 함수들을 '개수 함수'라고 부를게!

〈 개수 함수 〉

~가 성립하는 ~의 개수를 $g(t)$라 하자.

이때 $g(t)$는 다음 두 집합

$$X=\{t \mid t\text{는 실수}\},\ Y=\{n \mid n\text{은 자연수이거나 }0\text{이다.}\}$$

에 대하여 함수 g는

$$g: X \to Y$$

로 표현할 수 있다.

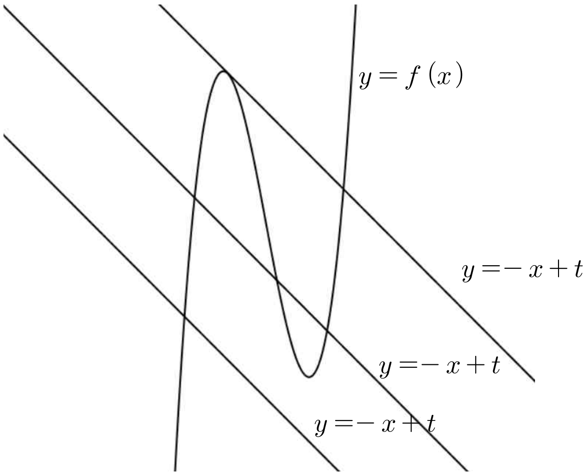
이런 함수들은 t의 값을 조금씩 조정해보면서 개수를 세어보면 함수를 파악할 수 있어!

이 문제는 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$의 교점의 개수를 개수 함수 $g(t)$라고 정의했네~

그럼 삼차함수와 일차함수의 관계를 생각하면서 문제를 해결해보자!

STEP 1 $g(t)$가 어떤 함수인지 파악해보자!

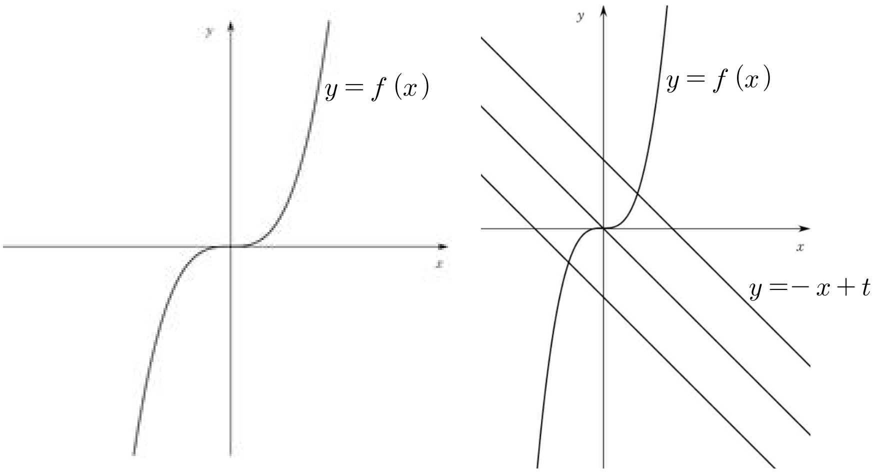
삼차함수 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+t$를 다음과 같이 한번 그려보자.



그래프를 직접 그려보니 $g(t)$는 두 그래프의 위치 관계에 따라서 1 또는 2 또는 3이 되겠네.

STEP 2 ㄱ을 풀어볼까? : 상수함수의 특징을 알아보자~

$y=f(x)$ 그래프에 $y=-x+t$ 그래프를 그려보자.



그려보면 항상 교점의 개수가 1인 것을 알 수 있어.

모든 t에 대해서 $g(t)=1$이니까 함수 $g(t)$는 상수함수야.

*** 다른 풀이**

위에서 설명한 것과 같이

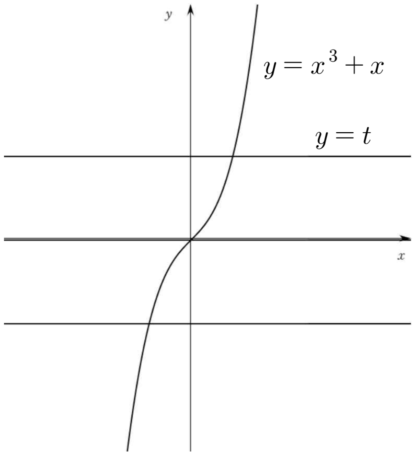
$y=f(x)$ 그래프에 $y=-x+t$ 그래프의 교점은 x에 대한 방정식 $f(x)=-x+t$의

서로 다른 실근의 개수와 같아.

그런데 $f(x)=x^3$였으니까,

방정식 $x^3+x=t$의 서로 다른 실근의 개수를 구하면 되겠네!

그럼 $y=x^3+x$ 그래프와 $y=t$ 그래프의 교점 개수를 파악해보자.



항상 $g(t)$가 1인 것을 통해 함수 $g(t)$는 상수함수임을 알 수 있어.

〈 상수 함수 〉

상수함수의 정의는 다음과 같아!

〈 상수함수의 정의 〉

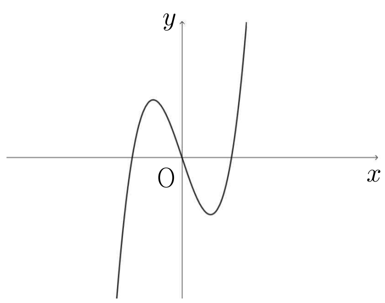
함수 $f:X \to Y$에 대하여

정의역 X의 모든 원소가 공역 Y의 하나의 원소 c에만 대응되는 함수

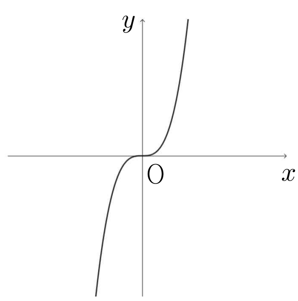
즉, 모든 x에 대하여 $f(x)=c$인 함수를 상수함수라고 한다.

상수함수, 항등함수와 같이 고1 수학에 나오는 표현도 까먹지 말고 기억해놓도록 하자!

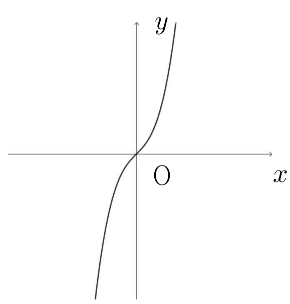
〈 삼차함수의 그래프 개형 〉



1번 경우



2번 경우



3번 경우

삼차함수에 대해서 그래프를 그리면 이렇게 세 가지 경우의 수가 나와.

그럼 각각의 경우를 좀 더 자세히 살펴보자.

1. 1번 경우

삼차함수가 극댓값과 극솟값을 가지는 경우야. (극값을 가지는 경우라고 해도 돼)

삼차함수는 극댓값만 가지거나 극솟값만 가지는게 불가능하기 때문에 둘 중에 하나를 가진다면 다른 것 하나를 가져.

2. 2번 경우

미분계수가 0인 지점이 존재하지만 극값은 가지지 않은 경우야.

만약 미분계수가 0인 점의 이 x 축 위에 존재한다면 삼중근을 가지는 삼차방정식으로 나타낼 수 있어.

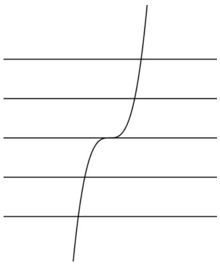
3. 3번 경우

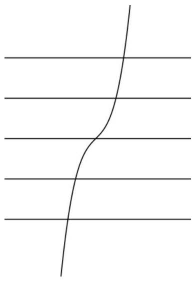
삼차함수의 미분계수가 0인 지점이 존재하지 않는 경우야.

그럼 이 세 가지 경우에서 $y=t$ 와의 교점을 $g(t)$ 라고 해볼까?

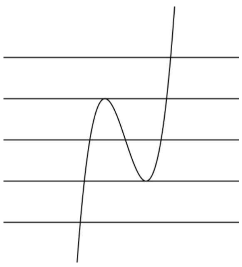
그럼 $g(t)$ 의 치역은 다음과 같이 두 가지 경우가 나와.

1. 치역이 $\{1\}$ 인 경우


← 2번 경우


← 3번 경우

2. 치역이 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 인 경우


← 1번 경우

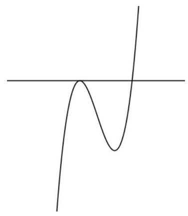
STEP 3 ㄴ을 풀어볼까? : 삼차함수의 실근의 개수는 2 가는데 3도 간다.

$y=f(x)$ 그래프에 $y=-x+t$ 그래프의 교점은 x 에 대한 방정식 $f(x)=-x+t$ 의 서로 다른 실근의 개수와 같으니까, 이렇게 생각해보자.

방정식 $f(x)+x=t$ 의 실근의 개수

$f(x)+x$ 도 당연히 삼차함수겠지?

삼차함수와 $y=t$의 교점이 2개가 존재한다면 3개가 되는 경우도 존재하겠네.



그럼 $g(t)=3$이 되도록 하는, $y=f(x)$와 $y=-x+t$의 교점이 3개가 되도록하는 t가 존재하겠다.

STEP 4 ㄷ을 풀어볼까? : 반례를 찾아보자~

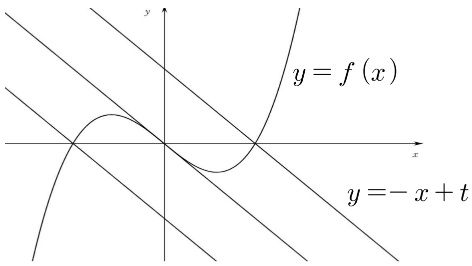
$g(x)$가 상수함수라고 가정해보자.

그럼 모든 실수 x에 대해서 $g(x)=1$이지 않을까? … STEP 2 〈 삼차함수의 그래프 개형 〉 **참고**

만약 ㄷ명제가 참이라면 $g(x)$가 상수함수 일때는 항상 $f(x)$의 극값이 존재하지 않아야해.

즉, **$y=f(x)$와 $y=-x+t$의 교점의 개수가 계속 1인 상황에서는 $f(x)$의 극값은 존재하지 않아야 하는데,**

그래프를 한번 이렇게 그려볼까?



이 상황에서는 두 그래프의 교점이 항상 1이지만 $f(x)$는 극값이 존재하네~

이런 반례가 존재하니까 ㄷ명제는 거짓인 명제라는 것을 알 수 있어.

* 다른 풀이

그래프가 아니라 식을 통해서도 확인할 수 있어.

$y=f(x)$와 $y=-x+t$의 교점의 개수가 계속 1인 상황에서는 $y=f(x)+x$와 $y=t$의

교점의 개수가 계속 1이니까

$y=f(x)+x$는 극값을 가지지 않는 함수겠네~ … STEP 3 〈 삼차함수의 실근의 개수 〉 **참고**

일단 $f(x)$는 삼차함수라는 조건외에는 특별한 조건이 없기 때문에

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$라고 가정해보자. $(a>0)$

그럼 $y=ax^3+bx^2+(c+1)x+d$가 극값을 가지지 않으니까

미분한 $y'=3ax^2+2bx+c+1$에서 판별식을 사용하면 되겠지?

$b^2-3a(c+1)\le 0$이여야 극값을 가지지 않아.

그런데 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$가 극값을 가지지 않으려면

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ 이니까 $b^2 - 3ac \le 0$ 이여야해.

$b^2 - 3a(c+1) \le 0$ 을 좀 변형하면 $b^2 - 3ac \le 3a$ 인데

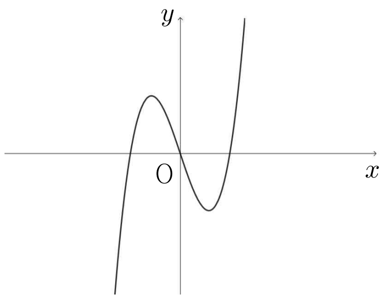
a 가 양수이면 $b^3 - 3ac$ 가 양수여도 되는데 이 경우에는 $b^2 - 3ac \le 0$ 가 성립하지 않겠지?

이렇게도 반례를 찾을 수 있어!

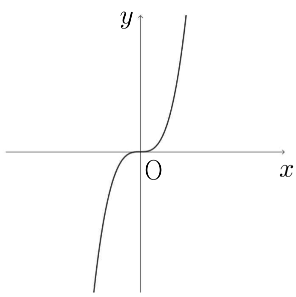
[정답] ㄱ, ㄴ, ㄷ

〈 삼차함수와 판별식 〉

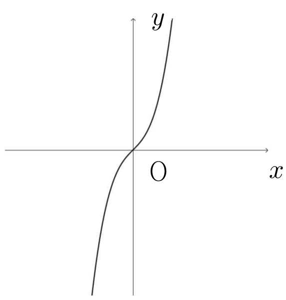
삼차함수는 다음과 같이 세 가지 개형을 가져.



1번 경우

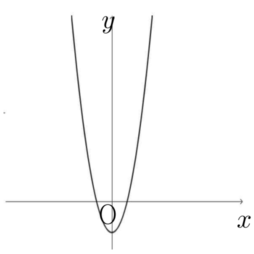


2번 경우

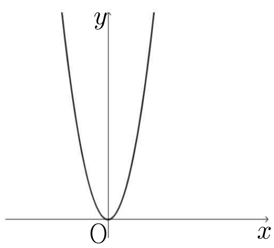


3번 경우

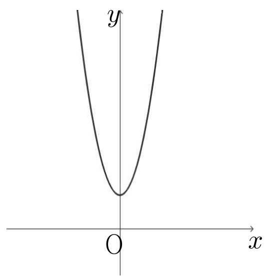
그러면 도함수는 이렇게 나오겠네.



1번 경우



2번 경우



3번 경우

판별식으로 생각해볼까? 도함수의 판별식을 D 라고 해보자.

1번 경우	2번 경우	3번 경우
서로 다른 두 실근 : $D > 0$	중근 : $D = 0$	허근 : $D < 0$

이렇게 실근의 개수로 새롭게 정의된 함수가 나오면 먼저 그 함수를 확실히 파악한 뒤
그 다음 조건들을 차례로 해석해나면 문제를 해결할 수 있어.
그래프로 해석하고 싶다면 t 와 같은 변수들을 하나씩 움직여가면서 파악해보거나
식으로 해석하고 싶다면 함수와 방정식 사이의 관계를 활용해서 파악해볼 수 있지.
특히 [수학Ⅱ]에서는 삼차함수와 사차함수가 많이 나오니 이런 함수들은 문제들을 풀면서 익숙해지도록 하자!

★ STYLE 01 부록1 - 개수 함수의 정의역이 기울기이어도 된다!

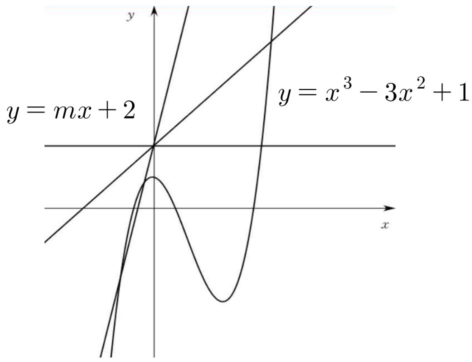
방금전에는 개수 함수의 정의역이 $y=t$ 에서의 t 값이라고 생각하거나
$y=-x+t$ 에서 일차함수의 y 절편이라고 생각하고 문제를 풀었어.
하지만 개수 함수가 그런 방식으로만 정의될 필요는 없겠지?
이 문제를 한번 풀어보자!

