제 2 교시

2024학년도 대학수학능력시험 대비 문제지

수학 영역

홀수형

성명	이연	수험 번호					—				

○ 문제지의 해당란에 성명과 수험번호를 정확히 쓰시오.

○ 답안지의 필적 확인란에 다음의 문구를 정자로 기재하시오.

나의 꿈은 맑은 바람이 되어서

○ 답안지의 해당란에 성명과 수험 번호를 쓰고, 또 수험 번호와 답을 정확히 표시하시오.

○ 단답형 답의 숫자에 '0'이 포함되면 그 '0'도 답란에 반드시 표시하시오.

○ 문항에 따라 배점이 다르니, 각 물음의 끝에 표시된 배점을 참고하시오. 배점은 2점, 3점 또는 4점입니다.

○ 계산은 문제지의 여백을 활용하시오.

※ 공통 과목 및 자신이 선택한 과목의 문제지를 확인하고, 답을 정확히 표시하시오.

※ 시험이 시작될 때까지 표지를 넘기지 마십시오.

지인선 X 이로운

제 2 교시

수학 영역

홀수형

5지선다형

1. $\sqrt{8}\times\sqrt[6]{8}$의 값은? [2점] 3

① 2　② $2\sqrt{2}$　③ 4　④ $4\sqrt{2}$　⑤ 8

$2^{\frac{3}{2}} \times 2^{\frac{3}{6}} = 2^{2}$

2. 함수 $f(x)=x^2+x$에 대하여 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-6}{h}$의 값은? [2점] 2

① 3　② 5　③ 7　④ 9　⑤ 11

$f(2)=6$ 이므로,

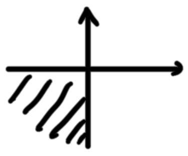
주어진 극한은 $\lim_{h\to 0}\frac{f(2+h)-f(2)}{h} = f'(2)$ 로 볼 수 있다.

$f'(x) = 2x+1$

$f'(2) = 5$

3. $\pi<\theta<\frac{3}{2}\pi$인 θ에 대하여 $\cos\theta=-\frac{3\sqrt{10}}{10}$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점] 4

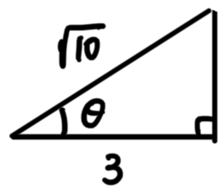
① $-\frac{2}{3}$　② $-\frac{1}{3}$　③ 0　④ $\frac{1}{3}$　⑤ $\frac{2}{3}$



$\cos\theta < 0$

$\sin\theta < 0$

$\tan\theta > 0$



$\Rightarrow \tan\theta = \frac{1}{3}$

4. 실수 a에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases}\frac{x}{2}-1 & (x\le a)\\ 2x-4 & (x>a)\end{cases}$$

라 하자. $\lim_{x\to a-}f(x)\times\lim_{x\to a+}f(x)=a$를 만족시키는 모든 a의 값의 합은? [3점] 5

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

$(\frac{a}{2}-1)\times(2a-4) = a$

$a^2-5a+4=0$

$\therefore$ 모든 a값의 합은 5.

5. 모든 항이 양수인 등비수열 $\{a_n\}$이

$$a_3 = a_1 + 9, \quad a_5 = a_3 + 36$$

를 만족시킬 때, a_2의 값은? [3점] 5

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6 V

1) 공비 구하기

$a_3 - a_1 = 9$

$r^2(a_3 - a_1) = a_5 - a_3 = 36$

$\Rightarrow r^2 = 4, \; r = 2$ (모든 항이 양수이므로)

2) 초항 구하기

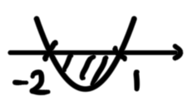
$4a - a = 9 \Rightarrow a = 3$

$\therefore a_2 = ar = 6$

6. 곡선 $y = x^2 + 2x - 3$와 직선 $y = x - 1$로 둘러싸인 부분의 넓이는? [3점] 2

① 4 ② $\frac{9}{2}$ V ③ 5 ④ $\frac{11}{2}$ ⑤ 6

$y = (x^2 + 2x - 3) - (x - 1)$
$= x^2 + x - 2$
$= (x+2)(x-1)$



$\Rightarrow$ (넓이) $= \frac{1}{6} \times 3^3$
$= \frac{9}{2}$

7. 두 실수 a, b가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 64의 세제곱근 중 실수인 것은 $a + b$이다. (나) 64의 네제곱근 중 실수인 것을 모두 곱한 값은 ab이다.

