2024학년도 5월 고3 전국연합학력평가 문제지

수학 영역

KSM

제 2 교시

5지선다형

1. $4^{1-\sqrt{3}} \times 2^{1+2\sqrt{3}}$의 값은? [2점]

① 1　② 2　③ 4　[✓ ④ 8]　⑤ 16

2. $\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+4x} - x \right)$의 값은? [2점]

① 1　[✓ ② 2]　③ 3　④ 4　⑤ 5

$\text{lt} \frac{4x}{\sqrt{x^2+4x}+x} = \frac{4}{1+1} = 2$

3. 첫째항이 1인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 $a_5 - a_3 = 8$일 때, a_2의 값은? [3점]

① 3　② 4　[✓ ③ 5]　④ 6　⑤ 7

$2d = 8$

$d = 4$

$a_2 = 1 + 4 = 5$

4. 다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{h \to 0} \frac{f(1+2h)-4}{h} = 6$일 때, $f(1)+f'(1)$의 값은? [3점]

① 5　② 6　[✓ ③ 7]　④ 8　⑤ 9

$f(1) = 4$

$2f'(1) = 6, \ f'(1) = 3$

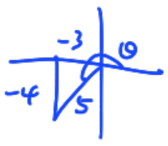
$4 + 3 = 7$

5. $\sin(-\theta)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)=\frac{8}{5}$이고 $\cos\theta<0$일 때, $\tan\theta$의 값은? [3점]

① $-\frac{5}{3}$ ② $-\frac{4}{3}$ ③ 0 [✓ ④ $\frac{4}{3}$] ⑤ $\frac{5}{3}$

$-\sin\theta-\sin\theta=\frac{8}{5}$

$\sin\theta=-\frac{4}{5}$
$\cos\theta<0$) 3사분면



$\tan\theta=\frac{4}{3}$

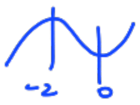
6. 함수 $f(x)=x^3+ax^2+3a$가 $x=-2$에서 극대일 때, 함수 $f(x)$의 극솟값은? (단, a는 상수이다.) [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 [✓ ⑤ 9]

$f'=3x^2+2ax$

$f'(-2)=12-4a=0,\ a=3$

$f'=3x^2+6x=3x(x+2)$



$f(0)=3a=9$

7. 다항함수 $f(x)$가 실수 전체의 집합에서 증가하고

$$f'(x)=\{3x-f(1)\}(x-1)$$

을 만족시킬 때, $f(2)$의 값은? [3점]

① 3 [✓ ② 4] ③ 5 ④ 6 ⑤ 7

$f(1)=a$

$f'(x)=3x^2-(a+3)x+a\geqq0$

$D=(a+3)^2-12a=(a-3)^2\leqq0 \quad \therefore a=3$

$f'=3x^2-6x+3$

$f=x^3-3x^2+3x+c$

$f(1)=a=3$

$1-3+3+c=3,\ c=2,\ f(2)=8-12+6+2=4$

8. 두 양수 a, b에 대하여 함수 $f(x)=a\cos bx$의 주기가 6π이고 닫힌구간 $[\pi, 4\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 1일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① $\frac{5}{3}$　② $\frac{11}{6}$　③ 2　④ $\frac{13}{6}$　[✓ ⑤ $\frac{7}{3}$]

$\frac{2\pi}{b}=6\pi,\ b=\frac{1}{3}$

大 : $f(\pi)=a\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}a=1,\ a=2$　$a+b=\frac{7}{3}$

9. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=1-4\times S_n$$

이고 $a_4=4$일 때, $a_1\times a_6$의 값은? [4점]