[2012학년도 수능 가형 19번]

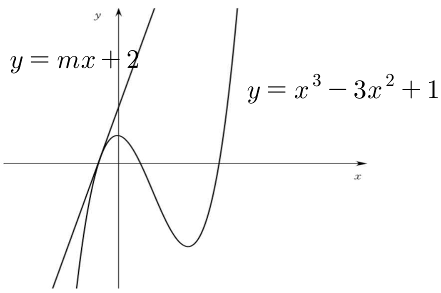
실수 m 에 대하여 점 $(0,\ 2)$ 를 지나고 기울기가 m 인 직선이 곡선 $y=x^3-3x^2+1$ 과 만나는 점의 개수를 $f(m)$ 이라 하자. 함수 $f(m)$ 이 구간 $(-\infty,\ a)$ 에서 연속이 되게 하는 실수 a 의 최댓값은? [4점]

풀이 기울기에 따라 달라지는 교점의 개수

이 문제에서는 $f(m)$ 이 만나는 점의 개수이긴 하지만 방금 전 문제와는 다르게 기울기가 정의역이네!
하지만 문제에 접근하는 방법은 비슷해.
일단 곡선 $y=x^3-3x^2+1$ 을 그리고,
점 $(0,\ 2)$ 를 찍은 뒤 그 점을 지나는 직선들을 기울기에 따라 달라지게 한번 그려서 상황을 파악해봐!

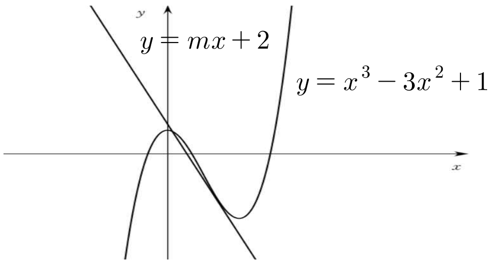


$f(m)$ 이 구간 $(-\infty,\ a)$ 에서 연속이 되려면 m (기울기)가 a 일때까지는 교점의 개수가 계속 같아야겠네!
참고로, 개수함수의 연속과 불연속에 관해서는 뒤에 나오는 STYLE 03에서 자세히 다룰게!
일단 연속의 정의를 생각해보면 **'개수함수가 연속이다'**라는 건
'개수가 중간에 변하는 과정 없이 일정해야한다'라는 걸 이해할 수 있을 거야. 개수는 **자연수**이니까.
그러면 기울기가 변하다가 곡선 $y=x^3-3x^2+1$ 과 직선의 교점의 개수가 변하는 순간을 집중해서 보자.

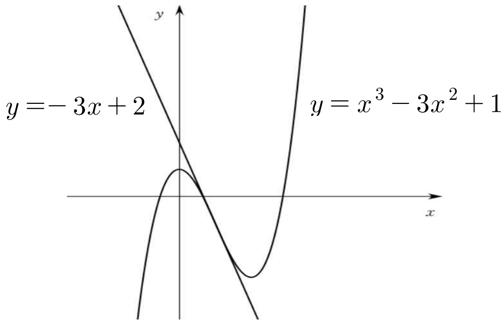


이렇게 접하는 순간이겠네. 기울기가 지금은 2개, 더 커지면 3개가 되는 것을 확인해볼 수 있어.

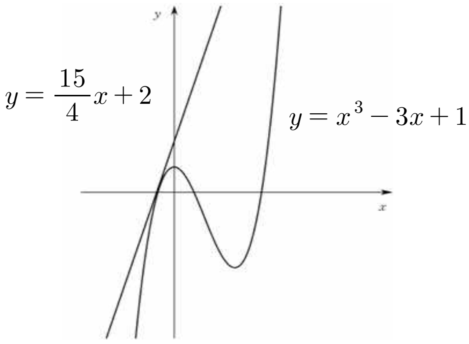
지금보다 작다면 1개가 되는 순간이 생기는데 계속 1이 되는지도 확인해보자. 만약 그래프가 이렇게 접하는 상황이 된다면 $-\infty$ 부터 이때까지만 연속이겠지?



하지만 그래프가 어떻게 될지는 그림만으로는 확실히 알 수가 없어.
그럼 그래프가 어떻게 접할지는 이제 식으로 한번 체크하는 과정이 필요할 것 같아.
점 $(0,\ 2)$ 에서 $y = x^3 - 3x^2 + 1$ 로 그은 접선을 구하면 되겠네.
외부에 있는 점에서 그은 접선을 구하는 방법은 많이 연습이 되어있겠지?
$y = x^3 - 3x^2 + 1$ 에서의 접점을 $(t,\ t^3 - 3t^2 + 1)$ 이라고 하자.
그럼 접선이 $y = \left(3t^2 - 6t\right)(x - t) + t^3 - 3t^2 + 1$ 이고 이 접선이 점 $(0,\ 2)$ 을 지나니까 대입해보면
$(t-1)^2(2t+1) = 0$ 라는 식이 나오네.
$t = 1$ 일 때는 다음과 같이 되겠네.



$x^3 - 3x^2 + 1 = -3x + 2$ 는 삼중근을 가지겠다. $t = -\dfrac{1}{2}$ 일 때도 확인해보자.



기울기가 $\dfrac{15}{4}$ 일 때까지는 교점이 1개이고 그것보다 커지면 3개가 된다는 것을 알 수 있어.
그럼 $\left(-\infty,\ \dfrac{15}{4}\right)$ 에서 $g(m)$ 은 연속이니까 a 의 최댓값은 $\dfrac{15}{4}$ 이겠다.

참고로 $g(m)$은 다음과 같이 나타낼 수 있어.

$$g(m)=\begin{cases}1 & \left(m<\dfrac{15}{4}\right)\\ 2 & \left(m=\dfrac{15}{4}\right)\\ 3 & \left(m>\dfrac{15}{4}\right)\end{cases}$$

[정답] $\dfrac{15}{4}$

★ STYLE 01 부록2 – 교점의 개수가 ~가 되도록하는 ~의 개수를 ~라 하자!

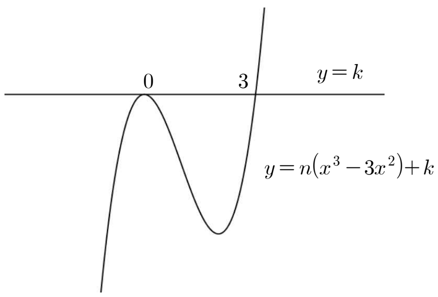
앞의 문제들은 교점의 개수를 개수 함수의 함숫값으로 생각했어.
하지만 특정 교점의 개수가 되도록하는 어떤 값의 개수를 구하라고 하는 문제는 어떻게 해야할까?
일단 이 문제를 한번 풀어보자!

[2019학년도 사관학교 나형 16번]

자연수 n에 대하여 삼차함수 $y=n(x^3-3x^2)+k$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수가 3이 되도록 하는 정수 k의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{10} a_n$의 값은? [4점]

설명 수열도 함수이다

수열도 자연수 전체 집합에서 실수 전체 집합으로 가는 함수로 생각할 수 있어.
우리가 개수함수를 실수 전체 집합에서 자연수 전체 또는 0인 집합으로 가는 함수로 생각하고 있었지.
그럼 이 문제에서의 수열 $\{a_n\}$은 자연수 전제 집합에서 자연수 전체 또는 0인 집합으로 가는 '함수'로도 생각할 수 있어.
즉, 수열 $\{a_n\}$에서 자연수 n의 값이 정해지면 x축과 만나는 점의 개수가 3이 되는 k들을 정할 수 있지!
그 k들의 개수를 구하면 그 값이 a_n의 값이야.
삼차함수 $y=n(x^3-3x^2)+k$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수를 구하기 위해 그래프를 그려보자!



$x=0$일 때 극대이고, 직접 미분해보거나 삼차함수의 비율관계를 사용하면 $x=2$일 때 극소이네.
극댓값이 k이고, 극솟값이 $k-4n$이니까 x축이 그 사이에 있다면 x축과의 교점이 3개가 되겠지.

그럼 $k-4n<0<k$이라는 관계를 알 수 있어.

$0<k<4n$ 이니까 가능한 자연수 k의 개수는 $4n-1$개야.

$\sum_{n=1}^{10} a_n = \sum_{n=1}^{10}(4n-1)=210$이라는 건 [수학 I]에서 배운 사실을 사용하면 구할 수 있겠지?

[정답] 210

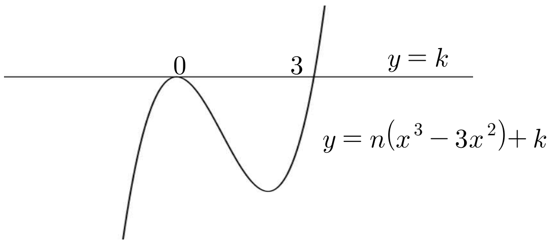
〈 삼차함수 그리기와 비율관계 〉

주어진 삼차함수를 그리는 방법은 다양하겠지만 여기서 사용한 방법은 $y=k$와의 관계로 그리는 방법이야.

$y=n(x^3-3x^2)+k$ 그래프는 $y=nx^2(x-3)+k$로 나타낼 수 있으니까

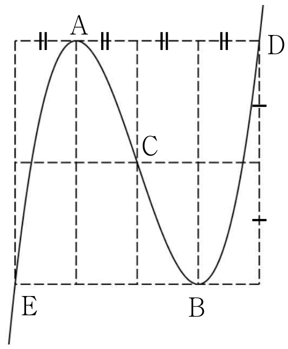
$y=k$ 그래프를 하나의 축으로 생각해서 $x=0$에서 중근을, $x=3$에서 하나의 근을 가지는 그래프야.

그래서 위와 같은 그래프를 바로 그릴 수 있어.



만약 상수항 하나를 제외하고 쉽게 인수분해가 되는 경우에는 이렇게 그리는 방법이 쉬울 수 있어!

그리고 삼차함수에는 항상 성립하는 비율관계가 있는데,



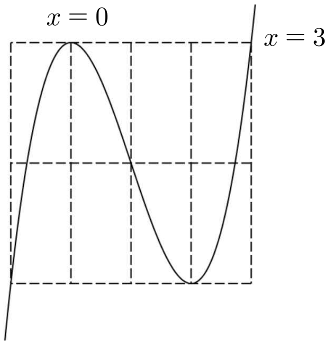
위와 같이 **극대인 지점, 극소인 지점, 점대칭의 중심**(미적분에서는 삼차함수의 변곡점이라고도 불러), **극대인 지점에서 x축과 평행하게 그은 직선과 만나는 점, 극소인 지점에서 x축과 평행하게 그은 직선과 만나는 점**

5개의 점을 찍은 뒤(그 점들을 순서대로 A, B, C, D, E라고 할게),

x축과 y축에 평행한 선분들을 그어서 직사각형들을 그려봐.

그럼 x축과 평행한 4개의 선분 길이가 모두 같고, y축과 평행한 2개의 선분 길이가 모두 같아.

이 문제에서는 다음과 같이 상황이 주어졌어.



그럼 이 삼차함수는 $x=2$ 에서 극소인 것을 알수 있지.
삼차함수의 비율관계에 대해서는 다음에 기회가 되면 더 자세히 이야기해볼게.

〈 자연수의 개수 〉

가끔 문제를 풀다보면 $a<n<b$ 인 자연수 n 의 개수를 구해야하는 경우가 있어.
혹시 이런 개수를 구하기 헷갈린다면 이렇게 생각해봐도 좋을 것 같아!
(참고로 여기서 이야기하는 상수 a 와 b 는 자연수야.)

1. $a<n<b$ 인 자연수 n

$a+1$ 부터 $b-1$ 까지의 자연수의 개수를 구하는 상황이니까 1 부터 $b-1$ 까지의 자연수의 개수에 1 부터 a 까지의 자연수의 개수를 뺀 값이겠네!

2. $a\le n\le b$ 인 자연수 n

a 부터 b 까지의 자연수의 개수를 구하는 상황이니까 1 부터 b 까지의 자연수의 개수에 1 부터 $a-1$ 까지의 자연수의 개수를 뺀 값이겠네!

$a\le n<b$ 나 $a<n\le b$ 와 같은 경우도 위와 같은 방법으로 생각하면 돼!
ex. $37<n<97$ 인 자연수 n 의 개수는 $1\sim 96$ 의 개수에 $1\sim 37$ 의 개수를 뺀 값이니까 $96-37=59$ 이야.

일반화하면 다음과 같이 나타낼 수 있어.

“자연수 a, b, n 에 대하여 a 와 b 사이의 n 의 개수는 등호가 k 개일 때 $b-a-1+k$ 개다.”

예를 들어 $a<n\le b$ 를 만족하는 자연수 n 의 개수는 등호가 1개니까 $b-a$ 개이겠지.

STYLE 02

뾰족한 점의 개수를 세어보자 : 미분가능하지 않은 x의 개수 구하기!

이런 발문 많이 본 적 있지?

함수 $|f(x)|$가 미분가능하지 않은 점의 개수는?

함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 점의 개수는?

그러면 당연히 그 개수를 함수로도 만들 수 있겠네!

아래에 있는 문제를 한번 풀어보자.

[사관학교 2019학년도 가형 21번 변형]

함수 $f(x) = x|x^2 - 3x + 2|$가 있다. 양수 k에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (f(x) \le kx) \\ kx & (f(x) > kx) \end{cases}$$

라 하자. 구간 $(-\infty, \infty)$에서 함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수를 $h(k)$라 할 때, $h(k) = 3$을 만족시키는 k값의 범위는 $a \le k < b$ 또는 $k > b$이다. $a + b$의 값을 구하시오. [4점]

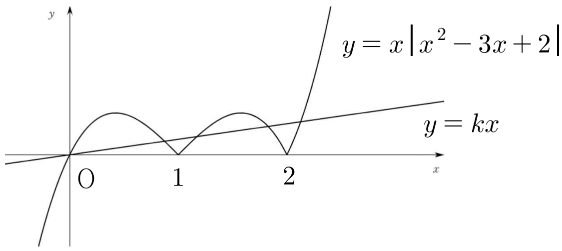
우리만의 실전 풀이

THINKING!

앞의 STYLE 01에서는 직선이나 기울기를 조금씩 움직여보면서 개수를 세어봤지.
이번에도 비슷해! **변수를 조금씩 조정해보면서 미분가능하지 않은 점의 개수를 세어보면돼!**
이 문제같은 경우에는 $y=f(x)$와 $y=kx$의 관계를 살펴보는 문제인 것 같네.
두 개의 함수를 그리고 $h(k)$가 어떤 함수인지 한번 파악해보자.

STEP 1 함수를 그리자!

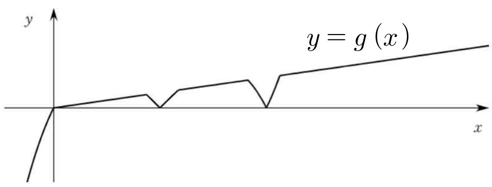
$g(x)$가 $f(x)$와 kx로 이루어진 함수이니 두 개를 먼저 그려보자.



대충 아무렇게나 $y=kx$를 잡고 함수 $g(x)$를 파악해볼거야. 함수 $g(x)$는 이렇게 정의됐었지.

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\le kx) \\ kx & (f(x)>kx) \end{cases}$$

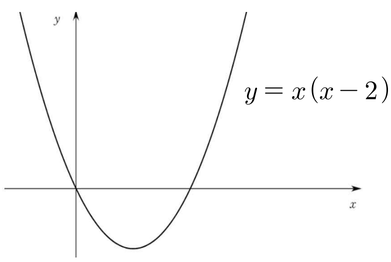
만약 $f(x)$가 kx보다 작다면 $f(x)$이고, kx가 $f(x)$보다 작다면 kx이니까
$f(x)$와 kx중에서 작은게 $g(x)$로 선택되는 거야.
그럼 $y=g(x)$는 이렇게 그릴 수 있겠네.



k에 따라 변하는 $g(x)$의 그래프는 $f(x)$의 그래프와 원점을 지나는 직선을 그리면서 파악하면 돼!

