제 2 교시

수학 영역

15회

8.

정답: ④

해설1:

$\lim_{x\to\infty}\frac{x^3-f(x)}{x^2}=3$에서 $x^3-f(x)$은 최고차항의 계수가 3, 차수가 2라는 것을 알 수 있다.

$x^3-f(x)=3x^2+ax+b$라 하면 $f(x)=x^3-3x^2-ax-b$이다.

$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=2$에서 (분모)→0이므로 극한값이 존재하려면 $f(1)=2$여야 하고,
$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=f'(1)=2$이다.

$f(1)=-a-b-2=2$이고, $f'(1)=3-6-a=2$이므로 $a=-5$, $b=1$이다.

따라서 $f(x)=x^3-3x^2+5x-1$이고, $f(3)=14$이다.

해설2:

$f(1)=2$, $f'(1)=2$이고 $f(x)=x^3-3x^2+\cdots$이므로,

$f(x)=(x-1)^3+a(x-1)^2+2(x-1)+2$라고 식 세운 후, 이차항의 계수가 -3인 것을 통해 $a=0$임을 알 수 있다.

따라서 $f(x)=(x-1)^3+2(x-1)+2$이고,
$f(3)=(3-1)^3+2\times(3-1)+2=14$이다.

여담:

무한대로 가는 극한과 미분계수만 잘 해석할 수 있으면 무난하게 풀 수 있는 문제.

해설 2의 풀이도 알아두자. 문자를 하나만 써도 된다.

9.

정답: ⑤

해설:

점 A의 x좌표를 a라 할 때

$f(a)=1$이고 $af(a)+\frac{3}{4}=1$이므로 $a=\frac{1}{4}$이다.

또한 점 A에서 두 곡선의 접선은 서로 수직이므로
$f'(a)\times\{af'(a)+f(a)\}=-1$이고, 정리하면 $f'(a)=-2$이다.

그러므로 $f(a)=f\left(\frac{1}{4}\right)=1$이고, $f'(a)=f'\left(\frac{1}{4}\right)=-2$이므로

$f(x)=\left(x-\frac{1}{4}\right)^2-2\left(x-\frac{1}{4}\right)+1$이다.

따라서 $f(2)=\left(2-\frac{1}{4}\right)^2-2\times\left(2-\frac{1}{4}\right)+1=\frac{9}{16}$이다.

여담:

무난하게 계산만 잘 하면 되는 문제.

10.

정답: ③

해설:

1) $a_2 > -1$인 경우

$a_3 = a_2 - 7$이고,

$a_4 = (a_2-7)^2 - (a_2-7)$ (단, $a_2 - 7 \le -1$)

또는 $a_4 = a_2 - 14$ (단, $a_2 - 7 > -1$) 이다.

주어진 조건에 의해 $a_4 - a_2 = 1$이므로
$a_4 = (a_2-7)^2 - (a_2-7)$이고, (단, $a_2 \le 6$)
$a_4 - a_2 = (a_2-7)^2 - (a_2-7) - a_2 = 1$이다.

이를 만족시키는 $-1 < a_2 \le 6$인 a_2의 값은 $a_2 = 5$이고,

이 경우 $a_3 = 5 - 7 = -2$, $a_4 = (-2)^2 - (-2) = 6$,
$a_5 = 6 - 7 = -1$이므로 $a_5 > 0$을 만족하지 않는다.

따라서 $a_2 \le -1$이다.

2) $a_2 \le -1$인 경우

$a_3 = (a_2)^2 - a_2 \ge 2$이므로 $a_4 = (a_2)^2 - a_2 - 7$이다.

또한 $a_4 - a_2 = (a_2)^2 - a_2 - 7 - a_2 = 1$을 만족시키는 $a_2 \le -1$인 a_2의 값은 $a_2 = -2$이고,

이때 $a_3 = (-2)^2 - (-2) = 6$, $a_4 = 6 - 7 = -1$,
$a_5 = (-1)^2 - (-1) = 2$이므로 $a_5 > 0$을 만족시킨다.

$a_2 = -2$이므로 가능한 a_1의 값은 $a_1 = (-2) + 7 = 5$이고,

($(a_1)^2 - a_1 = -2$는 불가능)

$a_3 = 6$, $a_6 = 2 - 7 = -5$이므로

$a_1 + a_3 + a_6 = 5 + 6 + (-5) = 6$이다.

여담:

범위에 조심하며 차근차근 케이스분류하자.

11.

정답: ②

해설:

step1 주어진 부등식 해석

$f(x_1)f(x_2) - f(x_1) - f(x_2) + 1 = \{f(x_1) - 1\}\{f(x_2) - 1\}$이므로

$x_1 < 2 < x_2$인 모든 실수 x_1, x_2에 대하여

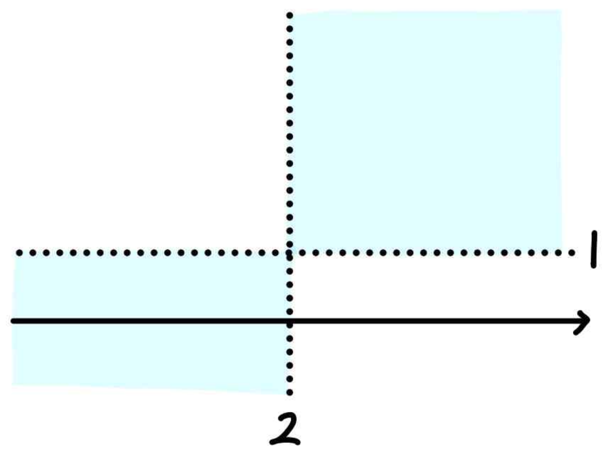
$\{f(x_1) - 1\}\{f(x_2) - 1\} \le 0$이다.