[✓ ① 5]　② 10　③ 15　④ 20　⑤ 25

$n=1 \rightarrow a_2=1-4a_1$

$a_{n+1}=1-4\times S_n$

$-\ a_n=1-4\times S_{n-1}\quad (n\geq2)$

$a_{n+1}-a_n=-4a_n$

$a_{n+1}=-3a_n\quad (n\geq2)$

$a_1=a$

$a_2=1-4a$

$a_3=-3+12a$

$a_4=9-36a=4,\ a=\frac{5}{36}$

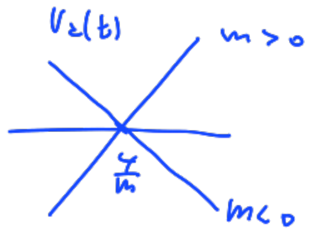
$a_6=9\times4=36$　$a_1\times a_6=\frac{5}{36}\times36=5$

10. 실수 m에 대하여 수직선 위를 움직이는 두 점 P, Q의 시각 $t\,(t\geq0)$에서의 속도를 각각

$$v_1(t)=3t^2+1,\quad v_2(t)=mt-4$$

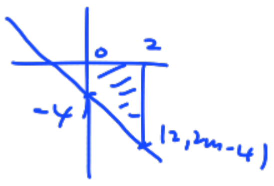
라 하자. 시각 $t=0$에서 $t=2$까지 두 점 P, Q가 움직인 거리가 같도록 하는 모든 m의 값의 합은? [4점]

① 3　② 4　③ 5　④ 6　[✓ ⑤ 7]



$\int_0^2(3t^2+1)dt=8+2=10$

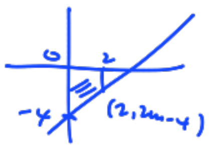
$m<0$



$\frac{1}{2}\cdot2\cdot(4+4-2m)=10$

$m=-1$

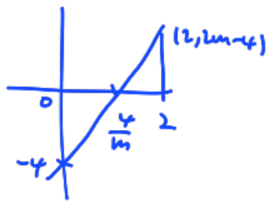
$0<m<2$



$m=-1$

(✗)

$m\geq2$



$\frac{1}{2}\left(\frac{4}{m}\right)\times4+\frac{1}{2}\left(2-\frac{4}{m}\right)\times(2m-4)$

$=\frac{8}{m}+\frac{2(m-2)^2}{m}=10$

$m^2-4m+4+4=5m$

$m^2-9m+8=0$

$m=1, 8\quad \therefore m=8$

$\therefore (-1)+8=7$

11. 공차가 정수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 $m(m \geq 3)$이 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $|a_1 - b_1| = 5$
> (나) $a_m = b_m$, $a_{m+1} < b_{m+1}$

$\sum_{k=1}^{m} a_k = 9$일 때, $\sum_{k=1}^{m} b_k$의 값은? [4점]

[✓ ①] -6 ② -5 ③ -4 ④ -3 ⑤ -2

a_m 공차 d $\quad a_{m+1} < b_{m+1}$

b_m 공차 D $\quad a_m + d < b_m + D$

$d < D$

$a_m - b_m = (a_1 - b_1) + (\overset{+}{m-1})(\overset{-}{d-D}) = 0$

$\therefore a_1 - b_1 > 0 \quad a_1 - b_1 = 5$

$(m-1)(D-d) = 5 \quad m \geq 3$

$m = 6,\ D - d = 1,\ a_6 = b_6$

$\sum_{k=1}^{6} b_k = \frac{6(b_1 + b_6)}{2} = \frac{6(a_1 - 5 + a_6)}{2}$

$= \frac{6(a_1 + a_6)}{2} - 15$

$= 9 - 15 = -6$

12. 최고차항의 계수가 1인 사차함수 $f(x)$에 대하여

곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = \frac{1}{2}x$가 원점 O에서 접하고