〈 절댓값이 들어간 함수 그리기 〉

$y=x(x-2)$의 그래프가 있다고 가정해보자.



그럼 절댓값이 씌워진 함수 $y=|x(x-2)|$는 어떻게 그릴 수 있을까?
일단 절댓값의 정의는 다음과 같아.

〈 절댓값의 정의 〉

수직선 위에서 원점과 어떤 수에 대응하는 점 사이의 거리이다.

위와 같은 경우에서는 $|-2|=2$, $|5|=5$이다.

그리고 절댓값은 어떤 수에 절댓값을 씌우게 되면 음수는 $-$부호를 뺀 수(즉, -1을 곱한 수)가 되고,
0과 양수는 그 수 그대로가 된다는 특징이 있어.
그러니까 아래와 같은 상황이 되는거지.

$$|x|=\begin{cases} x & (x \ge 0) \\ -x & (x<0) \end{cases}$$

그럼 $y=|x(x-2)|$도 $x(x-2)$가 0보다 크거나 같은 상황과 0보다 작은 상황을 구분해서 생각해보자.

1. $x(x-2) \ge 0$인 경우

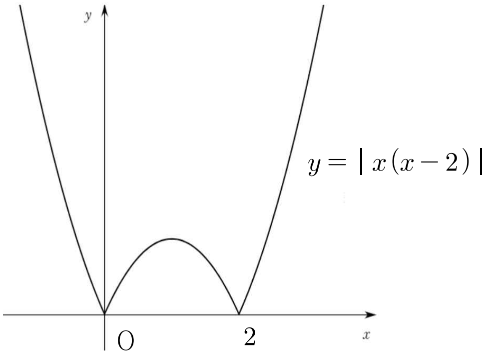
위 부등식의 해는 $x \ge 2$ 또는 $x \le 0$이니까,
$x \ge 2$ 또는 $x \le 0$일때는 $|x(x-2)|$가 $x(x-2)$ 그대로이겠네!

2. $x(x-2) < 0$인 경우

위 부등식의 해는 $0<x<2$이니까,
$0<x<2$일때는 $|x(x-2)|$가 $x(x-2)$에 -1을 곱해서 $-x(x-2)$가 되겠네!
$y=|x(x-2)|$는 다음과 같이 나타낼 수 있어.

$$|x(x-2)|=\begin{cases} x(x-2) & (x \le 0 \text{ 또는 } x \ge 2) \\ -x(x-2) & (0<x<2) \end{cases}$$

이것을 그래프로 나타내면 다음과 같아.



하지만 다른 방식으로도 접근할 수 있어.

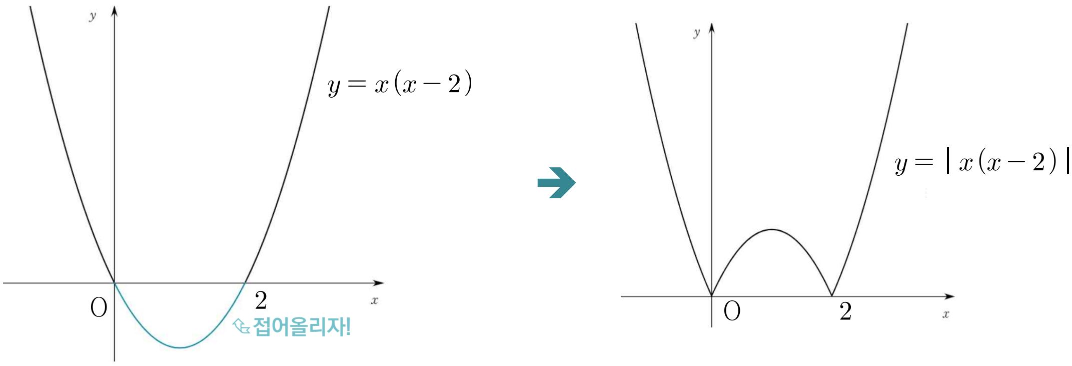
어떤 함수값의 부호가 반대로 바뀌면 이렇게도 해석할 수 있지.

“x축에 대해서 대칭이다.”

그러면 함수에 절댓값을 씌운 함수는

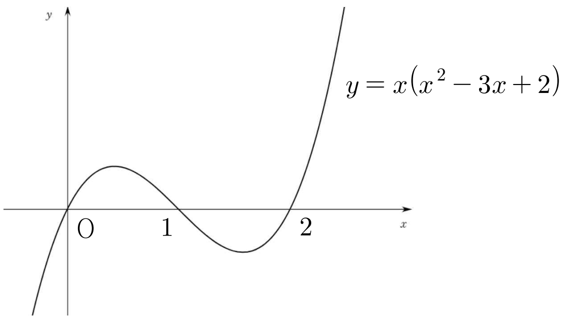
함수값이 음수인 부분만 x축에 대해서 대칭 시켜도 되지 않을까?

그렇게 접근해도 다음과 같이 함수의 그래프를 그릴 수 있어.



그럼 이 사실을 응용해서 $y=x|x^2-3x+2|$ 의 그래프를 그려보자.

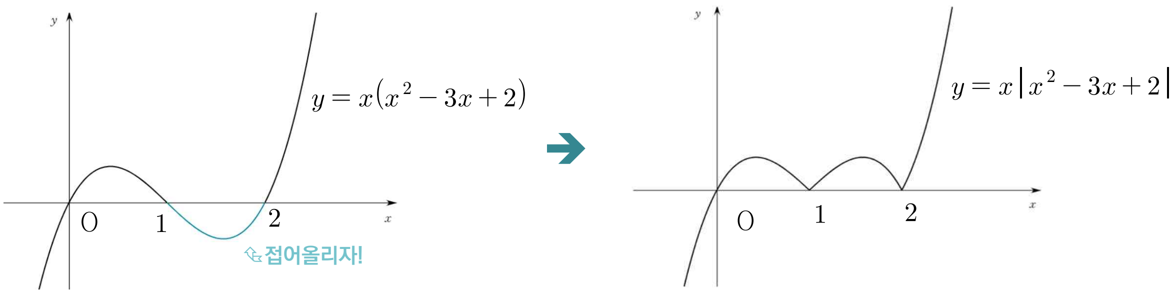
일단 $y=x(x^2-3x+2)$의 그래프는 다음과 같아.



절댓값이 씌워진 부분이 x^2-3x+2이니까 이 부분이 음수가 되는 x의 범위를 보자.

$1<x<2$일 때만 x^2-3x+2가 음수이니까,

$y=x|x^2-3x+2|$ 의 그래프는 $1<x<2$일 때만 x축 기준으로 대칭시키면 되겠다.



그래서 결론은! 함수에 절댓값이 쓰인 경우에는 일단 이렇게 생각하자.

1. 절댓값 안의 값이 음수가 되는 경우를 찾는다.

2. 그 부분만 x 축에 대해서 대칭시킨다.

⇨ 더 간단하게는 절댓값 때문에 부호가 바뀌는 범위에서 x 축 아래 부분을 위로 접어올린다!

STEP 2 뾰족한 부분을 찾자!

함수 $g(x)$가 미분가능하지 않은 x의 개수를 세어야 하니 일단 함수 $g(x)$에서 미분가능하지 않은 곳이 어디인지 조사를 해보자. 일단 '미분가능하다'의 정의는 다음과 같아.

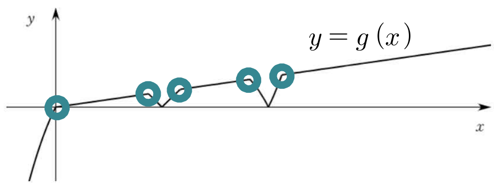
〈 미분가능의 의미 〉

평균변화율의 극한값 $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ 이 존재할 때, 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능하다.**

그러면 $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ 이 존재하지 않으면 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 **미분가능하지 않아.**

$g(x)$ 같은 경우는 $\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ 가 존재하지 않는 점은

$\lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ 와 $\lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ 의 값이 다른 점이겠네. 그런 점은 다음과 같아.



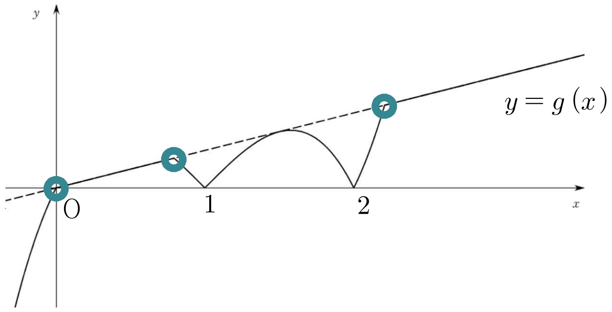
그래프로 그렸을 때, 부드럽지 않고 갑자기 꺾이는 지점을 찾아도 돼!

그 이유는 $\lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ 와 $\lim_{h \to 0-} \frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ 가 어떤 의미인지 생각해보면 알 수 있을거야.

STEP 3 **3개가 되는 범위를 찾자!**

일단 방금 찾은 $g(x)$는 미분가능하지 않은 점이 5개가 있네.

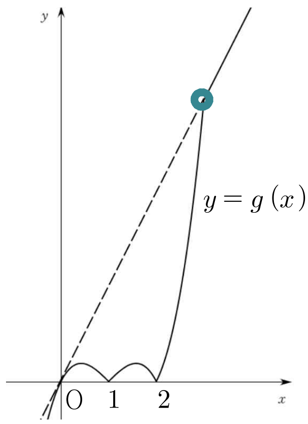
k의 값을 더 낮춰도 달라질건 없을 것 같으니까 k값을 높여서 기울기를 올려보자.



이렇게 $y=kx$와 $y=f(x)$가 접하는 순간부터 $g(x)$가 3개의 점에서 미분가능하지 않네.

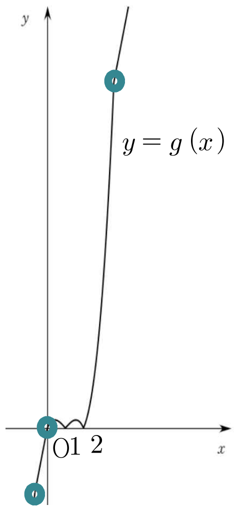
이 순간부터 3개의 점에서 미분가능하지 않는다는 걸 알 수 있어.

그럼 여기서 더 기울기를 올려볼까?



3개의 점에서 미분가능하다가 다시 접하는 순간이 오니까 이제 1개의 점에서 미분가능하지 않네.

그럼 여기서 더 올려보자.



다시 3개의 점에서 미분가능하지 않네.

여기서는 더 기울기를 올려도 계속 3개가 된다는 것을 알 수 있어.
그럼 미분가능하지 않은 점의 개수가 3개가 되는 순간은 다음을 경계로 하면 돼.

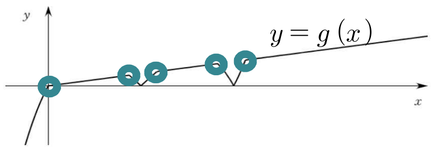
"$y=f(x)$ 와 $y=kx$ 가 접하는 순간"

먼저 접점의 x 좌표가 1과 2 사이에 있는 경우부터 구해보자.
$1<x<2$ 일 때는 $g(x)=-x(x^2-3x+2)$ 이니까
점 $(0,\ 0)$ 에서 $y=-x(x^2-3x+2)$ 으로 그은 접선을 구하면 되겠지.
그때의 기울기는 직접 구해보면 $\frac{1}{4}$ 라는 것을 알 수 있어.
그리고 $(0,\ 0)$에서 접하는 경우는 $g'(0)$ 의 값을 구하면 되니까 그때의 기울기는 2이겠네.
그럼 정리해보면 $\frac{1}{4}<k<2$ 또는 $k>2$ 일 때 $h(k)=3$ 이니까 $a=\frac{1}{4}$, $b=2$ 이겠다!

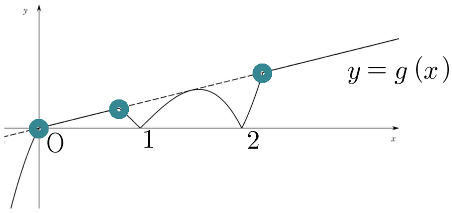
[정답] $\frac{9}{4}$

〈 이렇게도 해석 가능하다! 〉

눈치가 빠른 사람들은 꼭 $g(x)$ 의 그래프를 일일이 그리지 않아도 된다는 사실을 알았을거야.
일단 다음과 같은 경우를 보자.



이 경우는 $y=f(x)$ 와 $y=kx$ 가 접하지 않으면서 만나는 점이 5개이고 그 점이 미분가능하지 않은 지점이야.
(초록색으로 동그라미 표시 해놓은 점이야)
다음 경우를 보자.



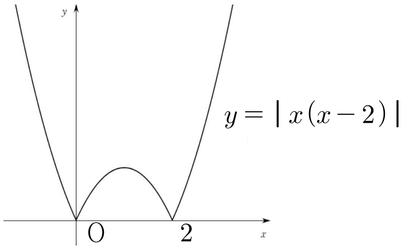
이 경우는 $y=f(x)$ 와 $y=kx$ 가 접하지 않으면서 만나는 점이 3개이고 그 점이 미분가능하지 않은 지점이야.
(초록색으로 동그라미 표시 해놓은 점이야)
그리고 한 점에서도 만나는데 그 점은 접하는 점이지.
하지만 그 점에서는 미분 가능해! 이 사실을 통해 다음과 같은 규칙성을 발견할 수 있어.

"접하지 않으면서 만나는 점에서 미분가능하지 않는다."

미분가능하지 않은 x 의 개수와 같은 경우에는 그래프를 그려서 확인하는 것이 빠른 방법 중 하나야.
그리고 미분가능하지 않은 점의 개수 뿐만 아니라 불연속인 점의 개수 등 다양한 방법으로도 함수를 정의할 수 있으니, 이런 함수가 나와도 당황하지 말고 주어진 조건대로 차근차근 그래프를 그려봐!
아, 그리고 불연속인 점도 미분가능하지 않은 점이기 때문에 이 사실도 주의해서 체크해 봐.

★ STYLE02 부록 - 함수에 절댓값이 있으면 미분가능하지 않은 점이 바로 보인다?

먼저 앞에 예시로 보여줬던 함수를 들고 와볼게.



이 함수는 다음과 같아.

$$|x(x-2)|=\begin{cases} x(x-2) & (x \le 0 \text{ 또는 } x \ge 2) \\ -x(x-2) & (0<x<2) \end{cases}$$

그러면 $\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(x)}{h}=-2$, $\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(x)}{h}=2$ 이고,

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+h)-f(x)}{h}=-2$, $\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+h)-f(x)}{h}=2$ 이니까

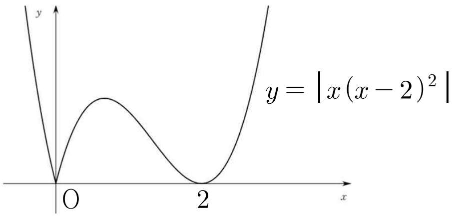
$x=0$, $x=2$ 에서 미분가능하지 않아.

참고로 여기서 미분가능하지 않은 점은 $\lim_{h\to 0+}\frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ 와 $\lim_{h\to 0-}\frac{f(a+h)-f(x)}{h}$ 가 다른 점이니까

함수의 기울기가 갑자기 꺾이는 지점이겠지?

그래서 **부드럽게 이어지지 않고 갑자기 꺾이는 지점을 찾아도 그 지점이 미분가능하지 않은 점**이야.

하지만 한 점에서 접하는 경우에는 어떻게 될까?



$\lim_{h\to 0-}\frac{f(0+h)-f(x)}{h}=-4$, $\lim_{h\to 0+}\frac{f(0+h)-f(x)}{h}=4$ 이니까 $x=0$ 에서는 미분가능하지 않지만

$\lim_{h\to 0-}\frac{f(2+h)-f(x)}{h}=0$, $\lim_{h\to 0+}\frac{f(2+h)-f(x)}{h}=0$ 이여서 $x=2$ 에서는 미분가능하네!