즉, $x < 2$일 때 $f(x) \le 1$이고, $x > 2$일 때 $f(x) \ge 1$인 경우거나,

$x < 2$일 때 $f(x) \ge 1$이고, $x > 2$일 때 $f(x) \le 1$인 경우이다.

이때 $f(x)$는 최고차항의 계수가 양수인 삼차함수이므로 $x \to \infty$일 때 $f(x) \to \infty$이고,

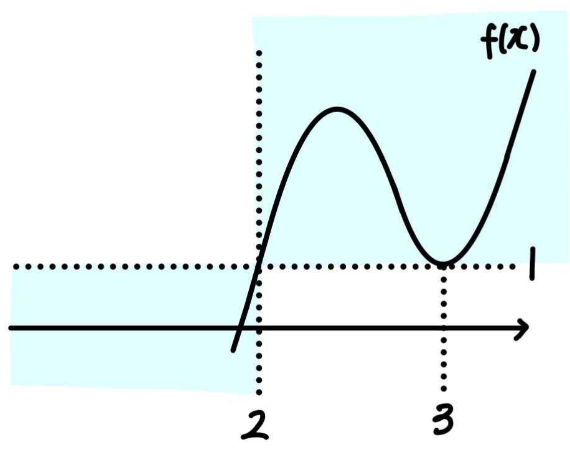
따라서 $x < 2$일 때 $f(x) \le 1$이고, $x > 2$일 때 $f(x) \ge 1$이다.



그러므로 $f(2) = 1$이다.

step2

주어진 조건에 의해 $f(3) = 1$인데, $x = 3$ 주위에서 $f(x) - 1$의 부호가 바뀌면 안되므로 $f'(3) = 0$이다.



따라서 $f(x)=(x-2)(x-3)^2+1$이고,

$f(5)=(5-2)\times(5-3)^2+1=13$이다.

여담:

주어진 부등식을 인수분해해서 해석하기.

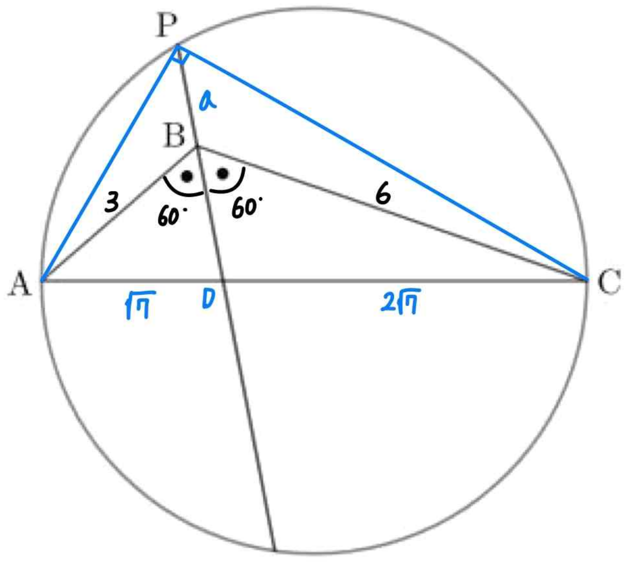
$f(x)-1$이라는 함수의 부호변화를 기준으로 해석하면
$f'(3)=0$을 찾기 편하다.

12.

정답: ④

해설:

step1



선분 AC와 직선 BP의 교점을 점 D라 하고,

선분 AP와 선분 CP를 그어보자.

삼각형 ABC에서 코사인법칙을 사용하면,

$(\overline{\mathrm{AC}})^2=(\overline{\mathrm{AB}})^2+(\overline{\mathrm{BC}})^2-2\times(\overline{\mathrm{AB}})\times(\overline{\mathrm{BC}})\times\cos\angle\mathrm{ABC}$이므로

$(\overline{\mathrm{AC}})^2=3^2+6^2-2\times3\times6\times\left(-\frac{1}{2}\right)=63$이고, $\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{7}$이다.

이때 삼각형 ABC에서 선분 BD는 각 B의 이등분선이므로,
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{CD}}$이다.

따라서 $\overline{\mathrm{AC}}=3\sqrt{7}$이고, $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{CD}}=1:2$이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\sqrt{7}$,
$\overline{\mathrm{CD}}=2\sqrt{7}$이다.

step2

$\overline{\mathrm{BP}}=a$라 하자.

삼각형 ABP에서 코사인법칙을 사용하면,

$(\overline{\mathrm{AP}})^2=(\overline{\mathrm{AB}})^2+(\overline{\mathrm{BP}})^2-2\times(\overline{\mathrm{AB}})\times(\overline{\mathrm{BP}})\times\cos\angle\mathrm{ABP}$이므로

$(\overline{\mathrm{AP}})^2=3^2+a^2-2\times3\times a\times\left(-\frac{1}{2}\right)$이고,

삼각형 BCP에서 코사인법칙을 사용하면,

$(\overline{\mathrm{CP}})^2=(\overline{\mathrm{BC}})^2+(\overline{\mathrm{BP}})^2-2\times(\overline{\mathrm{BC}})\times(\overline{\mathrm{BP}})\times\cos\angle\mathrm{CBP}$이므로

$(\overline{\mathrm{CP}})^2=6^2+a^2-2\times6\times a\times\left(-\frac{1}{2}\right)$이다.