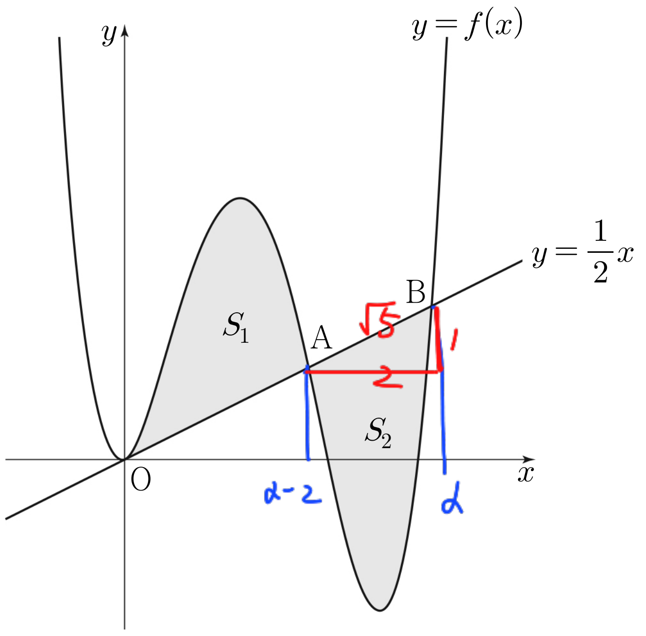
x좌표가 양수인 두 점 A, B$(\overline{\text{OA}} < \overline{\text{OB}})$에서 만난다.

곡선 $y = f(x)$와 선분 OA로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_1,

곡선 $y = f(x)$와 선분 AB로 둘러싸인 영역의 넓이를 S_2라 하자.

$\overline{\text{AB}} = \sqrt{5}$이고 $S_1 = S_2$일 때, $f(1)$의 값은? [4점]

① $\frac{9}{2}$ ② $\frac{11}{2}$ ③ $\frac{13}{2}$ ④ $\frac{15}{2}$ [✓ ⑤] $\frac{17}{2}$



$f(x) - \frac{1}{2}x = x^2(x - \alpha)(x - \alpha + 2)$

$\int_0^{\alpha} x^2(x-\alpha)(x-(\alpha-2))\,dx = 0$

$\int_0^{\alpha} x^4 - (2\alpha - 2)x^3 + (\alpha^2 - 2\alpha)x^2\,dx$

$= \frac{1}{5}\alpha^5 - \frac{\alpha - 1}{2}\alpha^4 + \frac{\alpha^2 - 2\alpha}{3}\alpha^3 = 0$

$\frac{1}{5}\alpha - \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{2} + \frac{1}{3}\alpha - \frac{2}{3} = 0$

$\frac{2}{60}\alpha = \frac{1}{6},\ \alpha = 5$

$f(x) = x^2(x-5)(x-3) + \frac{1}{2}x,\quad f(1) = 8 + \frac{1}{2} = \frac{17}{2}$

13. 두 상수 a, $b(b>0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

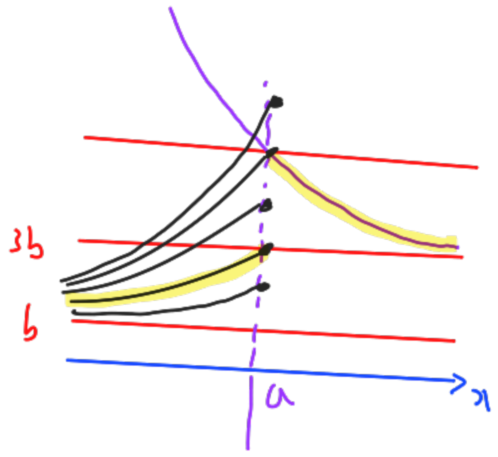
$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+3}+b & (x \leq a) \quad (0,\ b+8) \\ 2^{-x+5}+3b & (x > a) \quad (0,\ 3b+32) \end{cases}$$

라 하자. 다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값이 $4b+8$일 때, $a+b$의 값은? (단, $k>b$) [4점]

> $b<t<k$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이다.

[✓ ① 9] ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

$4b+8>3b$



$2^{-a+5}+3b=4b+8$

$$\begin{cases} 4b+8=2^{-a+5}+3b \\ 2^{a+3}+b=3b \end{cases}$$

$b+8=2^{-a+5}$

$\times$ $2b=2^{a+3}$

$b^2+8b=128$ $(b+16)(b-8)=0$

$b=8 \rightarrow a=1$

$a+b=9$

14. 최고차항의 계수가 1인 삼차함수 $f(x)$와 실수 t에 대하여 곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선의 y절편을 $g(t)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(t)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> $|f(k)|+|g(k)|=0$을 만족시키는 실수 k의 개수는 2이다.