그럼 함수 전체에 절댓값이 씌워진 경우는 다음과 같은 사실을 생각해볼 수 있어.

1. x축과 접하지 않으면서 만나면 그 지점에서 미분가능하지 않다.

2. x축과 접하면서 만나면 그 지점에서 미분가능하다.

그리고 STYLE 02에 나온 문제들과 이 예시들은 만나는 점 외에는 모두 미분가능하다는 사실은 이해할 수 있겠지? (다항함수이기 때문에 어차피 미분가능해!)

STYLE 03

갑자기 개수가 바뀐다고? : 개수 함수의 연속성

앞에서 본 문제들을 보면 개수 함수의 함수값이 바뀌는 경우가 있어.
그때마다 이 함수의 특징이 나타나는데, 이 함수의 치역은 자연수이거나 0이기 때문에 개수가 바뀌면 그 지점에서 불연속이야.
그럼 개수 함수가 불연속이라는 조건도 문제에 나올 수 있지 않을까?
먼저 이 문제를 풀어보자!

[2022학년도 4월 학력평가 20번]

최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-f(-x)$를 만족시키다. 양수 t에 대하여 좌표평면 위의 네 점 $(t,\ 0)$, $(0,\ 2t)$, $(-t,\ 0)$, $(0,\ -2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모가 곡선 $y=f(x)$와 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 $t=\alpha$, $t=8$에서 불연속이다. $\alpha^2\times f(4)$의 값을 구하시오. (단, α는 $0<\alpha<8$인 상수이다.) [4점]

우리만의 실전 풀이

THINKING!

이미 STYLE 01에서 이야기한 사실이지만 한 번 더 복습해보자!

〈 개수 함수 〉

~가 성립하는 ~의 개수를 $g(t)$라 하자.

이때 $g(t)$는 다음 두 집합

$X=\{t|t\text{는 실수}\}$, $Y=\{n|n\text{은 자연수이거나 }0\text{이다.}\}$

에 대하여 함수 g는

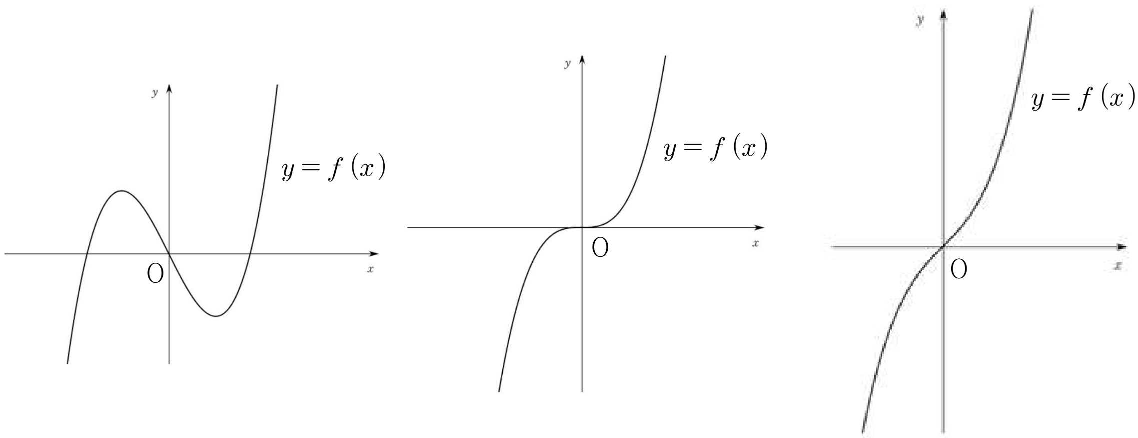
$$g: X \to Y$$

로 표현할 수 있다.

개수 함수의 함숫값은 자연수이거나 0이야. 1개, 2개, 3개... 이렇게 표현되는 값이기 때문에
개수함수가 불연속이라는 것은 개수가 바뀌는 과정이 존재했다는 거야.
일단 이 문제에서는 삼차함수와 마름모가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라고 정의했네.
그러면 먼저 $g(t)$부터 파악을 해보자!

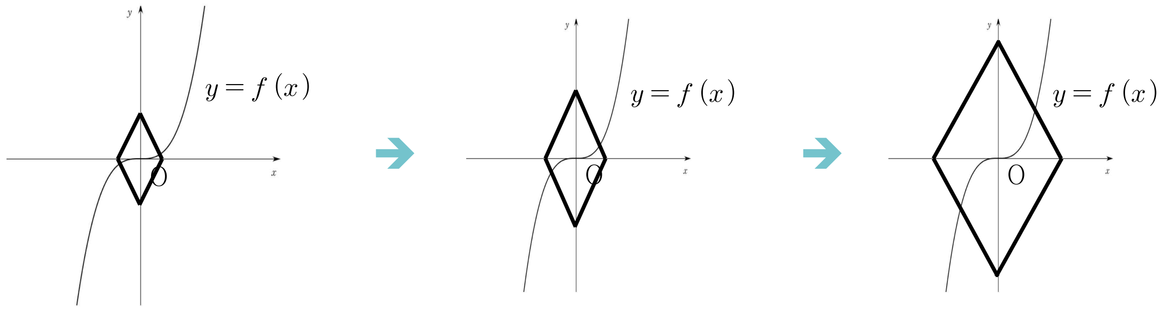
STEP 1 함수부터 파악하자!

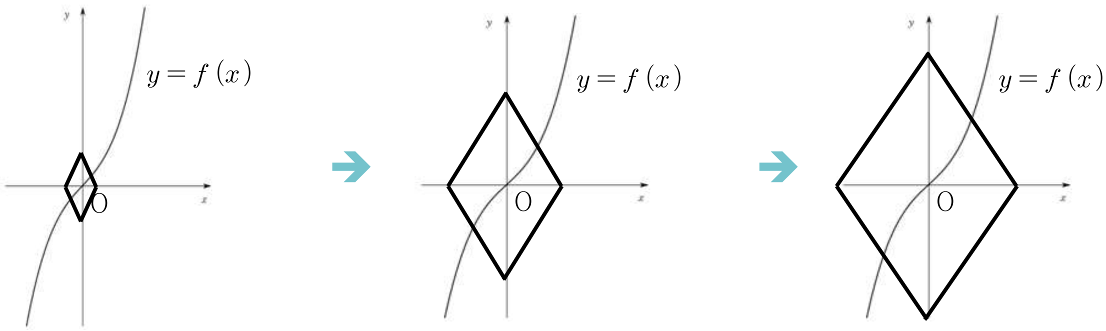
삼차함수가 모든 실수 x에 대하여 $f(x)=-f(-x)$라는 것은 기함수라는 것이니까, 대칭점이 원점이겠지.
그럼 삼차함수를 이렇게 그려보자.



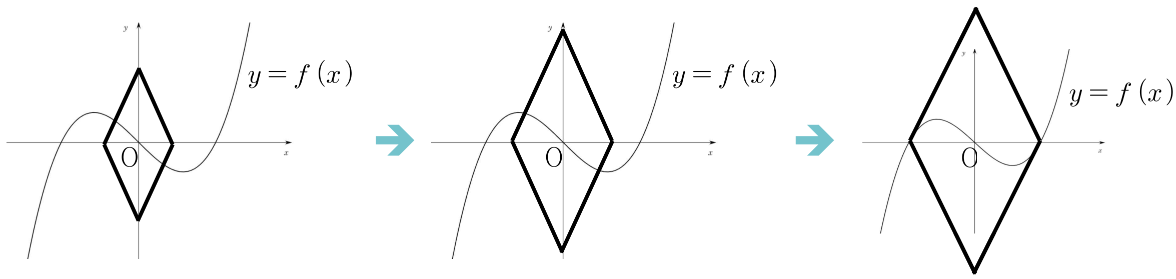
1번째 경우 2번째 경우 3번째 경우

네 점 $(t,\ 0)$, $(0,\ 2t)$, $(-t,\ 0)$, $(0,\ -2t)$를 꼭짓점으로 하는 마름모는 변들의 기울기가 2와 -2인 마름모야. 그럼 위에 그린 그래프에 마름모들을 그려보자.
참고로 여기서 마름모와 삼차함수 두 개 다 원점에 대해서 대칭이니까, 그 부분을 신경써보자.
2번째와 3번째 경우는 마름모를 계속 그려도 만나는 점의 개수가 2이네.

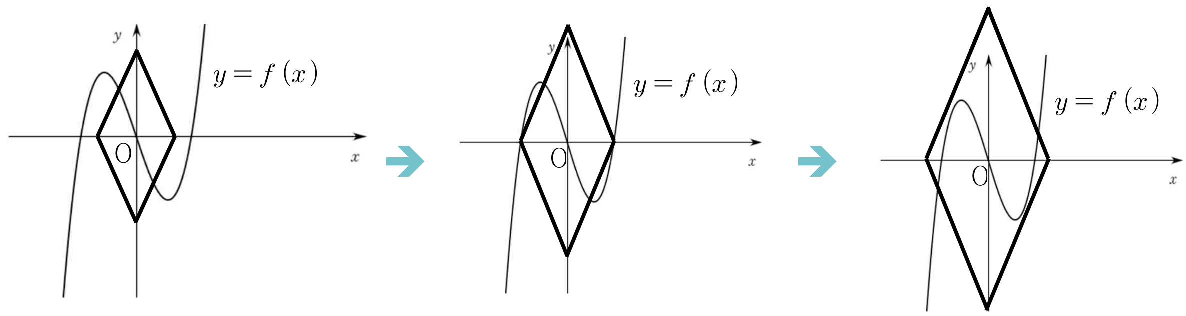




1번째 경우도 이렇게 된다면 만나는 점의 개수가 항상 2야.



그럼 그래프를 조금 다르게 그려서 이렇게 되면 어떻게 될까?

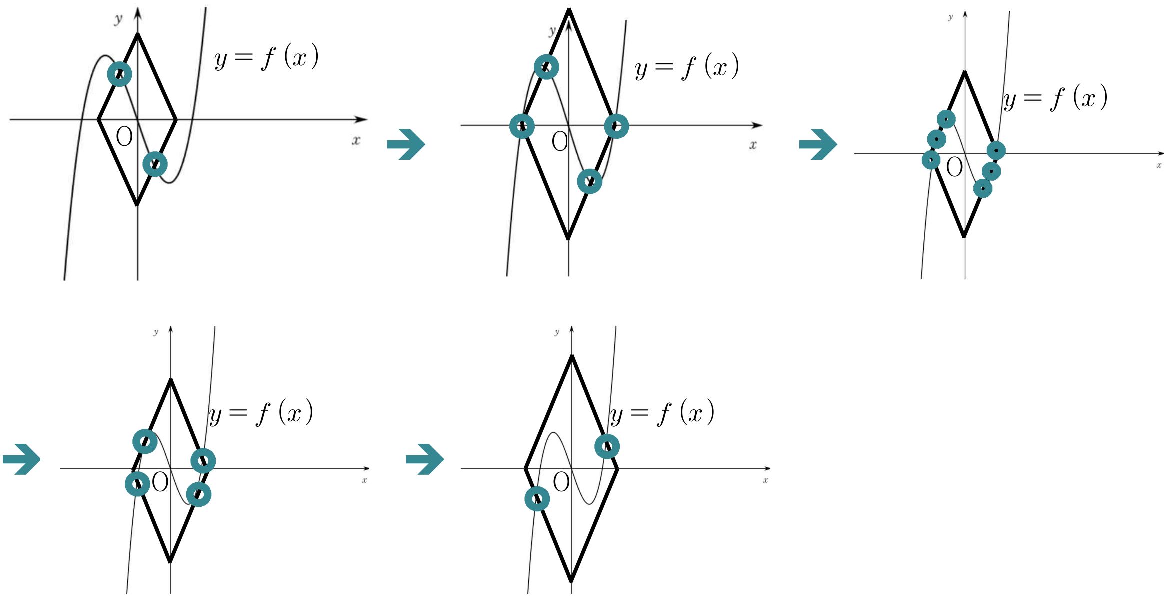


오! 만나는 점의 개수가 변하네!

일단 $g(t)$ 라는 함수를 파악해봤으니, 문제를 풀어보자.

STEP 2 어디서 불연속일까?

방금 찾은 그래프의 모양이 불연속인 지점이 존재했네. 그럼 조금 더 자세히 그려볼까?



t 의 값이 점점 커질수록 2개 → 4개 → 6개 → 4개 → 2개가 되네.

특히 2번째 그래프의 상황과 4번째 그래프의 상황에서 개수가 변하는 걸 알 수 있어.

그럼 $g(t)$ 가 이렇게 표현되겠지.

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (0<t<?) \\ 4 & (t=?) \\ 6 & (?<t<?) \\ & (t=?) \\ 2 & (t>?) \end{cases}$$

문제 조건이 $t=\alpha$, $t=8$ 에서 $g(t)$ 가 불연속이라고 했으니 2번째 그래프가 $t=\alpha$ 인 상황,

4번째 그래프가 $t=8$ 인 상황이겠지? 그럼 $g(t)$ 에서 구간을 특정할 수 있겠다!

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (0<t<\alpha) \\ 4 & (t=\alpha) \\ 6 & (\alpha<t<8) \\ 4 & (t=8) \\ 2 & (t>8) \end{cases}$$

이젠 남은 건 계산만 남았네! 다음 STEP으로 넘어가보자!

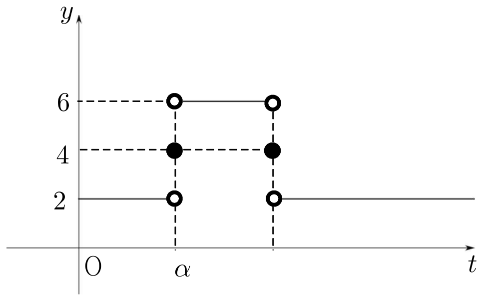
〈 개수 함수의 그래프 그리기 〉

이 문제에서는 그래프까지는 그릴 필요가 없어서 그리지는 않았지만

이해를 조금 더 쉽게 해보기 위해서 그래프를 그려볼게.

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (0<t<\alpha) \\ 4 & (t=\alpha) \\ 6 & (\alpha<t<8) \\ 4 & (t=8) \\ 2 & (t>8) \end{cases}$$

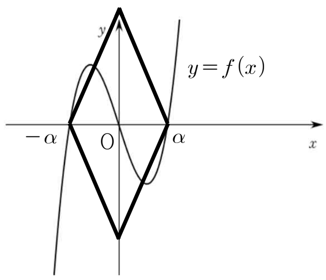
의 그래프는 어떻게 그릴 수 있을까?



그냥 불연속인 함수의 그래프라고 생각하고 편하게 그래면 돼.

만약 문제를 풀다가 그래프가 필요한 문제가 나온다면 당황하지 말고 평범한 함수라고 생각하고 그려봐!

STEP 3 이젠 계산만 하면 끝이다!



우리가 알고 있는 상황은

1. $t=\alpha$ 일 때 마름모의 꼭짓점이 삼차함수와 x축과의 교점과 만난다는 것,
2. 그리고 $t=8$ 일 때 마름모의 두 변이 삼차함수와 접한다는 것이야.

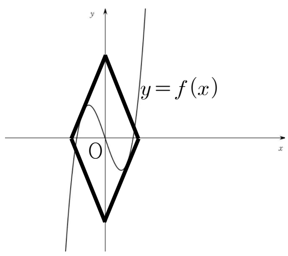
먼저 $t=\alpha$ 일때는 우리가 무엇을 알 수 있을까?

$t=\alpha$ 일 때 마름모의 꼭짓점은 $(\alpha,\ 0)$, $(-\alpha,\ 0)$, $(0,\ 2\alpha)$, $(0,\ -2\alpha)$

이니까 삼차함수가 $(\alpha,\ 0)$과 $(-\alpha,\ 0)$을 지나겠다.