$a^2 + b^2$의 값은? [3점] 1

① 32 V ② 40 ③ 48 ④ 56 ⑤ 64

$64 = 2^6$

$a + b = 2^2$

$ab = 2^{\frac{3}{2}} \times (-2^{\frac{3}{2}}) = -2^3$

$a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$
$= 16 + 16$
$= 32$

8. 함수 $f(x)=ax^3+ax^2+(a-8)x+2$의 역함수가 존재하도록 하는 양수 a의 최솟값은? [3점] 3

① 4 ② 8 ③ 12 ④ 16 ⑤ 20

V

$f'(x)=3ax^2+2ax+(a-8)$

$D/4=a^2-3a(a-8)$

$=-2a^2+24a\le 0$

$\Rightarrow a\ge 12$ or $a\le 0$

양수 a라 했으므로 $a\ge 12$

$\therefore$ 가능한 a의 최솟값은 12

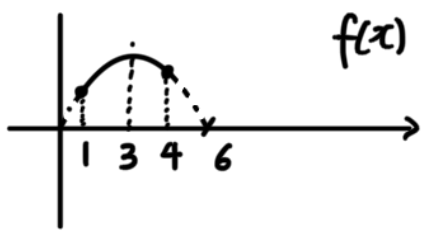
9. 닫힌구간 $[1,\ 4]$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=4\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right),\quad g(x)=a\sin\left(\frac{\pi x}{6}\right)+b\ (a<0)$$

의 치역을 각각 A, B라 하자. $A=B$일 때, $a\times b$의 값은? [4점] 1

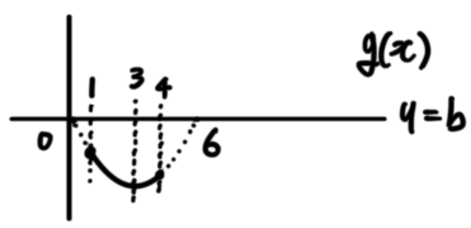
① -24 ② -20 ③ -16 ④ -12 ⑤ -8

V



$\Rightarrow A=[f(1),\ f(3)]$

$=[2,\ 4]$



$\Rightarrow B=[f(3),\ f(1)]$

$=[a+b,\ \frac{a}{2}+b]$

$A=B$ 이므로

$a+b=2$

$\frac{a}{2}+b=4$

$\therefore a=-4$

$b=6$

$a\times b=-24$

10. 최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$가 있다. 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(1,\ 1)$에서 접하는 직선의 x절편과 곡선 $y=f(x)+x^3$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서 접하는 직선의 x절편은 k로 같다. $f(k)$의 값은? [4점] 4

① $\frac{5}{18}$ ② $\frac{2}{9}$ ③ $\frac{1}{6}$ ④ $\frac{1}{9}$ ⑤ $\frac{1}{18}$

V

$f(1)=1 \Rightarrow f(x)=(x-1)^2+a(x-1)+1$

$y=a(x-1)+1 \Rightarrow k=1-\frac{1}{a}$

$y=(a+3)(x-1)+2 \Rightarrow k=1-\frac{2}{a+3}$

$\therefore \frac{1}{a}=\frac{2}{a+3}$

$a+3=2a$

$\Rightarrow a=3,\ k=\frac{2}{3}$

$f(k)=\frac{1}{9}-1+1$

$=\frac{1}{9}$

11. 실수 a에 대하여 시각 $t=0$에서 원점을 출발하여 수직선 위를 움직이는 점 P의 시각 $t(t \geq 0)$에서의 속도 $v(t)$는

$$v(t)=t(t-2)(t-a)$$

이고 다음 조건을 만족시킬 때, a의 최댓값과 최솟값의 차는? [4점]

3

시각 $t<2$일 때, 점 P는 점 A(5)와 가까워지도록 움직인다.

① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{11}{4}$ ④ 4 ⑤ $\frac{21}{4}$

V

점 P의 위치함수를 f(t)라 하자.
주어진 '조건'을 바꾸어 생각하면,
시각 $t \leq 2$일 때 f(t)는 증가하며, $f(2) \leq 5$ 이다.
로 해석할 수 있다.