$4f(1)+2g(1)=-1$일 때, $f(4)$의 값은? [4점]

① 46 [✓ ② 49] ③ 52 ④ 55 ⑤ 58

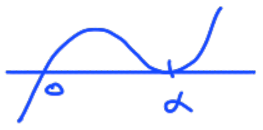
$y=f'(t)(x-t)+f(t)$

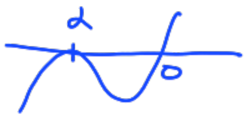
$g(t)=-tf'(t)+f(t)$

$|f(k)|+|g(k)|=0 \Rightarrow f(k)=g(k)=0$

$f(k)=-kf'(k)+f(k)=0$

$\therefore f(k)=0$ & $k=0$ or $f'(k)=0$





$f(x)=x(x-\alpha)^2$

$f'(x)=(x-\alpha)^2+2x(x-\alpha)$

$f(1)=(1-\alpha)^2$

$f'(1)=(1-\alpha)^2+2(1-\alpha)$

$g(1)=-f'(1)+f(1)=-2(1-\alpha)$

$4f(1)+2g(1)$

$=4(1-\alpha)^2-4(1-\alpha)=-1$

$4t^2-4t+1=0$

$t=\frac{1}{2}=1-\alpha,\ \alpha=\frac{1}{2}$

$f(x)=x(x-\frac{1}{2})^2,\ f(4)=49$

15. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{3} & (a_n\text{이 3의 배수인 경우})\\[2mm] \dfrac{a_n{}^2+5}{3} & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_4+a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은? [4점]

① 63 ② 66 ③ 69 [✓ ④ 72] ⑤ 75

a_n	a_{n+1}
$3k$	k
$3k+1$	$3k^2+2k+2$
$3k+2$	$3k^2+4k+3$

$\Rightarrow$ 모든 항이 자연수

a_1 : 자연수

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
54 7	18	6	2	3
9 2	3	1		

$54+7+9+2=72$

a_4	a_5
~~1~~	~~4~~
2	3
~~3~~	~~2~~
~~4~~	~~1~~

단답형

16. 방정식

$$\log_2(x-3)=1-\log_2(x-4)$$

를 만족시키는 실수 x의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{5}$

$x>4$

$\log_2(x-3)+\log_2(x-4)=1$

$(x-3)(x-4)=2$

$x^2-7x+10=0$

$x=2, 5$

$x=5\ (\because x>4)$

17. 함수 $f(x)=(x-1)(x^3+x^2+5)$에 대하여 $f'(1)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{7}$

$f'(1)=1+1+5=7$

18. 최고차항의 계수가 3인 이차함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$\int_0^x f(t)dt = 2x^3 + \int_0^{-x} f(t)dt$$

를 만족시킨다. $f(1)=5$일 때, $f(2)$의 값을 구하시오. [3점]

$\boxed{16}$

$\int_0^x + \int_{-x}^0 = 2x^3$

$\int_{-x}^x f = 2x^3$

$f(x) + f(-x) = 6x^2$

$f(x) = 3x^2 + ax + b$

$+ \ f(-x) = 3x^2 - ax + b$

$6x^2 = 6x^2 + 2b, \quad b = 0$

$f(1) = 3 + a = 5, \ a = 2$

$f(2) = 12 + 4 = 16$

19. 집합 $U = \{x \mid -5 \leq x \leq 5,\ x$는 정수$\}$의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 두 집합 A, B를

$A = \{a \mid a$는 x의 실수인 네제곱근, $x \in X\}$,
$B = \{b \mid b$는 x의 실수인 세제곱근, $x \in X\}$

라 하자. $n(A)=9$, $n(B)=7$이 되도록 하는 집합 X의 모든 원소의 합의 최댓값을 구하시오. [3점]