이젠 삼차함수 식을 쓸 수 있겠네. 최고차항의 계수가 1이니까 $f(x)=x(x-\alpha)(x+\alpha)$야.

그리고 $t=8$ 일 때를 보자.



마름모의 변과 접하네. $t=8$ 일 때 마름모의 꼭짓점은 $(8,\ 0)$, $(-8,\ 0)$, $(0,\ 16)$, $(0,\ -16)$이고,

점 $(-8,\ 0)$와 점 $(0,\ 16)$를 지나는 직선은 $y=2x+16$ 이니까,

삼차함수 $f(x)$가 직선 $y=2x+16$와 접한다는 사실을 이용하자!

그 접점의 좌표를 $(p,\ f(p))$라고 가정하면

$f(p)=2p+16$, $f'(p)=2$ 두 개의 식을 쓸 수 있어.

인데 $f(x)=x^3-\alpha^2x$ 이니까,

$p^3-\alpha^2p=2p+16$, $3p^2-\alpha^2=2$ 야.

연립해서 식에서 p만 남기면 $p=-2$라고 나오네. 그럼 $\alpha=\sqrt{10}$ 이겠다.

$\alpha^2 \times f(4)$는 직접 계산하면 구할 수 있겠지? [정답] 240

만약 개수 함수가 불연속이라는 조건이 나온다면 함수의 변수를 조금씩 움직여보면서
개수가 어디서 변하는지 살펴보면 돼!
조건이 어떻게 나오든 결국 직접 함수를 그려보면서 개수 함수가 어떤 함수인지 파악해보는 것이 중요하다는 것을 기억하자!

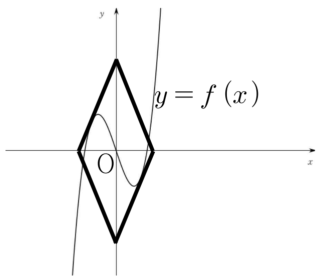
★ STYLE 03 부록 – 개수 함수의 극한 구하기!

방금 전 문제에서 함수 $g(t)$의 극한을 구해볼까?

$$g(t)=\begin{cases} 2 & (0<t<\sqrt{10}) \\ 4 & (t=\sqrt{10}) \\ 6 & (\sqrt{10}<t<8) \\ 4 & (t=8) \\ 2 & (t>8) \end{cases}$$

에서 $\lim_{t\to 8-} g(t)=6$, $\lim_{t\to 8+} g(t)=2$이란걸 쉽게 구할 수 있겠지?

하지만 이렇게 식을 구하지 않고 그림을 그리면서 판단을 할 수 있어.



이때가 $t=8$일때야. 이때가 4개의 점에서 만나니까 $g(8)=4$야.

하지만 여기서 t가 조금 더 커진다면 그러니까 마름모가 조금 더 커진다면 어떻게 될까?

그러면 2개의 점에서 만나.

그게 우극한의 값이니까 다음과 같이 표현되지. ⇨ $\lim_{t\to 8+} g(t)=2$

좌극한 같은 경우는 t가 여기서 조금 더 작아진다고 생각해보면 돼.

그러면 6개의 점에서 만나니까 이렇게 표현돼. ⇨ $\lim_{t\to 8-} g(t)=6$

SEOL:NAME, The Signature [테크닉 총정리]

CHECK 01 개수 함수의 핵심은 결국 직접 움직여보는 것!

$f(x)=t$ 의 서로 다른 실근의 개수이든,

$y=f(x)$ 와 $y=tx+a$ 가 만나는 점의 개수이든,

두 도형이 만나는 점의 개수이든

개수 함수 $g(t)$ 가 나온다면 ($h(t)$, $g(m)$... 이런 식으로도 나오겠지)

그 함수를 파악하기 위해 직접 t 를 움직여보면서 파악해야한다는 것을 잊지말자!

CHECK 02 미분가능하지 않은 점의 개수는 찔리면 아플 것 같은 점 찾기

'미분가능하지 않은 지점의 개수'는 두 가지로 나뉘어.

1. 연속이면서 미분가능하지 않은 점

2. 불연속인 지점

1번째 경우는 이어지지만 뾰족한 곳을,

2번째 경우는 이어지지 않고 끊어진 곳을 집중해서 보도록 하자.

물론 정확한 파악을 위해서는 그림만이 아닌 계산도 필요한 것을 잊지 말고!

CHECK 03 개수 함수의 불연속은 개수가 바뀌는 곳!

개수 함수가 어떤 함수인지 파악하기 위해 변수를 조금씩 움직여보기로 했다면

갑자기 개수가 변하는 곳이 불연속인 곳임을 잊지 말자!

$\lim_{t \to a-} f(t)$, $f(t)$, $\lim_{t \to a+} f(t)$ 세 개 중 하나만 다르더라도 $f(t)$ 는 $t=a$ 에서 불연속이야.

필요하다면 그래프도 같이 그려야해.

CHECK 04　개수 함수의 극한은 조금 더 크게, 조금 더 작게

일단 $f(t)$라는 개수 함수가 있다고 생각했을 때,

$\lim_{t \to a+} f(t)$, $\lim_{t \to a-} f(t)$는

먼저 $t=a$에서의 상황을 생각해본 뒤,

　우극한은 a보다 조금 더 크게

　좌극한은 a보다 조금 더 작게

해서 개수를 세어보면 돼. (아니면 함수를 케이스별로 직접 구해서 판단해도 되고)

CHECK 05　함수에 익숙해지자!

이번 주간지의 주제는 개수 함수였지만,

사실 자세히 살펴보면 오늘 본 문제들은

삼차함수의 실근의 개수, 삼차함수의 그래프 개형 등에 대해서 물어보는 문제였어.

삼차함수뿐만 아니라 사차함수, 로그함수, 지수함수 등 다양한 함수들에 대해서도 문제에서 물어볼 수 있으니

고등학교에서 배우는 함수들에 대해서는 익숙해지도록 하자!

PRACTICE
기출문제 ATTACK

001 [2014학년도 4월 학력평가 A형 29번]

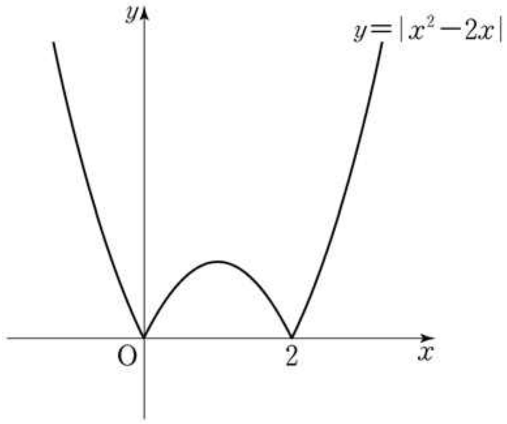
함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $-1 \le x < 1$에서 $f(x) = |2x|$이다.
> (나) 모든 실수 x에 대하여 $f(x+2) = f(x)$이다.

자연수 n에 대하여 함수 $y = f(x)$의 그래프와 함수 $y = \log_{2n} x$의 그래프가 만나는 점의 개수를 a_n이라 하자. $\sum_{n=1}^{7} a_n$의 값을 구하시오. [4점]

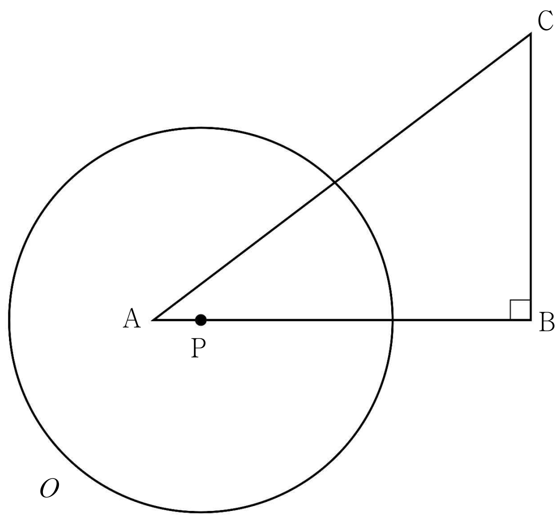
002 [2016학년도 6월 모의평가 A형 29번]

실수 t에 대하여 직선 $y=t$가 곡선 $y=\left|x^2-2x\right|$와 만나는 점의 개수를 $f(t)$라 하자. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $g(t)$에 대하여 함수 $f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속일 때, $f(3)+g(3)$의 값을 구하시오. [4점]



003 [2017학년도 4월 학력평가 나형 29번]

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=4$, $\overline{\mathrm{BC}}=3$, $\angle \mathrm{B}=90^{\circ}$인 삼각형 ABC의 변 AB 위를 움직이는 점 P를 중심으로 하고 반지름의 길이가 2인 원 O가 있다. $\overline{\mathrm{AP}}=x(0<x<4)$라 할 때, 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수를 $f(x)$라 하자. 함수 $f(x)$가 $x=a$에서 불연속이 되는 모든 실수 a의 값의 합은 $\dfrac{q}{p}$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



004 [2017학년도 7월 학력평가 나형 21번]

실수 t에 대하여 x에 대한 사차방정식

$$(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0$$

의 서로 다른 실근의 개수를 $f(t)$라 하자. 다항함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $\lim_{x\to\infty}\frac{g(x)}{x^4}=0$

(나) $g(-3)=6$

함수 $f(t)g(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $g(1)$의 값을 구하시오. [4점]

| HINT |

STEP 1 t에 따라서 사차방정식의 서로 다른 실근의 개수는 어떻게 변할까?
이미 인수분해가 되어있다는 점을 활용하여 실근의 개수를 구해보자!

STEP 2 (가) 조건을 보자. $g(x)$가 다항함수니까 어떤 함수인지 대충 정할 수 있다. $g(x)$는 몇차함수일까?

STEP 3 $f(t)$는 불연속이다. 그럼 $f(t)g(t)$를 실수 전체의 집합에서 연속으로 만들려면 $g(t)$는 어떻게 되어야할까?
(나) 조건을 같이 활용하여 $g(t)$의 식을 적어보자!

005 [2019학년도 7월 학력평가 나형 21번]

좌표평면 위의 점 $(0,\ t)$를 지나고 곡선

$$y = x^3 - ax^2 + 3x - 5 \quad (a\text{는 자연수})$$

에 접하는 서로 다른 모든 직선의 개수를 $f(t)$라 할 때, 함수 $f(t)$에 대하여 합성함수 $g(t) = (f \circ f)(t)$라 하자. 다음 조건을 만족시키는 a의 최솟값을 m이라 할 때, $m + g(m)$의 값은? [4점]

(가) 모든 실수 t에 대하여 $g(t) > 1$이다.
(나) 함수 $g(t)$의 치역의 원소의 개수는 1이다.

| HINT |

STEP 1 $(0,\ t)$에서 삼차함수에 그은 접선이 있다고 생각해보자!
그 접점을 $(p,\ f(p))$라고 했을 때, 접선의 방정식을 p에 대해서 나타낼 수 있지 않을까?
그럼 그 접선의 방정식에 $(0,\ t)$를 대입했을 때, p의 서로 다른 실근의 개수가 접선의 개수 아닐까?
(사실 하나의 접선이 동시에 두 접점에 접하는 경우도 고려해야하지만 삼차함수에서는 그런 경우가 발생하지 않으니까 고려할 필요가 없어)
$f(t)$는 위에서 구한 p에 대한 방정식의 서로 다른 실근의 개수네!

STEP 2 (가) 조건을 보자. $f(f(t))$가 1보다 커야하네. $f(t)$는 위에서 구한 삼차방정식의 서로 다른 실근의 개수니까 1, 2, 3만 가능해.
그러면 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$은 1보다 크다는 것을 알 수 있겠네.

STEP 3 (나) 조건을 보자. $f(f(t))$가 하나의 값만 가능하네.
그럼 $f(1) = f(2) = f(3)$이겠다. 지금까지 해석한 조건들을 만족시키는 a의 최솟값을 찾자!

006 [2020학년도 10월 학력평가 나형 30번]

함수 $f(x)=\begin{cases} -3x^2 & (x<1) \\ 2(x-3) & (x \geq 1) \end{cases}$ 에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$$

라 할 때, 실수 t에 대하여 직선 $y=t$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 점의 개수를 $h(t)$라 하자.

$\left|\lim_{t\to a+} h(t)-\lim_{t\to a-} h(t)\right|=2$를 만족시키는 모든 실수 a에 대하여

$|a|$ 의 값의 합을 S라 할 때, $30S$의 값을 구하시오. [4점]

| HINT |

STEP 1 그래프를 그리자! 정적분으로 정의된 함수임을 생각하면 그래프를 쉽게 그릴 수 있을거야.

STEP 2 t를 조금씩 움직여보면서 $h(t)$를 파악해보자!

STEP 3 다음 조건을 만족시키는 a를 찾자! $t=a$인 상황에서

$t=a+$ (우극한) 값은 $t=a$보다 t가 조금 큰 상황

$t=a-$ (좌극한) 값은 $t=a$보다 t가 조금 작은 상황이야.

여기서는 $y=t$ 그래프가 조금 더 위에 있는 상황과 조금 더 아래에 있는 상황이겠네.

007 [2022학년도 수능 22번]

최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 방정식 $f'(x)=0$이 닫힌구간 $[t,\ t+2]$에서 갖는 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 모든 실수 a에 대하여 $\lim_{t\to a+} g(t) + \lim_{t\to a-} g(t) \le 2$이다.

(나) $g(f(1)) = g(f(4)) = 2,\ \ g(f(0)) = 1$

$f(5)$의 값을 구하시오. [4점]

| HINT |

STEP 1 삼차함수는 어떻게 생겼을까? (나) 조건을 보니 g의 함수 값이 2네.
$f'(x)=0$이되는 x가 2개 존재하는 삼차함수의 개형은 극대와 극소가 존재하는 그래프 밖에 없어.

STEP 2 (가) 조건과 (나)조건에 g의 함수 값이 2라는 점을 잘 해석해보자.
그러면 극대인 지점의 x값과 극소인 지점의 x 값의 차이를 알 수 있을거야.

STEP 3 이제 (나) 조건을 잘 해석해보자. 위 조건에 맞는 삼차함수는 $g(x)=2$인 x값은 하나만 존재해야해.
그럼 $f(1)=f(4)$이네. 다른 조건들도 활용하여 $f(x)$를 구해보자!

008 [2023학년도 9월 모의평가 22번]

최고차항의 계수가 1이고 $x=3$에서 극댓값 8을 갖는 삼차함수 $f(x)$가 있다. 실수 t에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \geq t) \\ -f(x)+2f(t) & (x < t) \end{cases}$$

라 할 때, 방정식 $g(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수를 $h(t)$라 하자. 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

| HINT |

STEP 1 $g(x)$는 어떤 함수일까? 선대칭과 관련해서 잘 생각해보자.

STEP 2 함수 $h(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 두 개라는 점을 활용해보자. 그러면 $f(x)$를 구할 수 있을거야.

009 [2023학년도 수능 21번]

자연수 n에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} |3^{x+2}-n| & (x<0) \\ |\log_2(x+4)-n| & (x\geq 0) \end{cases}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$의 최댓값이 4가 되도록 하는 모든 자연수 n의 값의 합을 구하시오. [4점]

| HINT |

STEP 1 $f(x)$의 그래프를 그려보자. 절댓값이 들어간 함수를 그리는 방법은 이미 소개했으니까 쉽게 그릴 수 있을 거야.

STEP 2 $g(t)$의 최댓값이 4가 되기 위해서는 어떻게 되어야할까? 그 점을 잘 고려해서 n의 값을 구해보자. $x<0$일 때와 $x\geq 0$일 때로 나눠서 생각하는게 편할 수도 있어.