① $t \leq 2$에서 f(t)가 증가

$\Rightarrow a \geq 2$

② $f(2) \leq 5$

$$f(2) = \int_0^2 t(t-2)(t-a) \cdot dt + 0$$

$$= \int_0^2 t^2(t-2) \cdot dt - \int_0^2 at(t-2) \cdot dt$$

$$= -\frac{1}{12} \times 2^4 + \frac{a}{6} \times 2^3 \leq 5$$

$\Rightarrow a \leq \frac{15}{4}$

$\therefore 2 \leq a \leq \frac{15}{4}$

$\frac{15}{4} - 2 = \frac{11}{4}$

12. $a_1=0$인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n + n & (a_n \leq 0) \\ a_n - k & (a_n > 0) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_5=0$가 되도록 하는 모든 양수 k의 값의 합은? [4점] 5

① $\frac{23}{3}$ ② $\frac{25}{3}$ ③ 9 ④ $\frac{29}{3}$ ⑤ $\frac{31}{3}$

V

$a_1 = 0$

$a_2 = 1$

$a_3 = 1 - k$

$a_4 = 4 - k$ $(k \geq 1)$ $1-2k$ $(0<k<1)$

$a_5 = 8-k$ $(k \geq 4)$ $4-2k$ $(1 \leq k < 4)$ $5-2k$ $(\frac{1}{2} \leq k < 1)$ $1-3k$ $(0<k<\frac{1}{2})$

$= 0$

가능한 k는 $8, 2, \frac{1}{3}$

$\Rightarrow 8+2+\frac{1}{3} = \frac{31}{3}$

13. $b-a>2$ 인 두 실수 a, b 에 대하여 함수 $f(x)$ 를

$$f(x)=(x-a)(x-b)$$

라 하자. 함수 $g(x)$ 를

$$g(x)=\int_a^x f(t)dt+f(x)+f'(x)+2$$

라 할 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

5

<보 기>

ㄱ. 실수 k 에 대하여 $g'(k)=0$ 이면 $g(k)=\int_a^k f(t)dt$ 이다.

ㄴ. $g'(a)\times g'(b)<0$

ㄷ. 함수 $g(x)$ 는 $\int_a^b f(t)dt$ 보다 큰 극솟값을 갖는다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ ④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

$g(a)=f'(a)+2$

$g'(x)=f(x)+f'(x)+f''(x)$

$=f(x)+f'(x)+2$

$\Rightarrow g(x)=\int_a^x f(t)\cdot dt+g'(x)$

ㄱ. $g(k)=\int_a^k f(t)\cdot dt+g'(k)$

$\Rightarrow g'(k)=0$ 이면 $g(k)=\int_a^k f(t)\cdot dt$ (참)

ㄴ. $g'(a)=f(a)+f'(a)+2=a-b+2<0$

$g'(b)=f(b)+f'(b)+2=b-a+2>0$

$\Rightarrow g'(a)\times g'(b)<0$ (참)

ㄷ. $g(x)$가 극솟값을 가지는 x값을 k라 하자.

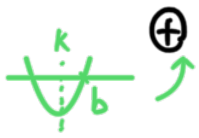
ㄴ에 의해 $a<k<b$ 임을 알 수 있다.

$g(k)-\int_a^b f(t)\cdot dt>0$ 임을 보여보자.

$\int_a^k f(t)+f'(t)+2\cdot dt-\int_a^b f(t)\cdot dt$

$=\int_b^k f(t)\,dt+f(k)+2(k-a)$

$=\underbrace{\int_b^k f(t)\,dt}_{\oplus}+\underbrace{(k-a)}_{\oplus}\times\underbrace{(k-b+2)}_{\oplus}>0$ (참)

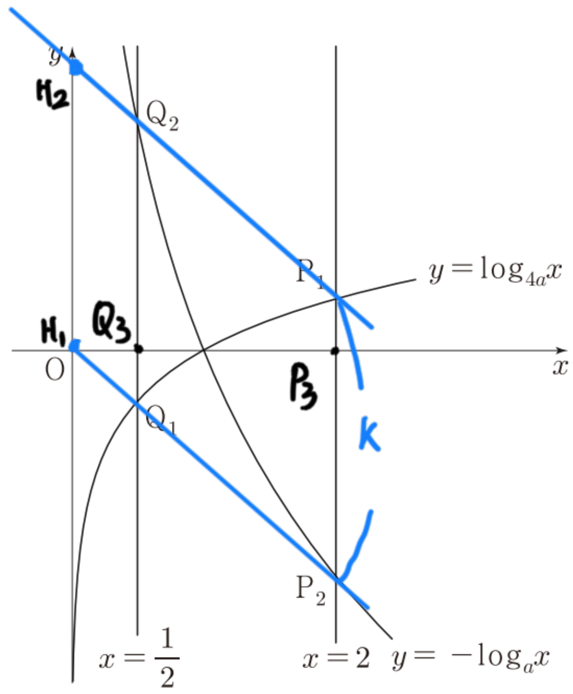


($a<k<b$, $b-a>2$ 이용)