이때 삼각형 ACP에서 선분 AC는 주어진 원의 지름이므로 $\angle \mathrm{APC}=90^{\circ}$ 이다.

따라서 $(\overline{\mathrm{AC}})^2=(\overline{\mathrm{AP}})^2+(\overline{\mathrm{CP}})^2$이므로

$(3\sqrt{7})^2=\left\{3^2+a^2-2\times3\times a\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}+\left\{6^2+a^2-2\times6\times a\times\left(-\frac{1}{2}\right)\right\}$

이고,

정리하면 $2a^2+9a-18=0$이므로 $a=\overline{\mathrm{BP}}=\frac{3}{2}$이다.

여담:

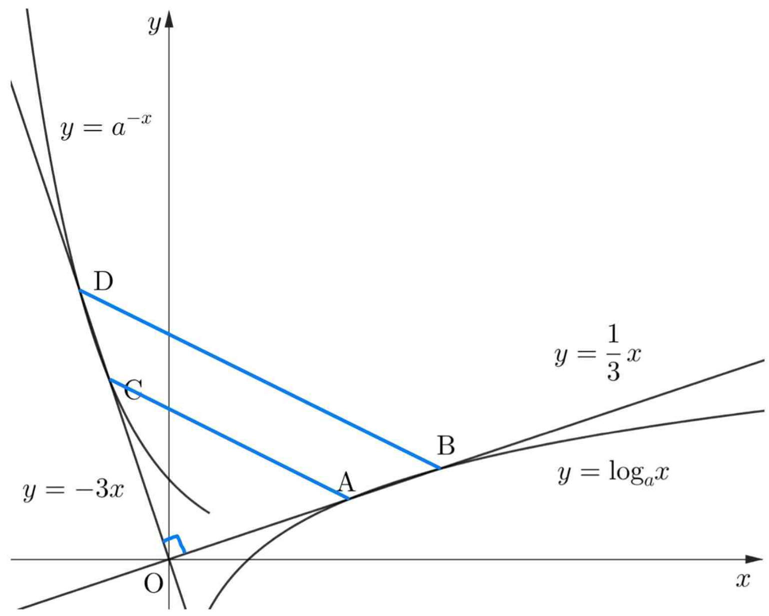
선분 AC가 지름이고 점 P가 주어진 원 위의 점이므로 선분 AP와 선분 CP를 긋는 발상은 꼭 했어야 한다.

13.

정답: ③

해설:

step1



주어진 조건에 의해

(삼각형 OAC의 넓이) : (사각형 ABDC의 넓이)$=4:5$이므로

(삼각형 OAC의 넓이) : (삼각형 OBD의 넓이)$=4:9$임을 알 수 있다.

이때 $y=-3x$를 원점에 대해 90° 회전시키면 $y=\frac{1}{3}x$가 되고,

$y=a^{-x}$를 원점에 대해 90° 회전시키면 $y=\log_a x$가 된다.

따라서 선분 OC를 원점에 대해 90° 회전시키면 선분 OA가 되고, 선분 OD를 원점에 대해 90° 회전시키면 선분 OB가 되므로,

$\overline{\mathrm{OA}}=\overline{\mathrm{OC}}$, $\overline{\mathrm{OB}}=\overline{\mathrm{OD}}$, $\angle \mathrm{AOC}=90^{\circ}$이고,

삼각형 AOC와 삼각형 BOD는 직각이등변삼각형이다.

그러므로 삼각형 AOC와 삼각형 BOD는 닮음이고, 넓이비가 $4:9$이므로 길이비가 $2:3$이다.

step2

점 A와 점 B는 직선 $y=\frac{1}{3}x$ 위의 점이고, 선분 OA와 선분 OB의 길이비가 $2:3$이므로,

점 A의 좌표를 $(6p, 2p)$, 점 B의 좌표를 $(9p, 3p)$라 하자.

점 A와 점 B는 $y=\log_a x$ 위의 점이므로

$2p = \log_a 6p,\ 3p = \log_a 9p$이다.

따라서 $a^{2p} = 6p,\ a^{3p} = 9p$이므로 $a^p = \dfrac{3}{2}$이고, $p = \dfrac{3}{8}$이다.

그러므로 $a^{\frac{3}{8}} = \dfrac{3}{2}$이므로 $a = \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{8}{3}}$이다.

여담:

1) 주어진 그래프들의 90° 회전 이동 관계를 파악해 삼각형 AOC와 삼각형 BOD는 직각이등변삼각형이라는 점 파악하기.

2) 삼각형 AOC와 삼각형 BOD는 닮음이므로 선분 OA와 선분 OB의 길이비를 구할 수 있고, 이를 통해 점 A와 점 B의 좌표 설정하기.

3) 넓이비는 닮음비의 제곱이라는 점 기억하기!

14.

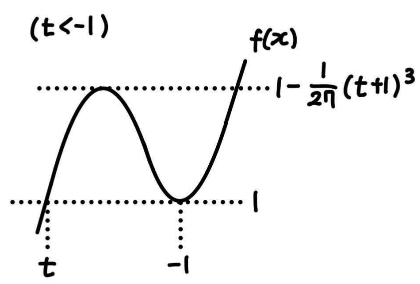
정답: ③

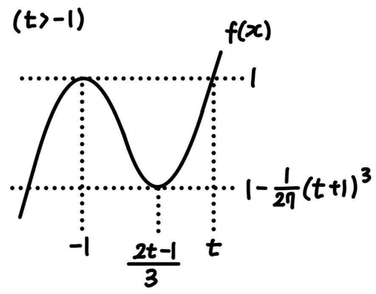
해설:

step1

$f(f(x)) = 0$의 서로 다른 실근의 개수는, $f(x) = 0$의 서로 다른 실근을 $x_1,\ x_2,\ x_3$라 했을 때, $f(x) = x_1$ 또는 $f(x) = x_2$ 또는 $f(x) = x_3$을 만족시키는 서로 다른 모든 x의 개수이다.