010 [사관학교 2019학년도 나형 21번]

실수 k에 대하여 함수 $f(x)$가

$$f(x)=x|x-k|$$

이다. 함수 $g(x)=x^2-3x-4$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점의 개수를 $h(k)$라 할 때, 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈보 기〉

ㄱ. $h(2)=2$

ㄴ. $h(k)=4$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 6이다.

ㄷ. $h(k)=3$을 만족시키는 모든 실수 k의 값의 합은 2이다.

011 [사관학교 2021학년도 나형 30번]

양수 a에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x(x+a)^2 & (x<0) \\ x(x-a)^2 & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=4x+t$의 서로 다른 교점의 개수를 $g(t)$라 할 때, 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $g(t)$의 최댓값은 5이다.
(나) 함수 $g(t)$가 $t=\alpha$에서 불연속인 α의 개수는 2이다.

$f'(0)$의 값을 구하시오. [4점]

012 [2018학년도 6월 모의평가 가형 16번] 미적분

실수 k에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} x^2+k & (x \le 2) \\ \ln(x-2) & (x>2) \end{cases}$$

이다. 실수 t에 대하여 직선 $y=x+t$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수를 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 $t=a$에서 불연속인 a의 값이 한 개일 때, k의 값은? [4점]

013 [2019학년도 6월 모의평가 가형 21번] **미적분**

열린 구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{3\pi}{2}\right)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2\sin^3 x & \left(-\frac{\pi}{2}<x<\frac{\pi}{4}\right) \\ \cos x & \left(\frac{\pi}{4}\le x<\frac{3\pi}{2}\right) \end{cases}$$

가 있다. 실수 t에 대하여 다음 조건을 만족시키는 모든 실수 k의 개수를 $g(t)$라 하자.

(가) $-\frac{\pi}{2}<k<\frac{3\pi}{2}$
(나) 함수 $\sqrt{|f(x)-t|}$는 $x=k$에서 미분가능하지 않다.

함수 $g(t)$에 대하여 합성함수 $(h\circ g)(t)$가 실수 전체의 집합에서 연속이 되도록 하는 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $h(x)$가 있다. $g\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=a,\ g(0)=b,\ g(-1)=c$라 할 때, $h(a+5)-h(b+3)+c$의 값은? [4점]

014 [2019학년도 5월 학력평가 가형 30번] 미적분

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)$를

$$g(x)=f(x)e^{x}$$

이라 하자. 실수 t에 대하여 함수 $y=|g(x)-g(t)|$가 미분가능하지 않은 실수 x의 개수를 $h(t)$라 할 때, 함수 $h(t)$는 $t=\alpha$에서만 불연속이다. $g(\alpha)=2$일 때, $f(\alpha)$의 값을 구하시오.
(단, $\lim_{x\to-\infty} g(x)=0$이고, α는 상수이다.) [4점]

015 [2019학년도 10월 학력평가 가형 21번] **미적분**

정수 n에 대하여 점 $(a,\ 0)$에서 곡선 $y=(x-n)e^{x}$에 그은 접선의 개수를 $f(n)$이라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

〈 보 기 〉

ㄱ. $a=0$일 때, $f(4)=1$이다.
ㄴ. $f(n)=1$인 정수 n의 개수가 1인 정수 a가 존재한다.
ㄷ. $\sum_{n=1}^{5} f(n)=5$를 만족시키는 정수 a의 값은 -1 또는 3이다.

기출문제 ATTACK 정답 및 해설

빠른 정답

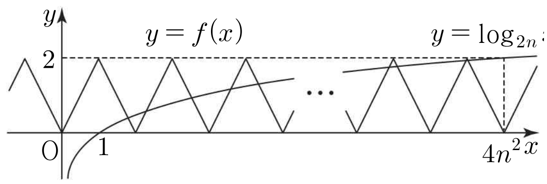
1	553	2	8	3	19	4	30	5	10
6	80	7	9	8	58	9	33	10	ㄱ, ㄷ
11	36	12	$-\dfrac{11}{4}$	13	99	14	2	15	ㄱ, ㄷ

해 설

001

[정답] 553

그림과 같이 곡선 $y=\log_{2n}x$는 점 $(4n^2,\ 2)$를 지난다.



그러므로 자연수 k에 대하여 닫힌 구간 $[k,\ k+1]$에서 곡선 $y=\log_{2n}x$와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점의 개수는 1이다. (단, $1 \le k \le 4n^2-1$)

$\therefore\ a_n = 4n^2-1$

따라서 $\displaystyle\sum_{n=1}^{7} a_n = \sum_{n=1}^{7}(4n^2-1)$

$$= 4\times\frac{7\times 8\times 15}{6} - 7 = 553$$

002

[정답] 8

$f(t) = \begin{cases} 0\ (t<0) \\ 2\ (t=0) \\ 4\ (0<t<1) \\ 3\ (t=1) \\ 2\ (t>1) \end{cases}$ 이므로

$f(t)g(t)$가 모든 실수 t에서 연속이기 위해서는

$g(0)=g(1)=0$ 을 만족해야만 한다.

$\therefore g(t)=t(t-1)$

$\therefore f(3)+g(3)=2+6=8$

003

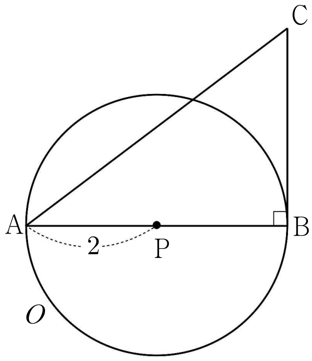
[정답] 19

[그림1]과 같이 $x=2$일 때,
원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 3이다.

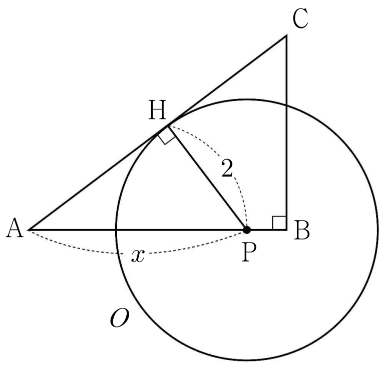
$\therefore\ f(2)=3$

$0<x<2$에서 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

$\therefore\ f(x)=2(0<x<2)$



[그림 1]



[그림 2]

[그림2]와 같이 원 O가 선분 AC에 접할 때,
접하는 점을 H라 하면 삼각형 AHP와 삼각형 ABC는 닮음이므로

$\overline{\mathrm{AC}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{HP}}$

$5:3=x:2 \ \rightarrow\ x=\frac{10}{3}$

$x=\frac{10}{3}$일 때, $f\left(\frac{10}{3}\right)=3$

$2<x<\frac{10}{3}$에서 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 4이다.

$\therefore\ f(x)=4(2<x<\frac{10}{3})$

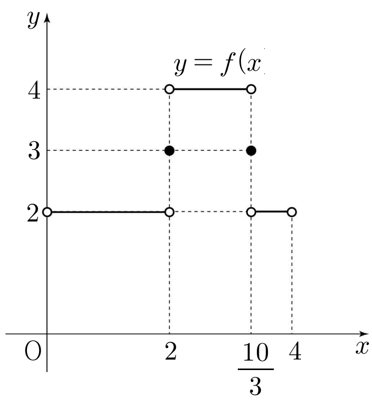
$\frac{10}{3}<x<4$에서 원 O가 삼각형 ABC와 만나는 서로 다른 점의 개수는 2이다.

$\therefore\ f(x)=2(\frac{10}{3}<x<4)$

따라서

$$f(x)=\begin{cases} 2 & (0<x<2) \\ 3 & (x=2) \\ 4 & (2<x<\frac{10}{3}) \\ 3 & (x=\frac{10}{3}) \\ 2 & (\frac{10}{3}<x<4) \end{cases}$$

함수 $y=f(x)$를 그래프로 나타내면 다음과 같다.



함수 $f(x)$가 $x=2$, $x=\frac{10}{3}$에서 불연속이므로

모든 실수 a의 값의 합은 $2+\frac{10}{3}=\frac{16}{3}$이다.

$\therefore\ p=3,\ q=16$

따라서 $p+q=19$

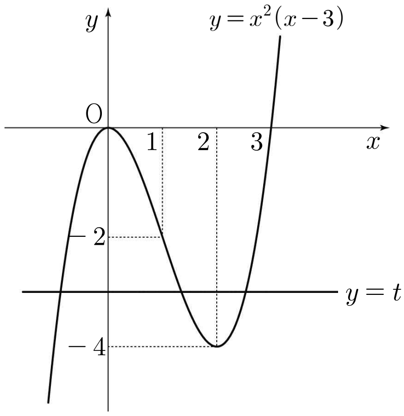
004

[정답] 30

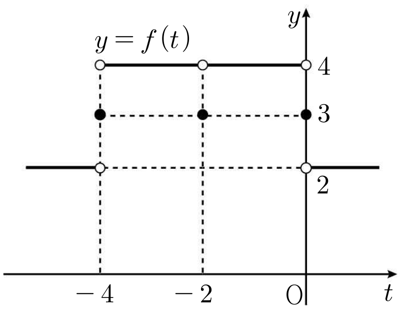
$(x-1)\{x^2(x-3)-t\}=0 \rightarrow x=1$ 또는 $x^2(x-3)-t=0$

$x^2(x-3)-t=0$ 의 서로 다른 실근의 개수는

$y=x^2(x-3)$ 의 그래프와 직선 $y=t$ 의 교점의 개수와 같다.



따라서 $y=f(t)$ 의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(t)$ 가 $t=-4$, -2, 0 에서 불연속이다.

함수 $f(t)g(t)$ 가 실수 전체의 집합에서 연속이기 위해서는 $t=-4$, -2, 0 에서 연속이어야 한다.

$t=-4$일 때,

$\lim_{t\to -4-} f(t)g(t)=2g(-4)$, $\lim_{t\to -4+} f(t)g(t)=4g(-4)$,

$f(-4)g(-4)=3g(-4)$ 이고

함수 $f(t)g(t)$ 가 $t=-4$ 에서 연속이므로 $2g(-4)=4g(-4)=3g(-4)$

따라서 $g(-4)=0$

같은 방법으로 $g(-2)=g(0)=0$

(가)에서 $g(x)$ 가 삼차 이하의 다항함수이므로 $g(x)=ax(x+2)(x+4)$ $(a \neq 0)$ 이라 하면

(나)에서 $g(-3)=6$ 이므로 $a=2 \Rightarrow g(x)=2x(x+2)(x+4)$

따라서 $g(1)=30$

005

[정답] 10

점 $(0,\ t)$를 지나는 직선이 곡선 $y=x^3-ax^2+3x-5$와 접할 때의 접점을 $(k,\ k^3-ak^2+3k-5)$라 하자.

$y'=3x^2-2ax+3$이므로 접선의 방정식은

$y=(3k^2-2ak+3)(x-k)+k^3-ak^2+3k-5$

이고, 이 접선이 점 $(0,\ t)$를 지나므로

$t=-2k^3+ak^2-5$

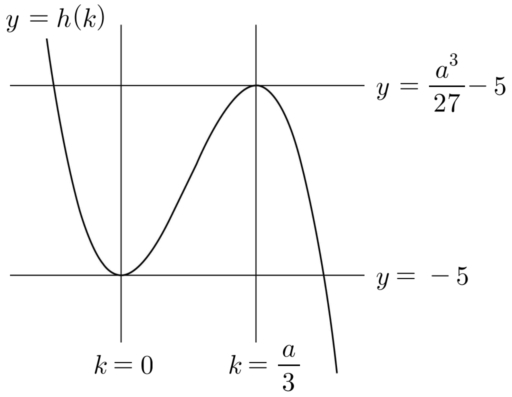
$f(t)$는 곡선 $y=-2k^3+ak^2-5$와 직선 $y=t$의 교점의 개수이다.

$h(k)=-2k^3+ak^2-5$라 하면,

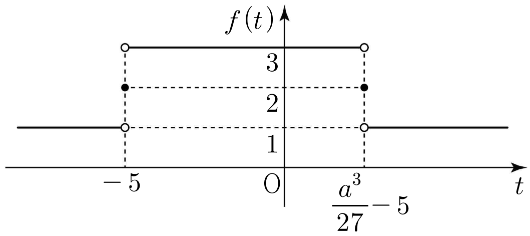
$h'(k)=-6k^2+2ak=-2k(3k-a)$

$h'(0)=h'\left(\frac{a}{3}\right)=0$

$h(0)=-5,\ h\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{a^3}{27}-5$



$$f(t)=\begin{cases} 1 & (t<-5) \\ 2 & (t=-5) \\ 3 & \left(-5<t<\frac{a^3}{27}-5\right) \\ 2 & \left(t=\frac{a^3}{27}-5\right) \\ 1 & \left(t>\frac{a^3}{27}-5\right) \end{cases}$$



$$g(t)=f(f(t))=\begin{cases} f(1) & (t<-5) \\ f(2) & (t=-5) \\ f(3) & \left(-5<t<\frac{a^3}{27}-5\right) \\ f(2) & \left(t=\frac{a^3}{27}-5\right) \\ f(1) & \left(t>\frac{a^3}{27}-5\right) \end{cases}$$

함수 $g(t)$에서

(ⅰ) $\frac{a^3}{27}-5<3$인 경우 : $-5<t<\frac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(3)=1$이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $\frac{a^3}{27}-5=3$인 경우 : $t<-5,\ t>\frac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(1)=3$

$t=-5,\ \frac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(2)=3$

$-5<t<\frac{a^3}{27}-5$일 때, $g(t)=f(3)=2$

함수 $g(t)$의 치역의 원소의 개수가 2이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(ⅲ) $\frac{a^3}{27}-5>3$인 경우 : 실수 전체의 집합에서 $f(t)\le 3<\frac{a^3}{27}-5$이므로 $g(t)=3$이다.

이는 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 주어진 조건을 만족시키는 a 의 범위는 $a^3 > 8\times 27 = 6^3$
자연수 a 의 최솟값 $m=7$, $g(m)=f(f(7))=3$ → 따라서 $m+g(m)=7+3=10$

006

[정답] 80

$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$ 의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$g'(x)=(x-1)f(x)=\begin{cases} -3x^3+3x^2 & (x<1) \\ 2x^2-8x+6 & (x\ge 1)\end{cases}$$

위의 식의 양변을 x 에 대하여 적분하면

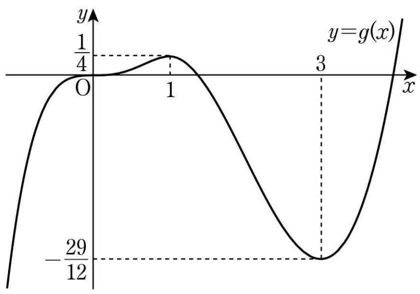
$$g(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}x^4+x^3+C_1 & (x<1) \\ \frac{2}{3}x^3-4x^2+6x+C_2 & (x\ge 1)\end{cases} \quad (C_1,\ C_2 \text{는 적분상수})$$

$g'(1)=0$ 이므로 함수 $g(x)$ 는 $x=1$ 에서 연속이다.

$g(0)=0$ 에서 $C_1=0$ 이고 $-\frac{3}{4}+1=\frac{2}{3}-4+6+C_2$ 에서 $C_2=-\frac{29}{12}$

$$g(x)=\begin{cases} -\frac{3}{4}x^4+x^3 & (x<1) \\ \frac{2}{3}x^3-4x^2+6x-\frac{29}{12} & (x\ge 1)\end{cases}$$

함수 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



위의 그래프를 이용하여 함수 $h(t)$ 를 구하면

$$h(t)=\begin{cases} 1 & \left(t<-\frac{29}{12} \text{ 또는 } t>\frac{1}{4}\right) \\ 2 & \left(t=-\frac{29}{12} \text{ 또는 } t=\frac{1}{4}\right) \\ 3 & \left(-\frac{29}{12}<t<\frac{1}{4}\right)\end{cases}$$

이므로 $\left|\lim_{t\to a+}h(t)-\lim_{t\to a-}h(t)\right|=2$ 를 만족시키는 실수 a 의 값은 $\frac{1}{4}$ 과 $-\frac{29}{12}$ 뿐이다.