$\boxed{11}$

$a^4 = x \qquad n(A) = 9 \Rightarrow a$: 양수 4개 & 0

$b^3 = x \qquad$ 합의 최대 $\Rightarrow 5, 4, 3, 2, 0$

$-5 \quad -4 \quad -3 \quad -2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad 5$

$n(B) = 7 \Rightarrow$ 2개 더 추가 $\Rightarrow -1, -2$
(남은 수 중 큰 수)

$\therefore \ -2 - 1 + 0 + 2 + 3 + 4 + 5 = 11$

20. 두 다항함수 $f(x)$, $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여

$$xf(x) = \left(-\frac{1}{2}x + 3\right)g(x) - x^3 + 2x^2$$

을 만족시킨다. 상수 $k\,(k \neq 0)$에 대하여

$$\lim_{x \to 2} \frac{g(x-1)}{f(x) - g(x)} \times \lim_{x \to \infty} \frac{\{f(x)\}^2}{g(x)} = k$$

일 때, k의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{25}$

$x = 0 \to 0 = 3g(0), \quad g(0) = 0$

$x = 2 \to 2f(2) = 2g(2) \qquad \therefore f(2) = g(2) = 0$

$\lim_{x \to 2}(f(x) - g(x)) = 0 \to \lim_{x \to 2}(g(x-1)) = g(1) = 0$

$x = 1 \to f(1) = \frac{5}{2}g(1) + 1 = 1$

f 차수 $\quad g$ 차수 $\quad \longleftarrow \ \frac{f^2}{g} = k \ \to \ 2n = m$
$n \qquad\quad m$

$n = 1, \ m = 2$, g 최고차항 계수 -2

$f = a(x-1) + 1 \qquad g = -2x(x-1) = -2x^2 + 2x$

$f(2) = a + 1 \qquad g(2) = -4$

$a + 1 = -4, \quad a = -5 \qquad f(x) = -5x + 6$

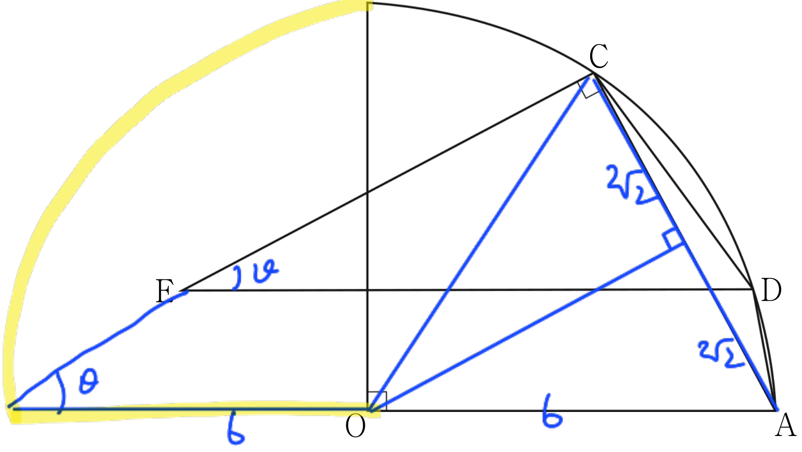
$\therefore \lim_{x \to 2} \frac{-2(x-1)(x-2)}{2x^2 - 7x + 6} \times \left(-\frac{25}{2}\right)$

$= \ (-2) \times \left(-\frac{25}{2}\right) = 25 = k$

수학 영역

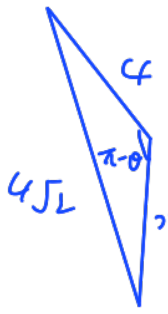
21. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB 위에 점 C를 $\overline{\text{AC}}=4\sqrt{2}$가 되도록 잡는다. 호 AC 위의 한 점 D에 대하여 점 D를 지나고 선분 OA에 평행한 직선과 점 C를 지나고 선분 AC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 CED의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$일 때, $\overline{\text{AD}}=p+q\sqrt{7}$을 만족시키는 두 유리수 p, q에 대하여 $9\times|p\times q|$의 값을 구하시오. (단, 점 D는 점 A도 아니고 점 C도 아니다.) [4점]