14. 좌표평면에서 두 곡선 $y=\log_{4a}x$, $y=-\log_a x$ 가 직선 $x=2$ 와 만나는 점을 각각 P_1, P_2 라 하고, 두 곡선 $y=\log_{4a}x$, $y=-\log_a x$ 가 직선 $x=\frac{1}{2}$ 와 만나는 점을 각각 Q_1, Q_2 라 하자. $\overline{P_1P_2}=k$ 라 할 때, 두 직선 P_1Q_2, P_2Q_1 의 y절편의 합은 k이다. k의 값은? (단, a는 $a>1$ 인 상수이다.) [4점]

1

① $\frac{15}{8}$ ② 2 ③ $\frac{17}{8}$ ④ $\frac{9}{4}$ ⑤ $\frac{19}{8}$



$Q_2(\frac{1}{2},\log_a 2)$ $P_1(2,\log_{4a}2)$

$Q_1(\frac{1}{2},-\log_{4a}2)$ $P_2(2,-\log_a 2)$

즉, 사각형 $Q_1Q_2P_1P_2$는 평행사변형이고,

직선 P_1Q_2의 y절편을 H_2, P_2Q_1의 y절편을 H_1이라 할 때,

사각형 $H_1H_2P_1P_2$ 또한 평행사변형이다.

$\Rightarrow \overline{H_1H_2}=k$

이때 H_1의 y좌표와 H_2의 y좌표 합 또한 k이므로,

$H_1(0,0)$, $H_2(0,k)$ 이다.

① $k=\log_a 2+\log_{4a}2$

② 점 $(\frac{1}{2},0)$을 Q_3, 점 $(2,0)$을 P_3이라 할 때,

$\triangle H_1Q_3Q_1 \backsim \triangle H_1P_3P_1$

$\Rightarrow \frac{1}{2}:2=\log_{4a}2:\log_a 2$

$\therefore a=2^{\frac{2}{3}}$, $k=\frac{15}{8}$

15. 자연수 k에 대하여 함수 $f(x)=|x^3+kx^2-10kx+9k|$가 있다. $f'(1)\geq f'(5)$이 되도록 하는 모든 k의 값의 합은? [4점]

① 15 ② 17 ③ 19 ④ 21 ⑤ 23 2

$g(x)=x^3+kx^2-10kx+9k$ 라 하자.

$g'(x)=3x^2+2kx-10k$

$g(1)=1$, $g(5)=125-16k$

$g'(1)=3-8k$, $g'(5)=75$

이때 k가 자연수이므로 $g'(1)<g'(5)$ 이고, $g(1)>0$ 이므로 $f'(1)=g'(1)$ 이다.

$\therefore$ $f'(1)\geq f'(5)$ 이려면

$g(5)<0$, $g'(1)\geq -g'(5)$

$\Rightarrow k>\frac{125}{16}$, $k\leq\frac{39}{4}$

가능한 자연수 k는 8, 9

단답형

16. 방정식 $\log_3(x-4)=\log_9(x+2)$를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점] 7

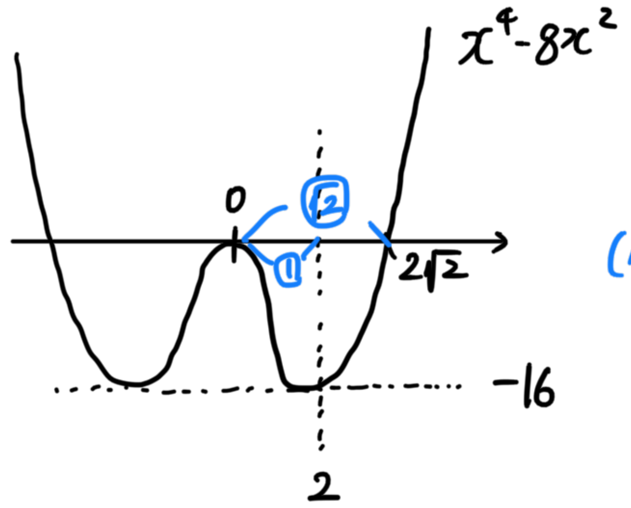
① $x>4$

② $(x-4)^2=x+2$

$x^2-9x+14=0$

$\therefore$ $x=7$

17. 방정식 $x^4-8x^2=k$의 서로 다른 실근의 개수가 4가 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [3점] 15



(사차함수 비율관계)