(단, $x_1 < x_2 < x_3$이고, $f(x) = 0$의 서로 다른 실근이 1개 또는 2개 존재할 수도 있다.)

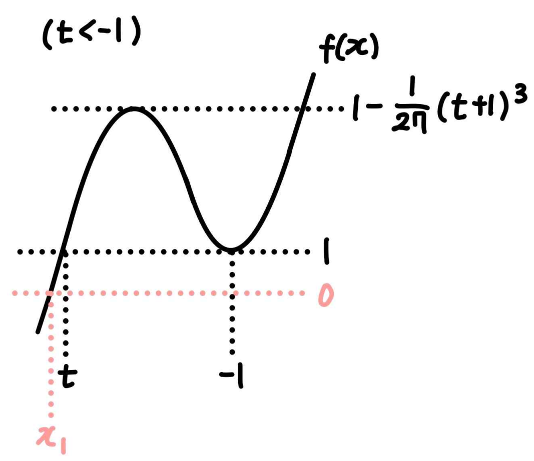




step2

ㄱ.

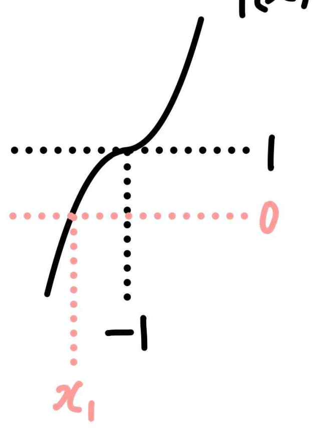
1) $t < -1$인 경우



$f(x) = 0$의 실근은 $x = x_1$의 1개이다. (단, $x_1 < -1$)

이때 $f(x) = x_1$의 실근은 1개이기 때문에 $g(t) = 1$이다.

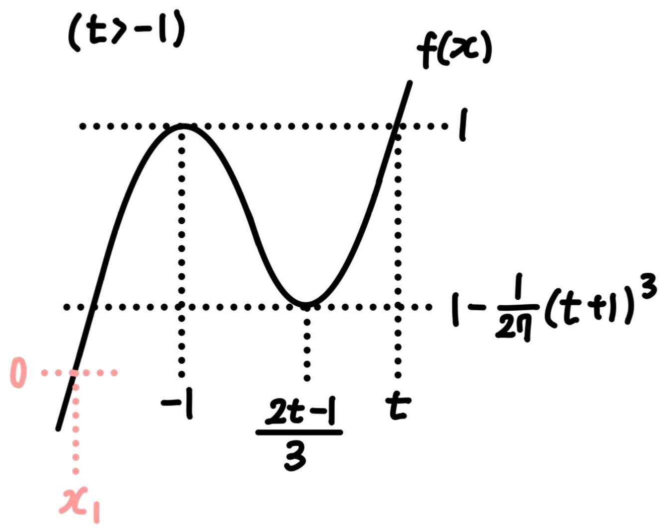
2) $t = -1$인 경우



$f(x)$는 증가함수이므로 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$의 1개이다. (단, $x_1<-1$)

이때 $f(x)=x_1$의 실근은 1개이기 때문에 $g(-1)=1$이다.

3) $-1<t<2$인 경우



$0<1-\dfrac{1}{27}(t+1)^3<1$이므로 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$의 1개이다. (단, $x_1<-1$)

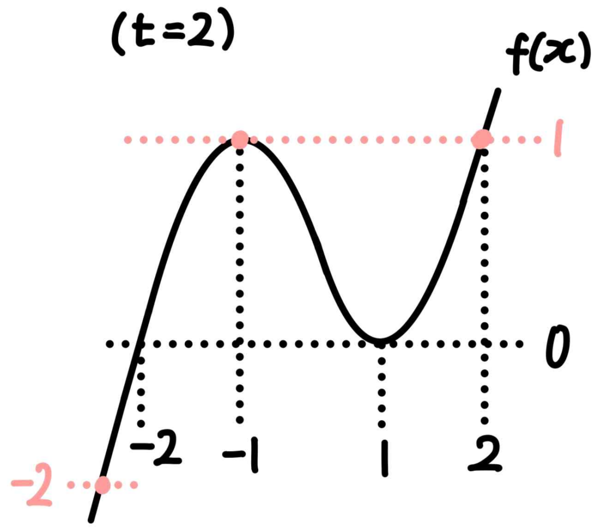
이때 $f(x)=x_1$의 실근은 1개이기 때문에 $g(t)=1$이다.

따라서 $t<2$이면 $g(t)=1$이므로 ㄱ은 참이다.

ㄴ.

ㄱ에서 $g(2-)=1$이다.