$\boxed{64}$



$\sin\theta=\frac{4\sqrt{2}}{12}=\frac{\sqrt{2}}{3}$, $\frac{\overline{CD}}{\sin\theta}=6\sqrt{2}$, $\overline{CD}=4$

$\cos\theta=\frac{\sqrt{7}}{3}$



$32=x^2+16-8x\cdot(-\frac{\sqrt{7}}{3})$

$3x^2+8\sqrt{7}x-48=0$

$x=\frac{-4\sqrt{7}\pm\sqrt{256}}{3}=\frac{-4\sqrt{7}\pm16}{3}$

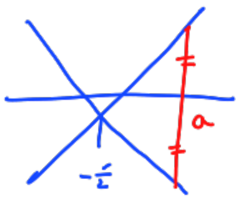
$\frac{16}{3}-\frac{4\sqrt{7}}{3}$ $9\times|\frac{16}{3}\times(-\frac{4}{3})|$

$=64$

22. 최고차항의 계수가 4이고 서로 다른 세 극값을 갖는 사차함수 $f(x)$와 두 함수 $g(x)$,

$$h(x)=\begin{cases}4x+2 & (x<a)\\ -2x-3 & (x\geq a)\end{cases}$$

가 있다. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.



$4a+2-2a-3=0$

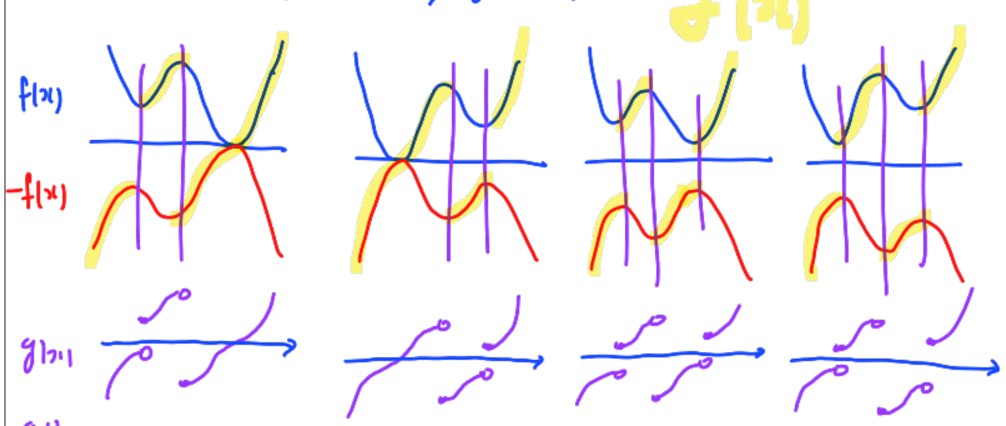
$\underline{a=\frac{1}{2}}$

> (가) 모든 실수 x에 대하여
>
> $$\underset{\geq 0}{|g(x)|=f(x)},\ \lim_{t\to0+}\frac{g(x+t)-g(x)}{t}=\underset{\geq 0}{|f'(x)|}$$
>
> 이다.
>
> (나) 함수 $g(x)h(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이다.

$g(0)=\frac{40}{3}$일 때, $g(1)\times h(3)$의 값을 구하시오. (단, a는 상수이다.) $\boxed{114}$

[4점]