$\Rightarrow -16<k<0$

가능한 정수k는 15개

18. 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$이

$$\sum_{k=1}^{5}(a_k+k^2)=20, \quad \sum_{k=1}^{5}\{b_k+(k+1)^2\}=16$$

을 만족시킬 때, $\sum_{k=1}^{5}(a_k-b_k)$의 값을 구하시오. [3점]

39

$$\sum_{k=1}^{5} a_k = 20 - \frac{5\times6\times11}{6} = -35$$

$$\sum_{k=1}^{5} b_k = 16 - \sum_{k=1}^{5}(k+1)^2$$

$$= 16 - \left(\frac{6\times7\times13}{6} - 1\right)$$

$$= -74$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{5}(a_k-b_k) = -35+74$$

$$= 39$$

19. 도함수가 $f'(x)=3x^2-3$인 함수 $f(x)$의 극댓값을 a라 하고, 극솟값을 b라 하자. $a=\frac{5}{4}b$일 때, $f(0)$의 값을 구하시오. [3점]

18

$f(x)=x^3-3x+p$ 라 하자.

$a=f(-1)=2+p$

$b=f(1)=p-2$

$\Rightarrow (p+2)=\frac{5}{4}(p-2)$

$p=18$

$\therefore f(0)=p=18$

20. 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$을

$$b_n=\begin{cases} 2-a_n & (n\le 3) \\ a_n & (n>3) \end{cases}$$

이라 하자. 세 수 b_3, b_4, b_5가 이 순서대로 공비가 2인 등비수열을 이룰 때, $\sum_{n=1}^{10}b_n$의 값을 구하시오. [4점]

130

$b_3=2-a_3$

$b_4=a_4$

$b_5=a_5$

$4-2a_3=a_4$

$2a_4=a_5$

$a_n=a+(n-1)d$라 하면,

① $3a+7d=4$

② $a=-2d$

$\therefore d=4,\ a=-8$

$a_n=4n-12$

$$\sum_{n=1}^{10}b_n=\sum_{n=1}^{3}(2-a_n)+\sum_{n=4}^{10}a_n$$

$$=6-3a_2+7a_7$$

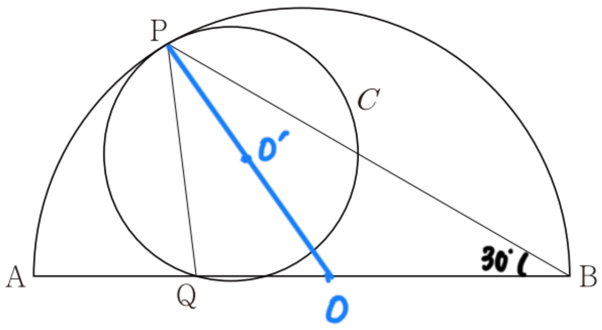
$$=6-3\times(-4)+7\times16$$

$$=130$$

21. 그림과 같이 선분 AB를 지름으로 하는 반원이 있다. 호 AB와 점 P에서 접하고 반지름의 길이가 7인 원 C가 선분 AB와 만나는 두 점 중 A와 가까운 점을 Q라 하자.

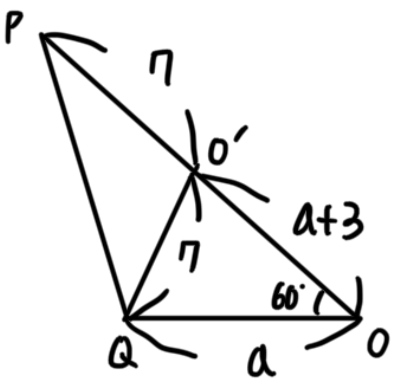
$$\overline{\mathrm{AQ}}=10,\ \overline{\mathrm{BQ}}>10,\ \angle\mathrm{PBA}=\frac{\pi}{6}$$

일 때, $\overline{\mathrm{PQ}}^2$의 값을 구하시오. [4점] 175



점 P, O, O'는 한 직선 위에 있다.
(점 P에서의 접선과, 직선 PO, PO'가 수직이기 때문)

$\overline{OQ}$의 길이를 a라 하자.



△OO'Q를 보자.

$\overline{OO'}=(10+a)-7=3+a$

$\overline{OQ}=a$

$\overline{O'Q}=7$

$\angle POQ=60°$ (∠BPA의 중심각)

⇒ cos 법칙을 적용하면

$a^2+(a+3)^2-2\times\frac{1}{2}\times a(a+3)=49$

$\therefore a=5$

△OPQ를 보자.