그러므로 $S=\left|\frac{1}{4}\right|+\left|-\frac{29}{12}\right|=\frac{8}{3}$

따라서 $30S=30\times\frac{8}{3}=80$

[참고]

$g(x)=\int_0^x (t-1)f(t)\,dt$ 는 다음과 같이 구할 수도 있다.

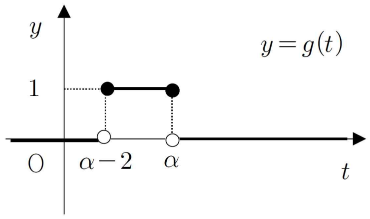
(ⅰ) $x<1$ 일 때 : $g(x)=\int_0^x (t-1)(-3t^2)dt=-\frac{3}{4}x^4+x^3$

(ii) $x \geq 1$일 때 : $g(x) = \int_0^1 (t-1)(-3t^2)dt + \int_1^x 2(t-1)(t-3)dt = \frac{2}{3}x^3 - 4x^2 + 6x - \frac{29}{12}$

007

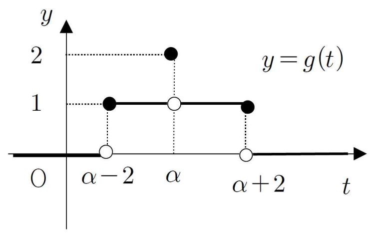
[정답] 9

이차방정식 $f'(x)=0$이 근을 갖지 않는 경우에는 $g(t)=0$
이는 조건 (나)에서 $g(t)$가 함숫값 1 또는 2를 갖는 것에 모순이다.
이차방정식 $f'(x)=0$이 중근 α를 갖는 경우에는 $y=g(t)$는 그림과 같다.



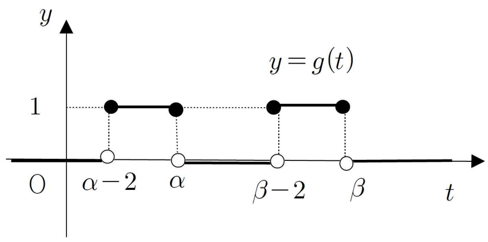
이는 조건 (나)에서 $g(t)$가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.
그러므로 이차방정식 $f'(x)=0$는 서로 다른 두 실근 α, $\beta(\alpha<\beta)$를 갖는다.

(i) $\beta=\alpha+2$일 때,
함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



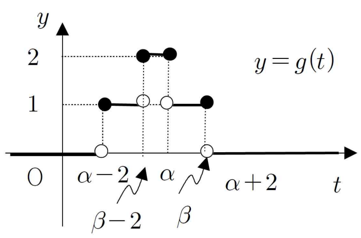
이는 조건 (가)를 만족한다.

(ii) $\beta>\alpha+2$일 때,
함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이는 조건 (나)에서 $g(t)$가 함숫값 2를 갖는 것에 모순이다.

(iii) $\beta<\alpha+2$일 때,
함수 $y=g(t)$의 그래프는 다음과 같다.



이때, $\beta-2 \le a \le \alpha$인 a에 대하여 조건 (가)를 만족시키지 못한다.
따라서 위에서 조건을 만족시키는 것은 (ⅰ)의 경우이다.

한편, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 $\frac{1}{2}$이므로 함수 $f'(x)$의 최고차항의 계수는 $\frac{3}{2}$이다.

그러므로

$$f'(x)=\frac{3}{2}(x-\alpha)\{x-(\alpha+2)\}$$
$$=\frac{3}{2}\{x^2-(2\alpha+2)x+\alpha^2+2\alpha\}$$

로 놓을 수 있다. 이때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{3}{2}(\alpha+1)x^2+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)x+C \qquad \text{(단, } C\text{는 적분상수)} \cdots\cdots ㉠$$

한편, 조건 (나)에서 $g(f(1))=g(f(4))=2$
이고 $g(t)$의 함숫값이 2인 t의 값의 개수는 1이므로 $f(1)=f(4)$
㉠에서

$$\frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)+C=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)+C$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}-\frac{3}{2}(\alpha+1)+\frac{3}{2}(\alpha^2+2\alpha)=32-24(\alpha+1)+6(\alpha^2+2\alpha)$$

양변에 2를 곱하면

$\Rightarrow 1-3(\alpha+1)+3(\alpha^2+2\alpha)=64-48(\alpha+1)+12(\alpha^2+2\alpha)$
$\Rightarrow 3\alpha^2+3\alpha-2=12\alpha^2-24\alpha+16$
$\Rightarrow 9\alpha^2-27\alpha+18=0$
$\Rightarrow 9(\alpha-1)(\alpha-2)=0$
$\Rightarrow \alpha=1$ 또는 $\alpha=2$

((ⅰ)-①) $\alpha=1$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x+C$$

이때, $f(1)=\alpha$에서 $f(1)=1$이어야 하므로

$$\frac{1}{2}-3+\frac{9}{2}+C=1 \quad \Rightarrow \quad C=-1$$

이때, $f(0)=-1$이므로 $g(f(0))=g(-1)=1$
그러므로 조건을 만족시킨다.

((ⅰ)-②) $\alpha=2$일 때,

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-\frac{9}{2}x^2+12x+C$$

이때, $f(1)=\alpha$에서 $f(1)=2$이어야 하므로

$$\frac{1}{2}-\frac{9}{2}+12+C=2 \quad \rightarrow \quad C=-6$$

이때, $f(0)=-6$이므로 $g(f(0))=g(-6)=0$
그러므로 조건을 만족시키지 못한다. 따라서 ((ⅰ)-①)에서

$$f(x)=\frac{1}{2}x^3-3x^2+\frac{9}{2}x-1$$

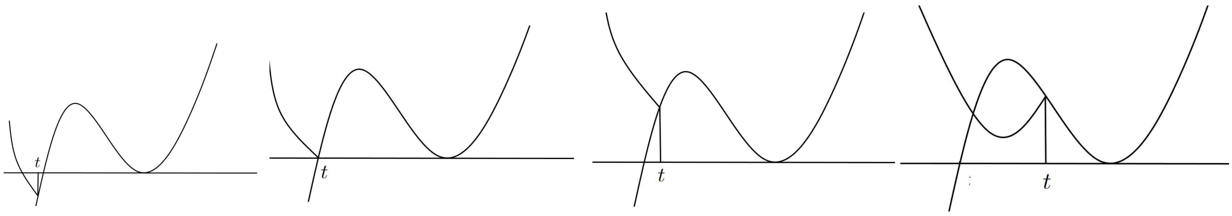
이므로

$$f(5)=\frac{1}{2}\times 5^3-3\times 25+\frac{9}{2}\times 5-1$$
$$=9$$

008

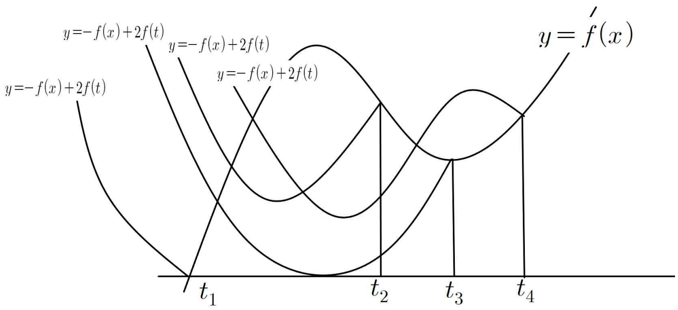
[정답] 58

$g(t)=-f(t)+2f(t)=f(t)$이고 $y=f(t)$에서 그래프를 꺾어 올린다.



위의 그림처럼 극솟값이 0일 때 $f(t)=0$이 될 때 한번 불연속

$f(t)=4$가 돼서 $-f(x)+2f(t)=0$이 될 때, 한번 t가 극솟점이 될 때 또, 한번 이미 3번 불연속이 나타나므로 가능하지 않다.



극솟값이 양수일 때, 위의 그림처럼 $y=g(x)$가 그려질 때, t가 극소가 될 때, x축에 접한다면 불연속점이 2번 나타난다.

t_1 왼쪽에서 $g(x)=0$의 실근이 1개에서 t_1을 지나면서 0개로 바뀌고

t_3에서 다시 1개 t_3를 지나서 다시 0개로 두 번 불연속

그러므로 $f(t_3)=4$가 되어야 위의 그림처럼 x축과의 교점이 발생한다.

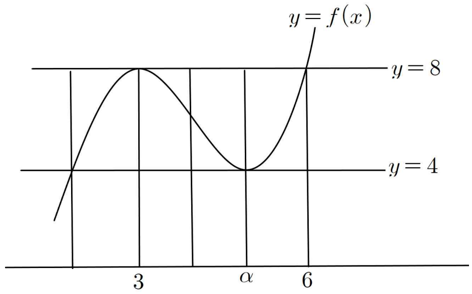
$f(t_3)>4$이면 t_1에서만 1번 불연속이 되고,

$f(t_3)<4$이면 접하는 순간을 지나 실근이 2개가 되고,

$f(t)$의 값이 증가하면서 다시 접하는 순간, 다시 말해 실근이 1개가 되는 순간이 발생하므로 불연속점이 3개가 된다.

극솟점의 x좌표를 α라 할 때, 극대, 극솟값의 차가 4이므로

$\frac{1}{2}(\alpha-3)^3=4,\ \alpha=5$



위의 그림처럼 삼차함수의 대칭성을 이용하면,

$y=8$과 만나는 점의 x좌표는 6임을 알 수 있다. 그러므로

$f(x)-8=(x-3)^2(x-6)$

$f(8)=(8-3)^2(8-6)+8=25\times2+8=58$

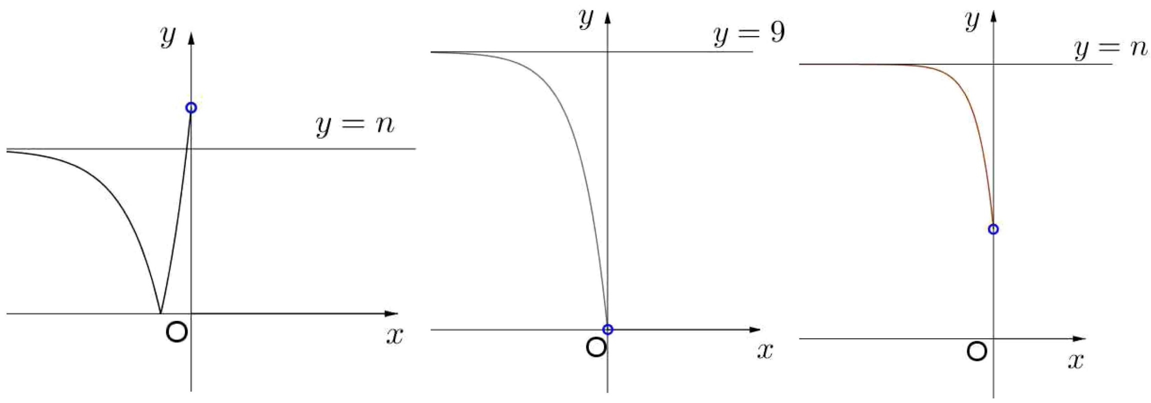
009

[정답] 33

함수 $y=3^{x+2}-n$의 그래프는 함수 $y=3^x$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동한 그래프이다.

함수 $y=\left|3^{x+2}-n\right|$의 그래프는 점 $(0,\ |9-n|)$을 지나고 점근선의 방정식은 $y=n$이다.

$x<0$일 때, 자연수 n의 값에 따른 함수 $y=\left|3^{x+2}-n\right|$의 그래프는 다음과 같다.

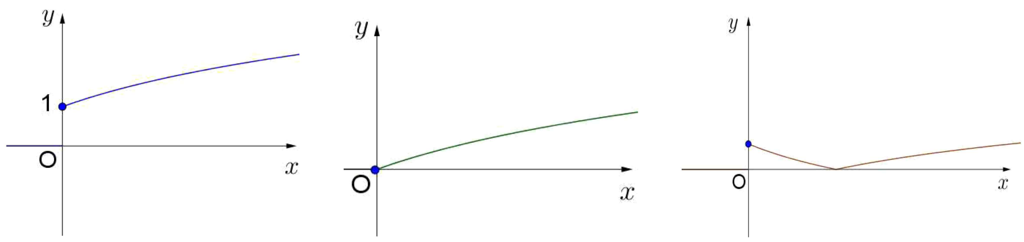


$[1\le n<9$일 때$]$　　$[n=9$일 때$]$　　$[n>9$일 때$]$

또, 함수 $y=\log_2(x+4)-n$의 그래프는 함수 $y=\log_2 x$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 $-n$만큼 평행이동한 그래프이다.

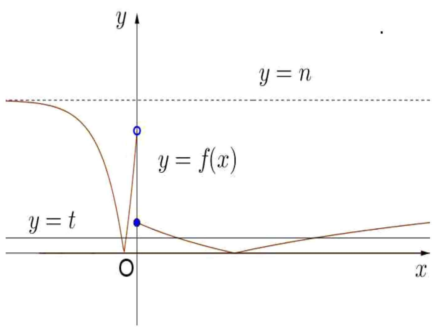
함수 $y=\left|\log_2(x+4)-n\right|$의 그래프는 점 $(0,\ |2-n|)$을 지나고 점근선의 방정식은 $x=-4$이다.

$x\ge0$일 때, 자연수 n의 값에 따른 함수 $y=\left|\log_2(x+4)-n\right|$의 그래프는 다음과 같다.



$[n=1$일 때$]$　　$[n=2$일 때$]$　　$[n>2$일 때$]$

x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 서로 다른 실근의 개수 $g(t)$는 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$가 만나는 점의 개수와 같다.



함수 $g(t)$의 최댓값이 4이므로 $9-n>0$이고 $2-n<0$이어야 한다.

즉, $2<n<9$이다.

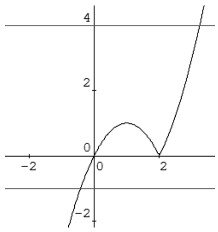
따라서 자연수 n의 값은 $3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8$이고, 그 합은 $3+4+5+6+7+8=33$이다.

010

[정답] ㄱ, ㄷ

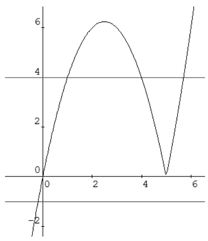
$(g\circ f)(x)=(f(x))^2-3(f(x))-4=(f(x)+1)(f(x)-4)=0$
이므로 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프가 x축과 만나는 점은
즉, 방정식 $(g\circ f)(x)=0$의 실근은 $f(x)=-1$ 또는 $f(x)=4$이다.

ㄱ. $k=2$일 때 $f(x)=x|x-2|$의 그래프는 그림과 같다.



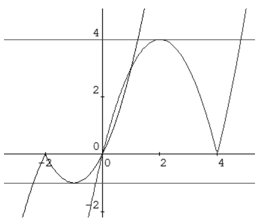
따라서 $h(2)=2$이다.

ㄴ. $k=5$일 때 $f(x)=x|x-5|$의 그래프는 그림과 같다.



따라서 $h(k)=4$를 만족시키는 자연수 k의 최솟값은 5이다.

ㄷ. $k=-2,\ k=4$ 일 때, $f(x)=x|x-k|$의 그래프는 그림과 같다.