$f(x)\geq0$, $g'(x^+)\geq0$, $g=\pm f$



g불연속	2개	2개	3개	3개
	(○)	(○)	(✗)	(✗)

g(x)h(x) 연속

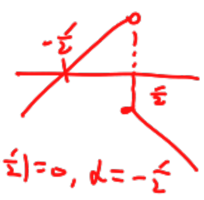
⇒ g불연속 2개까지 가능 g가 α, β에서 불연속

h(α)=h(β)=0 동시만족 불가능

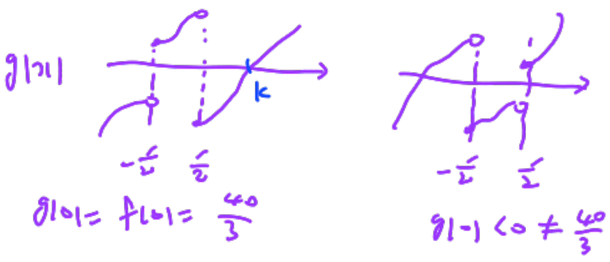
∴ h(α)=0, $g(\beta^+)h(\beta^+)=g(\beta^-)h(\beta^-)=g(\beta)h(\beta)$

$|g(\beta^+)|=|g(\beta^-)|$이므로 $|h(\beta^-)|=|h(\beta^+)|$ ∴ $\beta=\frac{1}{2}$

y=h(x)



$h(-\frac{1}{2})=0$, $\alpha=-\frac{1}{2}$



$g(0)=f(0)=\frac{40}{3}$

$g(-1)<0\neq\frac{40}{3}$

(✗)

$f'(x)=16(x+\frac{1}{2})(x-\frac{1}{2})(x-k)$

$=16x^3-16kx^2-4x+4k$

$f(x)=4x^4-\frac{16}{3}kx^3-2x^2+4kx+\frac{40}{3}$

$f(k)=4k^4-\frac{16}{3}k^4-2k^2+4k^2+\frac{40}{3}=0$

$-\frac{4}{3}k^4+2k^2+\frac{40}{3}=0$

$2k^4-3k^2-20=0$

$2k^2$ $+5$ $k^2=4$

k^2 -4 $k=2$

$f(x)=4x^4-\frac{32}{3}x^3-2x^2+8x+\frac{40}{3}$

$g(1)=-f(1)=-\frac{38}{3}$

$h(3)=-9$

∴ $(-\frac{38}{3})(-9)=\underline{114}$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.

○ 이어서, 「선택과목(확률과 통계)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2024학년도 5월 고3 전국연합학력평가 문제지

수학 영역(확률과 통계)

제 2 교시

5지선다형

23. 두 사건 A, B에 대하여

$$\mathrm{P}(A\cup B)=\frac{2}{3},\quad \mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=4\times \underbrace{\mathrm{P}(A\cap B)}_{p}$$

일 때, $\mathrm{P}(A\cap B)$의 값은? [2점]

① $\frac{5}{9}$　② $\frac{4}{9}$　③ $\frac{1}{3}$　[✓ ④ $\frac{2}{9}$]　⑤ $\frac{1}{9}$

$\frac{2}{3}=4p-p$, $p=\frac{2}{9}$

24. 다항식 $(ax^2+1)^6$의 전개식에서 x^4의 계수가 30일 때, 양수 a의 값은? [3점]

① 1　[✓ ② $\sqrt{2}$]　③ $\sqrt{3}$　④ 2　⑤ $\sqrt{5}$

${}_6C_2\ a^2x^4$

$15a^2=30$

$a=\sqrt{2}$

25. $4 \le x \le y \le z \le w \le 12$를 만족시키는 짝수 $x,\ y,\ z,\ w$의 모든 순서쌍 $(x,\ y,\ z,\ w)$의 개수는? [3점]

[✓ ①] 70　② 74　③ 78　④ 82　⑤ 86

$_5H_4 = {}_8C_4 = 70$

26. 두 집합 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $Y = \{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f : X \rightarrow Y$의 개수는? [3점]

> (가) $f(1) + f(2) = 4$
> (나) 1은 함수 f의 치역의 원소이다.

① 145　② 150　③ 155　④ 160　[✓ ⑤] 165

$f(1)$　$f(2)$

1　3　$\rightarrow 4^3 = 64$

3　1　$\rightarrow 4^3 = 64$

2　2　$\rightarrow 4^3 - 3^3 = 37$

165

27. 다음 조건을 만족시키는 10 이하의 자연수 a, b, c, d의 모든 순서쌍 (a, b, c, d)의 개수는? [3점]

> (가) $a \times b \times c \times d = 108$ $= 2^2 \times 3^3$
> (나) a, b, c, d 중 서로 같은 수가 있다.