$\overline{OP}=15,\ \overline{OQ}=5,\ \angle POQ=60°$

$\Rightarrow \overline{PQ}^2=15^2+5^2-2\times15\times5\times\frac{1}{2}$

$=175$

22. 이차함수 $f(x)$와 양수 전체의 집합에서 연속인 함수 $g(x)$가 상수 a에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $x>0$에서 $(x-a)f'(x)+f(x)g(x)=0$이다.
> (나) 함수 $(x-a)f(x)$는 $x=2$에서 극대 또는 극소이고, $g(2)<1$이다.

$g(k)=1$인 양의 실수 k가 존재할 때, k의 최댓값을 $\frac{q}{p}$라 하자. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p, q는 서로소인 자연수이다.) [4점] 5

(가) $x>0$, $f(x)\neq0$인 x에 대해

$g(x)=-\dfrac{(x-a)f'(x)}{f(x)}$ 라 할 수 있다.

(나) $f(2)+(2-a)f'(2)=0$

만약 $f(2)\neq0$ 이라면

$g(2)=-\dfrac{(2-a)f'(2)}{f(2)}=1$ 일 것이다.

이는 $g(2)<1$에 모순이므로, $f(2)=0$ 이다.

$\Rightarrow f(2)=0$

$a=2$ or $f'(2)=0$ (나 조건 이용)

① $f'(2)=0$ 일 경우

$g(x)=-\dfrac{(x-a)\times2p(x-2)}{p(x-2)^2}$ 이고, $x=2$에서 g의 극한값이 존재하려면 $a=2$ 여야 한다.

이렇게 될 경우 $g(x)=-2$ 의 상수함수가 되므로, $g(k)=1$인 k가 존재하지 않게 된다. (모순)

② $a=2$, $f'(2)\neq0$ $\beta\neq2$

$f(x)=\alpha(x-2)(x-\beta)$ 라 하자.

$\lim\limits_{x\to2}\dfrac{(x-2)\times\alpha(2x-2-\beta)}{\alpha(x-2)(x-\beta)}$ 가 발산하기 때문에,

$\beta\leq0$ 이어야 한다.

$g(k)=-\dfrac{(k-2)\times\alpha(2k-2-\beta)}{\alpha(k-2)(k-\beta)}=-\dfrac{2k-2-\beta}{k-\beta}=1$

$\Rightarrow k=\dfrac{2\beta+2}{3}\leq\dfrac{2}{3}$

$\therefore p=3,\ q=2$

제 2 교시

수학 영역(미적분)

홀수형

5지선다형

23. $\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x)}{x}$ 의 값은? [2점] 2

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

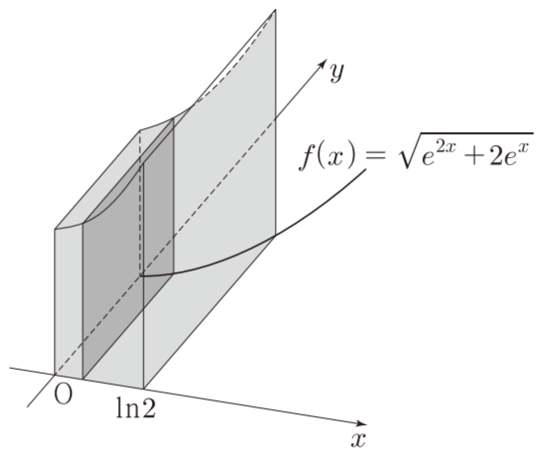
이건 솔직히 풀이 필요 없다.

24. $\int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin^2 x \cos x\, dx$ 의 값은? [3점] 1

① $\frac{1}{24}$ ② $\frac{1}{12}$ ③ $\frac{1}{8}$ ④ $\frac{1}{6}$ ⑤ $\frac{5}{24}$

$$\left[\frac{1}{3}\sin^3 x\right]_0^{\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{24}$$

25. 함수 $f(x)=\sqrt{e^{2x}+2e^{x}}$ 에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 와 x축, y축 및 직선 $x=\ln 2$ 로 둘러싸인 도형을 밑면으로 하는 입체도형이 있다. 이 입체도형을 x축에 수직인 평면으로 자른 단면이 모두 정사각형일 때, 이 입체도형의 부피는? [3점] 4