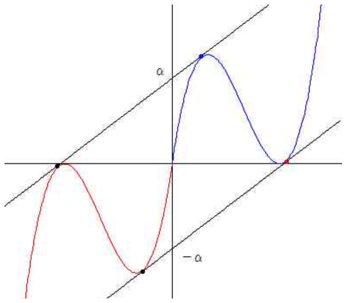


따라서 $h(k)=3$을 만족시키는 k의 값의 합은 $(-2)+4=2$ 이다.

011

[정답] 36

$y=f(x)$의 그래프가 그림과 같아야 한다.



$x>0$일 때,

$f'(x)=3x^2-4ax+a^2=4$인 점을 $x=b,\ c\ (b<c)$라 하면

$b+c=\dfrac{4a}{3},\ bc=\dfrac{a^2-4}{3}$

$\dfrac{c(c-a)^2+b(-b+a)^2}{c+b}=4$

이것을 풀면

$c^2+b^2=(c+b)^2-2bc=\dfrac{10}{9}a^2+\dfrac{8}{3}$

$c^3+b^3=(c+b)^3-3bc(b+c)=\dfrac{28}{27}a^3+\dfrac{16}{3}a$

$c^3+b^3-2a(c^2+b^2)+a^2(c+b)=4(c+b)$

즉, $\left(\dfrac{28}{27}a^3+\dfrac{16}{3}a\right)-2a\left(\dfrac{10}{9}a^2+\dfrac{8}{3}\right)+\dfrac{4}{3}a^3=\dfrac{16}{3}a$

$\therefore\ f'(0)=a^2=36$

012

[정답] $-\dfrac{11}{4}$

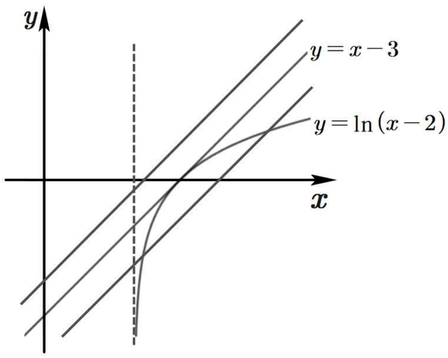
$x>2$ 일 때

$f(x)=\ln(x-2)$와 $y=x+t$ 의 교점의 개수는 두 함수가 접할 때를 기준으로 달라진다.

$f'(x)=\dfrac{1}{x-2}$에서 $f'(3)=1$이고 $f(3)=0$이므로

$f(x)=\ln(x-2)$는 $(3,\ 0)$에서 $y=x-3$에 접한다.

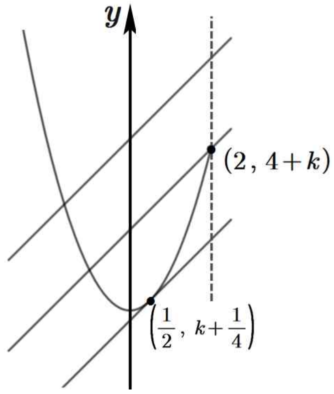
그래프를 이용하여 t의 범위에 따른 $f(x)=\ln(x-2)$와 $y=x+t$와의 교점의 개수는



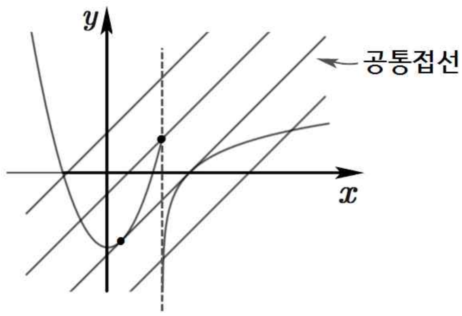
$t<-3$ 일 때 교점의 개수는 2개

$t=-3$ 일 때 교점의 개수는 1개

$t > -3$ 일 때 교점의 개수는 0개
임을 알 수 있다.
한편 $x \le 2$일 때
$f(x) = x^2 + k$와 $y = x + t$의 교점의 개수는 두 함수가 접할 때를 기준으로 달라진다.
$f'(x) = 2x$에서 $f'\left(\frac{1}{2}\right) = 1$이고 $f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + k$이므로
$f(x) = x^2 + k$는 $\left(\frac{1}{2},\ k + \frac{1}{4}\right)$에서 $y = x + k - \frac{1}{4}$에 접한다.
또한 $(2,\ k+4)$를 지나고 기울기가 1인 직선의 방정식은 $y = x + k + 2$이므로
그래프를 이용하여 t의 범위에 따른 $y = f(x)$와 $y = x + t$와 의 교점의 개수는



$t < k - \frac{1}{4}$ 일 때 교점의 개수는 0개
$t = k - \frac{1}{4}$ 일 때 교점의 개수는 1개
$k - \frac{1}{4} < t \le k + 2$ 일 때 교점의 개수는 2개
$t > k + 2$일 때 교점의 개수는 1개
임을 알 수 있다.
위의 결과를 이용하면 $g(t)$가 한 점에서만 불연속이 되기 위한 그래프의 개형은 아래와 같음을 알 수 있다.

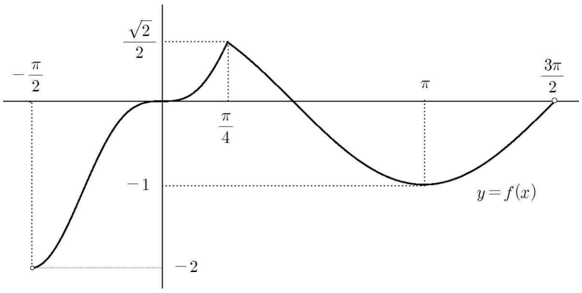


$g(t) = \begin{cases} 2 & \left(t \le -\frac{3}{4}\right) \\ 1 & \left(t > -\frac{3}{4}\right) \end{cases}$ 이므로 $t = -\frac{3}{4}$일 때 $g(t)$가 불연속이 되고
$y = x + k - \frac{1}{4} = x - 3$에서 $k = -\frac{11}{4}$이다.

013

[정답] 99

함수 $y=f(x)$의 그래프는 아래와 같다.



$y=\sqrt{|f(x)-t|}=\begin{cases}\sqrt{f(x)-t} & (f(x)\geq t)\\ \sqrt{-f(x)+t} & (f(t)<t)\end{cases}$를 x에 대해 미분하면

$$y'=\begin{cases}\dfrac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)-t}} & (f(x)\geq t)\\ \dfrac{-f'(x)}{2\sqrt{-f(x)+t}} & (f(x)<t)\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-}f(x)=f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $f(x)$는 $x=\dfrac{\pi}{4}$에서 연속이다.

하지만, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}-}f'(x)=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$, $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{4}+}f'(x)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$이므로 $x=\dfrac{\pi}{4}$에서 미분가능하지 않다.

또한 $y=f(x)$과 $y=t$가 만나는 점에서 미분가능하지 않다.

$t=-1$일 때 즉, $y=\sqrt{1+\cos t}$의 $x=\pi$에서의 미분가능성을 조사해보면

$$\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{1-\cos h}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2\sin^2\frac{h}{2}}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\sqrt{2}\left|\sin\frac{h}{2}\right|}{h}$$

에서

$$\lim_{h\to 0-}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h}=-\frac{\sqrt{2}}{2},\qquad \lim_{h\to 0+}\frac{\sqrt{1+\cos(\pi+h)}}{h}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

이므로 $x=\pi$에서 미분가능하지 않다.

t의 값의 범위에 따른 $g(t)$의 값을 구해보면

$$g(t)=\begin{cases}1 & (t\leq -2)\\ 2 & (-2<t<-1)\\ 3 & (t=-1)\\ 4 & (-1<t<0)\\ 2 & (t=0)\\ 3 & \left(0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\\ 1 & \left(t\geq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)\end{cases}$$

따라서 $a=g\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=1$, $b=g(0)=2$, $c=g(-1)=3$이다.

또한, 함수 $h(g(t))$가 실수 전체에서 연속이므로 $h(1)=h(2)=h(3)=h(4)$이 성립하고

$h(x)$는 최고차항의 계수가 1인 사차함수이므로 $h(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+k$라 할 수 있다.

$$\therefore\ h(a+5)-h(b+3)+c=h(6)-f(5)+3$$
$$=(120+k)-(24+k)+3=99$$

014

[정답] 2

$f(x)=x^2+ax+b$ (a, b는 상수)라 하자. 실수 t에 대하여 함수 $h(t)$의 값은 직선 $y=g(t)$와 곡선 $y=g(x)$가 접하는 경우를 제외하고, 서로 만나는 교점의 개수와 같다.

$g(x)=f(x)e^x$, $g'(x)=\{f(x)+f'(x)\}e^x$이므로

함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 두 이차방정식 $f(x)=0$, $f(x)+f'(x)=0$의 판별식을 각각 D_1, D_2라 할 때, D_1, D_2의 값에 따라 달라진다

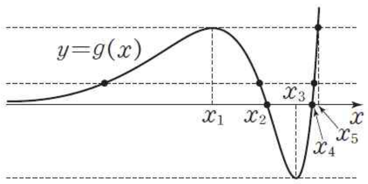
$f(x)=x^2+ax+b=0$에서 $D_1=a^2-4b$

$f(x)+f'(x)=x^2+ax+b+(2x+a)=x^2+(a+2)x+a+b=0$

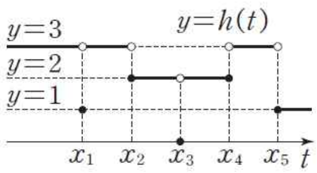
에서 $D_2=(a+2)^2-4(a+b)=a^2-4b+4=D_1+4$

(ⅰ) $D_1>0$일 때

$D_2=D_1+4>0$이므로 곡선 $y=g(x)$는 x축과 2개의 교점을 가지고, 함수 $g(x)$는 극댓값과 극솟값을 각각 1개씩 가지므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

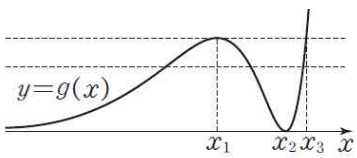


따라서 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같으므로 함수 $h(t)$의 불연속인 t의 개수는 5이다.

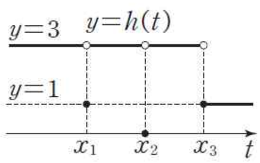


(ⅱ) $D_1=0$일 때,

$D_2=4>0$이므로 곡선 $y=g(x)$는 x축과 접하고, 함수 $g(x)$는 극댓값과 극솟값을 각각 1개씩 가지므로 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

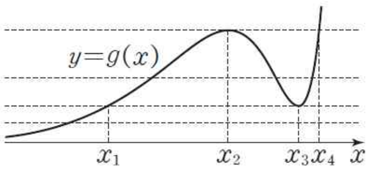


따라서 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같으므로 함수 $h(t)$의 불연속인 t의 개수는 3이다.

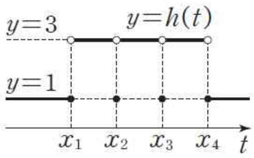


(ⅲ) $D_1<0$일 때, $D_2>0$이면

곡선 $y=g(x)$는 x축과 만나지 않고, 함수 $g(x)$는 극댓값과 극솟값을 각각 1개씩 가지므로 함수 $g(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.

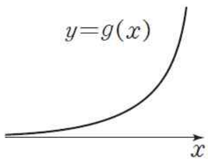


따라서 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같으므로 함수 $h(t)$의 불연속인 t의 개수는 4이다.

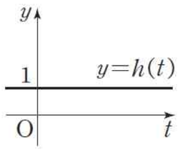


(iv) $D_1<0$ 일 때, $D_2<0$이면

곡선 $y=g(x)$는 x축과 만나지 않고 함수 $g(x)$는 증가함수이므로 그래프의 개형은 그림과 같다.

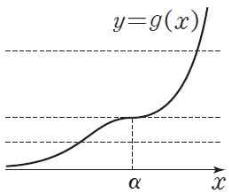


따라서 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같으므로 함수 $h(t)$의 불연속인 t의 개수는 0이다.

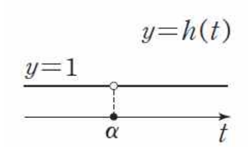


(v) $D_1<0$일 때, $D_2=0$이면

곡선 $y=g(x)$는 x축과 만나지 않고, 함수 $g(x)$의 극값이 존재하지 않으므로 $g'(x)=0$을 만족시키는 x의 값을 $x=\alpha$라 하면 함수 $y=g(x)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같다.



따라서 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 아래 그림과 같으므로 함수 $h(t)$의 불연속인 t의 개수는 1이다.



(i)~(v)에서 조건을 만족시키는 경우는 (v)이다.

$g'(\alpha)=0$ 에서 $\{f(\alpha)+f'(\alpha)\}e^{\alpha}=0$ 따라서 $f(\alpha)+f'(\alpha)=0$, 즉 $f(\alpha)=-f'(\alpha)$

$g(\alpha)=f(\alpha)e^{\alpha}=-f'(\alpha)e^{\alpha}=2$ 이므로 $-(2\alpha+a)e^{\alpha}=(-2\alpha-a)e^{\alpha}=2$ $\cdots$ ㉠

$g'(x)=\{f(x)+f'(x)\}e^{x}=(x^2+ax+b+2x+a)e^{x}$ 이고

$g'(x)=(x-\alpha)^2e^{x}=(x^2-2\alpha x+\alpha^2)e^{x}$ 이므로

$x^2+(a+2)x+a+b=x^2-2\alpha x+\alpha^2$ 에서 $a+2=-2\alpha$, $a+b=\alpha^2$

㉠에 $-2\alpha=a+2$를 대입하면 $2e^{\alpha}=2$

따라서 $\alpha=0$이므로 $a+2=0$에서 $a=-2$, $-2+b=0$에서 $b=2$ $\Rightarrow$ $f(\alpha)=f(0)=b=2$ 이다.

015

[정답] ㄱ, ㄷ

점 $(a, 0)$에서 그은 접선이 곡선 $y=(x-n)e^x$과 만나는 점의 좌표를 $(t, (t-n)e^t)$라 하자.

$y'=e^x+(x-n)e^x=(x-n+1)e^x$이므로 점 $(t, (t-n)e^t)$에서 이 곡선에 그은 접선의 방정식은

$y=(t-n+1)e^t(x-t)+(t-n)e^t$

이 직선이 점 $(a, 0)$을 지나므로

$0=(t-n+1)e^t(a-t)+(t-n)e^t$

$t^2-(n+a)t+an+n-a=0$

이 방정식의 판별식을 D라 하면

$D=(n+a)^2-4(an+n-a)=(n-a)(n-a-4)$

ㄱ. $a=0$일 때 $n=4$이면 $D=0$이므로 점 $(0, 0)$에서
곡선 $y=(x-4)e^x$에 그은 접선의 개수는 1이다.
따라서 $f(4)=1$ (참)

ㄴ. $D=(n-a)(n-a-4)=0$에서
$n=a$ 또는 $n=a+4$이므로
$f(n)=1$인 정수 n의 개수는 항상 2이다. (거짓)

ㄷ. 정수 a에 대하여 $f(n)$은

$$f(n)=\begin{cases}0 & (a<n<a+4)\\ 1 & (n=a \text{ 또는 } n=a+4)\\ 2 & (n<a \text{ 또는 } n>a+4)\end{cases}$$

이므로 $f(n)$이 가질 수 있는 값은 0, 1, 2뿐이다. 이때 $\sum_{n=1}^{5} f(n)=5$이므로 가능한 경우는 다음과 같다.

(ⅰ) $f(1)=0$, $f(2)=0$, $f(3)=1$, $f(4)=2$, $f(5)=2$ 인 경우는 $3=a+4$, $a=-1$

(ⅱ) $f(1)=2$, $f(2)=2$, $f(3)=1$, $f(4)=0$, $f(5)=0$ 인 경우는 $3=a$, $a=3$

따라서 $a=-1$ 또는 $a=3$ (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.