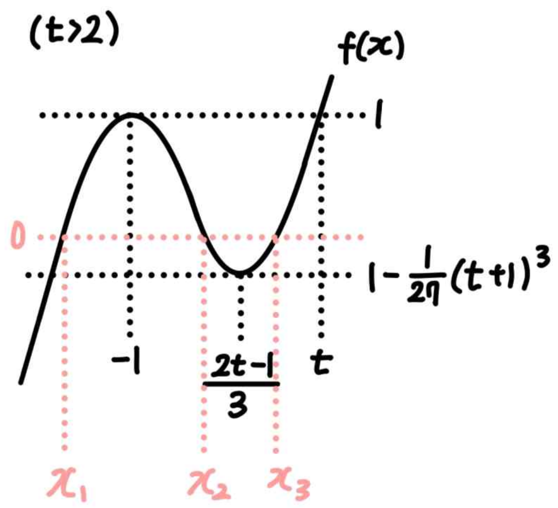
$t=2$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=-2$, $x=1$의 두 개이고, $f(x)=-2$의 실근은 1개, $f(x)=1$의 실근은 2개이므로 $g(2)=3$이다.

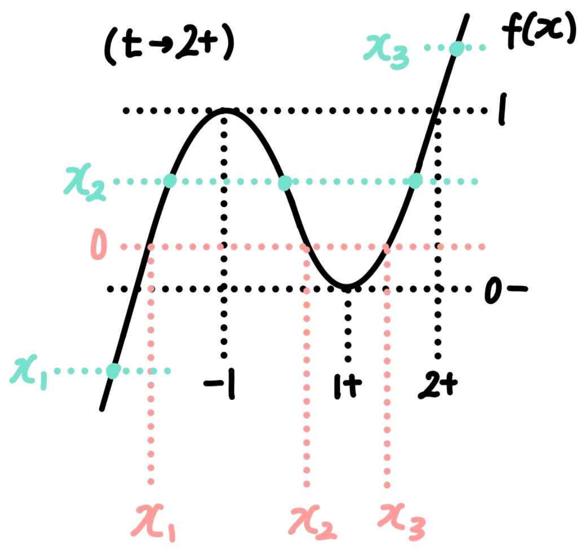


$t\to2+$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$, x_2, x_3의 3개이다.

(단, $t\to2+$일 때 $x_1<-1$, $0<x_2<\dfrac{2t-1}{3}<1$, $1<x_3<2$)

이때 $f(x)=x_1$의 서로 다른 실근은 1개, $f(x)=x_2$의 서로 다른 실근은 3개, $f(x)=x_3$의 서로 다른 실근은 1개이므로 $g(2+)=5$이다.





따라서 $g(2+)-g(2-)=g(2)+1=4$이므로, ㄴ은 참이다.

ㄷ.

$g(t)$의 값은 정수이고, $1\le g(t)\le 9$이다.

$t=\frac{1}{3}$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$의 1개이고, $f(x)=x_1$의 실근도 1개이므로 $g\left(\frac{1}{3}\right)=1$이다.

$t=\frac{2}{3}$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$의 1개이고, $f(x)=x_1$의 실근도 1개이므로 $g\left(\frac{2}{3}\right)=1$이다.

$t=1$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$의 1개이고, $f(x)=x_1$의 실근도 1개이므로 $g(1)=1$이다.

$t=\frac{4}{3}$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$의 1개이고, $f(x)=x_1$의 실근도 1개이므로 $g\left(\frac{4}{3}\right)=1$이다.

$t=\frac{5}{3}$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$의 1개이고, $f(x)=x_1$의 실근도 1개이므로 $g\left(\frac{5}{3}\right)=1$이다.

$t=2$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$, $x=x_2$의 2개이고, $f(x)=x_1$의 실근은 1개, $f(x)=x_2$의 실근은 1개 이므로 $g(2)=2$이다.

$t=\frac{7}{3}$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$의 3개이고, $g\left(\frac{7}{3}\right)<7$이다.

$t=\frac{8}{3}$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$의 3개이고, $g\left(\frac{8}{3}\right)<8$이다.

$t=3$일 때 $f(x)=0$의 실근은 $x=x_1$, $x=x_2$, $x=x_3$의 3개이고, $g(3)<9$이다.

따라서 $g(t)=3t$이도록 하는 실수 t는 $t=\frac{1}{3}$의 1개이므로,

ㄷ은 거짓이다.

여담:

$f(f(x))=0$의 해석방법 알아두기.

ㄷ에서 t의 값이 정수일 필요가 없다는 점 놓치지 말기!

15.

정답: ④

해설:

step1 a_4 구하기

$a_{m+2}<a_{m+1}<a_m$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 5이므로,

$a_7<a_6<a_5$이고, $a_5\geq a_4$이다.

또한 $a_{n+1}=\begin{cases} a_n+n & (a_n\leq 0, a_n=3) \\ a_n-n & (0<a_n<3, a_n>3) \end{cases}$ 이다.

$a_4=a$라 하면, $a_5\geq a_4$이므로 $a_5=a+4$이고 $a\leq 0$ 또는 $a=3$이다.

$a_5=a+4$일 때 $a_6<a_5$이므로 $a_6=a_5-5=a-1$이고, $0<a+4<3$ 또는 $a+4>3$이다.

$a_6=a-1$일 때 $a_7<a_6$이므로 $a_7=a_6-6=a-7$이고, $0<a-1<3$ 또는 $a-1>3$이다.

따라서 $a\leq 0$ 또는 $a=3$이고, $-4<a<-1$ 또는 $a>-1$이며, $1<a<4$ 또는 $a>4$를 모두 만족하는 a의 값은 $a=3$이다.

그러므로 $a_4=3$, $a_5=7$, $a_6=2$, $a_7=-4$이다.

step2 a_1 구하기

$a_4=3$일 때 $a_3=6$ 또는 $a_3=0$이다.