① $\frac{1}{2}$ ② $\frac{3}{2}$ ③ $\frac{5}{2}$ ④ $\frac{7}{2}$ ⑤ $\frac{9}{2}$

$$\int_0^{\ln 2}\left(\sqrt{e^{2x}+2e^{x}}\right)^2\cdot dx$$

$$=\int_0^{\ln 2}(e^{2x}+2e^{x})\cdot dx$$

$$=\left[\frac{1}{2}e^{2x}+2e^{x}\right]_0^{\ln 2} = \frac{7}{2}$$

26. 모든 항이 양수인 세 등비수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$이

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+3^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n+b_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{b_n+c_n}=\frac{1}{3}$$

을 만족시킬 때, c_1의 값은? [3점] 5

① 12 ② 15 ③ 18 ④ 21 ⑤ 24

a_n, b_n, c_n의 초항과 공비는 모두 양수

① a_n의 공비가 3이 아니라면

$\lim_{n\to\infty}\frac{3^n}{a_n+3^n} = 0$ or 1

⇒ a_n의 공비는 3

$a_n = 2\times 3^n$

② b_n의 공비가 3이 아니라면

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_n+b_n} = 0$ or 1

⇒ b_n의 공비는 3

$b_n = 4\times 3^n$

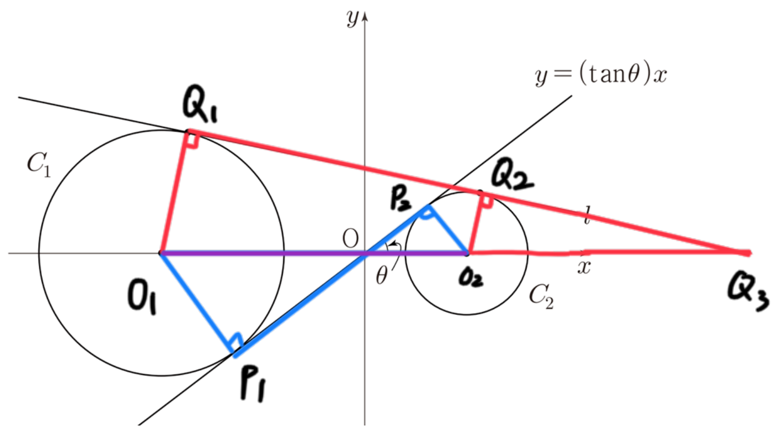
③ 마찬가지 논리로, $c_n = 8\times 3^n$ 임을 알 수 있다.

∴ $c_1 = 24$

27. 그림과 같이 실수 $\theta\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$에 대하여 두 원

$$C_1 : (x-a)^2+y^2=4,\ C_2 : (x-b)^2+y^2=1 \quad (a<0<b)$$

을 직선 $y=(\tan\theta)x$와 모두 접하도록 그릴 때, y절편이 양수이고 두 원 C_1, C_2와 모두 접하는 직선 l의 기울기를 $f(\theta)$라 하자. $\sin\alpha=\frac{3\sqrt{10}}{10}$인 실수 α에 대하여 $f'(\alpha)$의 값은? (단, $0<\alpha<\frac{\pi}{2}$) [3점] 3



① $-\frac{8}{81}$ ② $-\frac{1}{9}$ ③ $-\frac{10}{81}$ V ④ $-\frac{11}{81}$ ⑤ $-\frac{4}{27}$

$f(\theta) = -\tan\angle Q_2Q_3O_2 = -\frac{1}{\overline{Q_2Q_3}}$

① $\overline{O_1O_2}$ 구하기

$\triangle OO_1P_1 \sim \triangle OO_2P_2$

$\overline{OO_2} = \frac{1}{\sin\theta} \Rightarrow \overline{OO_1} = \frac{2}{\sin\theta}$

$\therefore \overline{O_1O_2} = \frac{3}{\sin\theta}$

② $\overline{O_2Q_3}$ 구하기

$\triangle O_2Q_3Q_2 \sim \triangle O_1Q_3Q_1$

$\overline{O_2Q_3} : \overline{O_2Q_3} + \frac{3}{\sin\theta} = 1:2$

$\therefore \overline{O_2Q_3} = \frac{3}{\sin\theta}$

$\Rightarrow \overline{Q_2Q_3} = \sqrt{9\csc^2\theta - 1}$

$f(\theta) = \frac{-\sin\theta}{\sqrt{9-\sin^2\theta}}$

$f'(\theta) = -\cos\theta \times \frac{9}{(9-\sin^2\theta)\sqrt{9-\sin^2\theta}}$ $\therefore f'(\alpha) = -\frac{10}{81}$

28. 함수 $f(x)=(\ln x)^2-4\ln x+a$와 구간 $(-\infty,\ 1)$에서 연속인 함수 $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 모든 실수 x에 대하여
> $f'(g(x))\{x-g(x)\}+f(g(x))=0$이다.
> (나) $\{x \mid g(x)=k\}=\{x \mid x \geq 1\}$

$g'(0)$의 값은? (단, a, k는 상수이다.) [4점] 2

① -1 ② -2 V ③ -3 ④ -4 ⑤ -5

$x \geq 1$ 에서

$f'(k)\{x-k\} + f(k) = 0$ 이다.

주어진 범위에서 x에 상관없이 이 식이 성립하려면

$f'(k)=0$, $f(k)=0$ 이어야 한다.

$\Rightarrow k=e^2,\ a=4$

$x<1$에서 (가) 조건을 살펴보자.

$f'(x) = \frac{2\ln x - 4}{x}$

$\Rightarrow \frac{2\ln g - 4}{g} \times (x-g) + (\ln g)^2 - 4\ln g + 4 = 0$

$x<1$에서 $g(x) \neq e^2$ 이므로 → (나)조건

주어진 식을 $(\ln g - 2)$로 나누고 변형해보자.

$\Rightarrow 2(x-g) + (\ln g - 2) \times g = 0$

이 식에 $x=0$을 대입하면 $g(0)=e^4$ 이다.

x에 대해 미분해보면

$2 - 2g'(x) + g'(x)\ln g(x) + g'(x) - 2g'(x) = 0$ 이다.

$\therefore g'(0) = -2$

단답형

29. 자연수 k에 대하여 수열 $\{a_n\}$을

$$a_n = \begin{cases} 1 & (n \le k) \\ 2 & (n > k) \end{cases}$$

라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 k의 값의 합을 구하시오. [4점] 12

급수 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{(a_6)^n}$ 는 수렴하고, 그 합은 $\frac{7}{6}$ 보다 작다.

① $a_6=1$ 일 경우

주어진 급수는 $\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{1}+\cdots}_{k개}+\frac{2}{1}+\cdots$ 이므로 발산

$\therefore a_6 = 2$

② $a_6=2$일 경우

k는 1,2,3,4,5 중 하나.

주어진 급수는 $\sum_{n=1}^{k}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=k+1}^{\infty}\frac{2}{2^n}$ 이므로 수렴하고,

그 값은 $\frac{\frac{1}{2}\times(1-\frac{1}{2^k})}{1-\frac{1}{2}}+\frac{\frac{1}{2^k}}{1-\frac{1}{2}}$ 이다.

즉, $1+\frac{1}{2^k}<\frac{7}{6}$ 이므로,

가능한 k는 3, 4, 5.

30. 양의 상수 k와 두 실수 s, $t\,(s<t)$에 대하여 좌표평면에서 곡선 $y=e^x+\frac{1}{4e^x}$ $(s \le x \le t)$의 길이가 k가 되도록 하는 점 $(s,\ t)$가 나타내는 곡선을 C라 하자. 곡선 C가 직선 $y=x+2\ln 2$와 접할 때, $100k$의 값을 구하시오. [4점] 150

$y' = e^x - \frac{1}{4e^x}$

$\int_s^t \sqrt{\left(e^x-\frac{1}{4e^x}\right)^2+1}\;dx$

$= \int_s^t e^x+\frac{1}{4e^x}\;dx = \left[e^x-\frac{1}{4e^x}\right]_s^t$

$= e^t-\frac{1}{4e^t}-e^s+\frac{1}{4e^s} = k$

곡선 C와 $y=x+2\ln2$ 가 접한다는 점을 통해

곡선 C 위의 점 (s', t')에 대해

$t'=s'+2\ln2$, $\frac{dt}{ds}=1$ 임을 알 수 있다.

위 식을 s에 대해 미분해보자.

$\frac{dt}{ds}\left(e^t+\frac{1}{4e^t}\right)-\left(e^s+\frac{1}{4e^s}\right)=0$

$(e^{t'}-e^{s'})\times\left(1-\frac{1}{4e^{t'}e^{s'}}\right)=0$ 이므로,

$e^{t'}\times e^{s'}=\frac{1}{4}$이다.

$\left.\begin{matrix} t'+s'=-\ln4 \\ t'-s'=2\ln2 \end{matrix}\right) \Rightarrow s'=-\ln4,\ t'=0$

$\therefore k=1-\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{4}-1\right)=\frac{3}{2}$

$100k=150$

※ 시험이 시작될 때까지 표지를 넘기지 마십시오.