만약 $a_3=6$이라면 $a_2=8$이고, $a_1=9$인데, 이 경우 $a_{m+2}<a_{m+1}<a_m$을 만족시키는 자연수 m의 최솟값은 1이기 때문에 모순이다.

따라서 $a_3=0$이고, 이때 $a_2=2$ 또는 $a_2=-2$인데,

만약 $a_2=2$라면 가능한 a_1의 값이 존재하지 않으므로 $a_2=-2$이고, $a_1=-3$이다.

step3 a_{21} 구하기

$a_7=-4$이므로

$a_8=-4+7=3$, $a_9=3+8=11$, $a_{10}=11-9=2$, $a_{11}=2-10=-8$이고,

$a_{12}=-8+11=3$, $a_{13}=3+12=15$, $a_{14}=15-13=2$, $a_{15}=2-14=-12$이며,

$a_{16}=-12+15=3$, $a_{17}=3+16=19$, $a_{18}=19-17=2$,

$a_{19}=2-18=-16$이므로

$a_{20}=-16+19=3$이고 $a_{21}=3+20=23$이다.

따라서 $a_{21}-a_1=23-(-3)=26$이다.

여담:

1) $a_7<a_6<a_5$이고, $a_5 \geq a_4$이라는 점을 통해 a_4의 값을 구할 수 있다.

2) $a_{m+2}<a_{m+1}<a_m$을 만족하는 자연수 m의 최솟값이 5라는 점 놓치지 말기. ($m=1$일 때 $a_{m+2}<a_{m+1}<a_m$이면 안 된다.)

3) a_{21}을 구할 때, a_n의 주기성을 파악해서 구해도 된다.

자연수 k에 대하여 $\begin{cases} a_{4k-3}=4k-1 & (k \geq 2) \\ a_{4k-2}=2 & (k \geq 2) \\ a_{4k-1}=-4(k-1) & (k \geq 1) \\ a_{4k}=3 & (k \geq 1) \end{cases}$ 이다.

20.

정답: 20

해설:

step1

x에 대한 방정식 $2f(x)=g\left(\frac{x}{2}\right)$은, 양변을 f라는 함수에 대입한

$f(2f(x))=f\left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right)$와 의미가 같다. ($f$는 일대일 대응이므로)

$f\left(g\left(\frac{x}{2}\right)\right)=\frac{x}{2}$이므로, $2f(x)=h(x)$라 하면,

방정식 $2f(x)=g\left(\frac{x}{2}\right)$은 방정식 $h(h(x))=x$와 같다.

step2

$h(x)=2f(x)=\frac{1}{4}x^3+\frac{1}{4}x+2k$이다.

$h(x)$를 x에 대해 미분하면 $h'(x)=\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}>0$이므로 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 증가한다.

$h(x)=x$의 근을 $x=x_1$, x_2, $\cdots$라 하면,

$h(h(x))=x$의 근은 $h(x)=x_1$, x_2, $\cdots$의 근과 같고,

$h(x)$는 증가함수이므로 $h(h(x))=x$의 근의 개수는 $h(x)=x$의 근의 개수와 같다.

따라서 $h(x)=x$의 서로 다른 실근은 2개이다.

step3

$y=h(x)$와 $y=x$의 접점의 x좌표를 p라 하면, $h'(p)=1$이고 $h(p)=p$이다.

따라서 $h'(p)=\frac{3}{4}p^2+\frac{1}{4}=1$이므로 $p=-1$ 또는 $p=1$이고,

$h(p)=\frac{1}{4}p^3+\frac{1}{4}p+2k=p$이다.

이때 $p=-1$이면 $k=-\frac{1}{4}$이므로 k가 양수라는 조건을 만족하지 않는다.

그러므로 $p=1$이고, $k=\frac{1}{4}$이므로, $80k=20$이다.

여담:

주어진 방정식을 우리에게 익숙한 형태인 $h(h(x))=x$의 형태로 바꾸어서 해석하자.

$f(x)$가 일대일대응이므로 $h(x)$ 또한 일대일대응이고, 따라서 $h(h(x))=x$의 실근의 개수는 $h(x)=x$의 실근의 개수와 동일하다.

앞서 15회 14번에서도 $f(f(x))=x$의 해석을 다루었으니 이 회차를 통해 $h(h(x))=x$의 해석을 확실하게 알아가도록 하자.

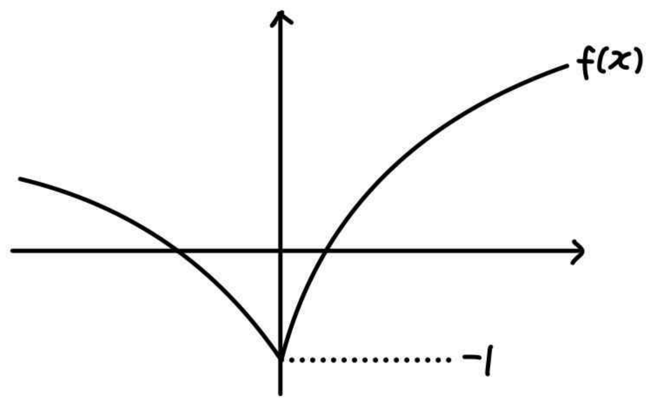
21.

정답: 27

해설:

step1

절댓값을 풀어보면 $f(x)=\begin{cases}\log_a\left(4x+\dfrac{1}{a}\right) & (x\geq 0)\\ \log_a\left(-2x+\dfrac{1}{a}\right) & (x<0)\end{cases}$ 이다.



$x\to-\infty$일 때 $f(x)\to\infty$, $x\to\infty$일 때 $f(x)\to\infty$이다.

step2

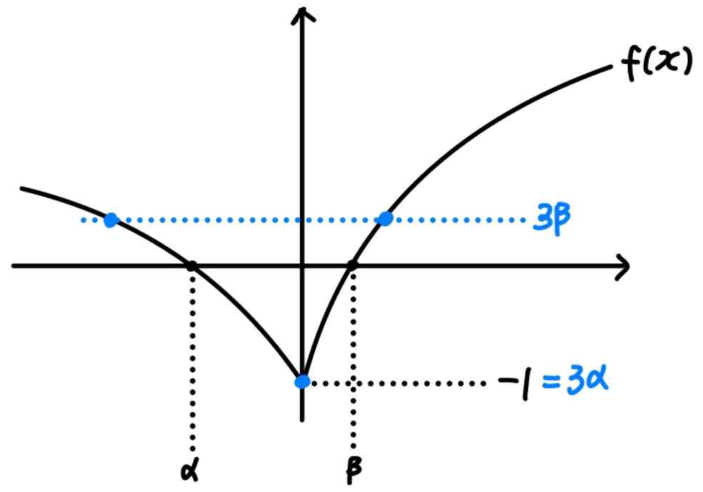
$f(x)=0$의 서로 다른 두 실근을 α, β라 하자. (단, $\alpha<0<\beta$)

$\dfrac{f(x)}{3}=\beta$의 실근은, $f(x)=3\beta$의 실근과 같으므로, $\dfrac{f(x)}{3}=\beta$의 실근의 개수는 2개이다.

따라서 $\dfrac{f(x)}{3}=\alpha$의 실근이 1개여야 하므로, $3\alpha=-1$,

즉 $\alpha=-\dfrac{1}{3}$이다.

또한 $f(\alpha)=0$이므로 $f(\alpha)=\log_a\left(\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{a}\right)=0$이고, $a=3$이다.



step3

$f\left(\frac{f(x)}{3}\right)=0$의 가장 큰 실근은, $f(x)=3\beta$의 가장 큰 실근과 같다.

1) β 구하기

$\log_3\left(4\beta+\frac{1}{3}\right)=0$이므로 $\beta=\frac{1}{6}$이다.

2) $f(x)=3\beta$의 가장 큰 실근 구하기

$\log_3\left(4x+\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{2}$의 실근이므로 $x=\frac{3\sqrt{3}-1}{12}$이다.

따라서 $m=27$이다.

여담:

$f\left(\frac{f(x)}{3}\right)=0$의 서로 다른 실근은, $f(x)=0$의 서로 다른 모든 실근을 α, β라 할 때, $\frac{f(x)}{3}=\alpha$, β의 서로 다른 모든 실근과 같다.

22.

정답: 257

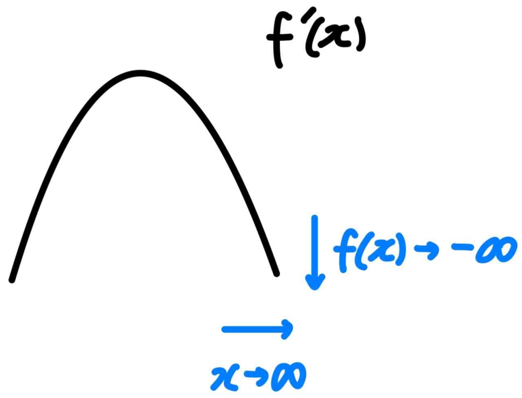
해설:

step1 $f'(x)$의 그래프 해석하기

만약 $f(x)$의 최고차항 계수가 음수라면,

$x\to\infty$일 때 $f'(x)\to-\infty$일 것이고,

이에 따라 $f'(k-1)\times f'(k)\times f'(k+1)<0$을 만족하는 양수 k의 개수는 무수히 많을 것이다.



따라서 $f(x)$의 최고차항 계수는 양수이다.

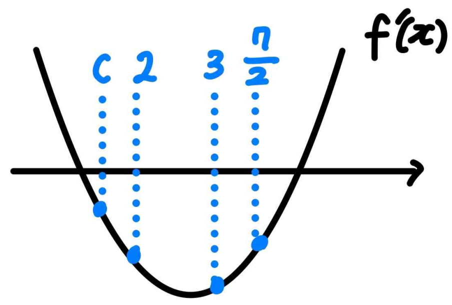
이때 $f'\left(\frac{7}{2}\right)<0$이므로 $f'(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 가진다.

또한 $\left[\frac{1}{2},2\right]$에서 평균값정리를 적용하면,

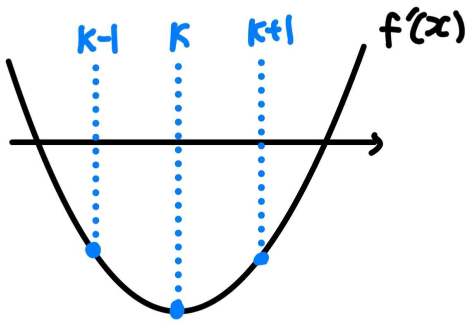
$f'(c)=\frac{2-3}{2-\frac{1}{2}}=-\frac{2}{3}<0$인 실수 c가 구간 $\left(\frac{1}{2},2\right)$에 존재하고,

$f'\left(\frac{7}{2}\right)<0$이므로,

최소 $x=2$와 $x=3$에서 $f'(x)<0$이다.



1) 만약 $f'(x)<0$을 만족하는 정수 x의 개수가 3개 이상이라면, $f'(k-1)\times f'(k)\times f'(k+1)<0$을 만족하는 정수 k가 존재하게 된다.



2) $f'(x)<0$을 만족하는 정수 x의 개수가 2개이고, $f'(\alpha)<0$, $f'(\alpha+1)<0$이라 하자.

이때 $f'(\alpha-2)>0$이고, $f'(\alpha-1)>0$ 또는 $f'(\alpha-1)=0$이다.

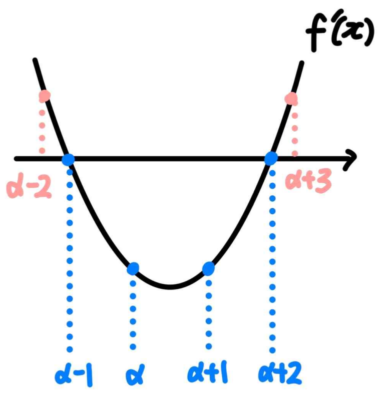
만약 $f'(\alpha-1)>0$이라면 $f'(\alpha-2)\times f'(\alpha-1)\times f'(\alpha)<0$이므로 $f'(k-1)\times f'(k)\times f'(k+1)<0$을 만족하는 정수 k가 존재하게 된다.

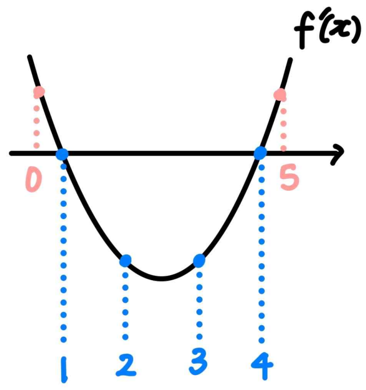
따라서 $f'(\alpha-1)=0$이다.

또한 $f'(\alpha+3)>0$이고, $f'(\alpha+2)>0$ 또는 $f'(\alpha+2)=0$이다.

만약 $f'(\alpha+2)>0$이라면
$f'(\alpha+1)\times f'(\alpha+2)\times f'(\alpha+3)<0$이므로
$f'(k-1)\times f'(k)\times f'(k+1)<0$을 만족하는 정수 k가 존재하게 된다.

따라서 $f'(\alpha+2)=0$이다.



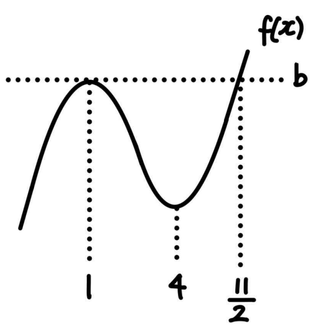


그러므로 $f'(1)=0$, $f'(2)<0$, $f'(3)<0$, $f'(4)=0$이다.

step2

$f'(x)=3a(x-1)(x-4)$라 하자. (단, $a>0$)

삼차함수 비율관계에 의해 $f(x)=a(x-1)^2\left(x-\frac{11}{2}\right)+b$이다.



이때 $f\left(\frac{1}{2}\right)=3$이므로 $a\times\left(\frac{1}{2}-1\right)^2\times\left(\frac{1}{2}-\frac{11}{2}\right)+b=3$이고,

정리하면 $-\frac{5}{4}a+b=3$이다.

또한 $f(2)=2$이므로 $a\times(2-1)^2\times\left(2-\frac{11}{2}\right)+b=2$이고, 정리하면

$-\frac{7}{2}a+b=2$이다.

따라서 $a=\frac{4}{9}$이고, $b=\frac{32}{9}$이므로

$f(x)=\frac{4}{9}(x-1)^2\left(x-\frac{11}{2}\right)+\frac{32}{9}$이고,

$f(7)=\frac{4}{9}\times(7-1)^2\times\left(7-\frac{11}{2}\right)+\frac{32}{9}=\frac{248}{9}$이다.

그러므로 $p=9$, $q=248$이므로 $p+q=257$이다.

여담:

평균값정리와 주어진 조건을 통해 $f'(x)<0$을 만족시키는 정수 x가 최소 2개 존재한다는 점을 파악한 다음, 주어진 조건을 만족하기 위한 $f'(x)$의 상황을 파악하자.

기출 다시보기: 2024학년도 6월 모의평가 22번

22. 정수 $a\,(a\neq 0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=x^3-2ax^2$$

이라 하자. 다음 조건을 만족시키는 모든 정수 k의 값의 곱이 -12가 되도록 하는 a에 대하여 $f'(10)$의 값을 구하시오. [4점]

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $$\left\{\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}\right\}\times\left\{\frac{f(x_2)-f(x_3)}{x_2-x_3}\right\}<0$$
>
> 을 만족시키는 세 실수 x_1, x_2, x_3이 열린구간 $\left(k,\, k+\frac{3}{2}\right)$에 존재한다.

정답: 380

기출 다시보기: 2024학년도 수능 22번

22. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> 함수 $f(x)$에 대하여
>
> $$f(k-1)\times f(k+1)<0$$
>
> 을 만족시키는 정수 k는 존재하지 않는다.

$f'\left(-\frac{1}{4}\right)=-\frac{1}{4}$, $f'\left(\frac{1}{4}\right)<0$일 때, $f(8)$의 값을 구하시오. [4점]

정답: 483

＊ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.