① 32 ② 36 [✓ ③ 40] ④ 44 ⑤ 48

$2 \quad 2 \quad 3^2 \quad 3^1 \rightarrow 12$

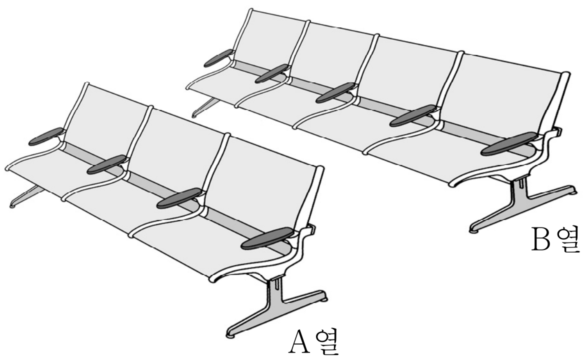
$2\cdot2 \quad 3 \quad 3 \quad 3 \rightarrow 4$

$2\cdot3 \quad 2\cdot3 \quad 3 \quad 1 \rightarrow 12$

$2\cdot3 \quad 3 \quad 3 \quad 2 \rightarrow 12$

28. 그림과 같이 A열에 3개, B열에 4개로 구성된 총 7개의 좌석이 있다. 1학년 학생 2명, 2학년 학생 2명, 3학년 학생 3명 모두가 이 7개의 좌석 중 임의로 1개씩 선택하여 앉을 때, 다음 조건을 만족시키도록 앉을 확률은? (단, 한 좌석에는 한 명의 학생만 앉는다.) [4점]

> (가) A열의 좌석에는 서로 다른 두 학년의 학생들이 앉되, 같은 학년의 학생끼리는 이웃하여 앉는다.
> (나) B열의 좌석에는 같은 학년의 학생끼리 이웃하지 않도록 앉는다.



① $\frac{2}{15}$ [✓ ② $\frac{16}{105}$] ③ $\frac{6}{35}$ ④ $\frac{4}{21}$ ⑤ $\frac{22}{105}$

전체 7!

1 1
2 2
3 3 3

A B

~~112 2333~~

113 2233 $(_3C_1 \times 4) \times 8 = 96$

~~221 1333~~

223 1133 $(_3C_1 \times 4) \times 8 = 96$

B에 3이 이웃 (x)

331 1223 $(_3C_2 \times _2C_1 \times 4) \times (2 \times _3P_2) = 288$

332 1123 $(_3C_2 \times _2C_1 \times 4) \times (2 \times _3P_2) = 288$

768

$\frac{768}{7!} = \frac{8 \cdot 96}{7 \cdot 6 \cdot 120} = \frac{16}{7 \cdot 15} = \frac{16}{105}$

$2_1 \, 2_3 \, 2$

수학 영역(확률과 통계)

단답형

29. 다음 조건을 만족시키는 자연수 a, b, c, d, e의 모든 순서쌍 (a, b, c, d, e)의 개수를 구하시오. [4점] $\boxed{75}$

(가) $a+b+c+d+e=11$
(나) $a+b$는 짝수이다.
(다) a, b, c, d, e 중에서 짝수의 개수는 2 이상이다.

$a+b$ $c+d+e(\geq 3)$

짝 홀

2 (1+1) 9 (2 2 5 3 / 2 4 3 6 / 2 6 1 6 / 4 4 1 3) ↗ 18 → 1×18 = 18

4 7

6 5

8 (2+6 / 4+4 / 6+2) 3 (1+1+1) 모두 홀 → 3×1 = 3

$a+b=4$

(1 3 / 3 1 → c.d.e는 짝짝홀 2 2 3 / 2 4 1) 9개, 2×9=18

2 2 → $1\times {}_3H_4 = 15$

18+15=33

$a+b=6$

1 5 / 3 3 / 5 1) → c,d,e는 짝,짝,홀 2 2 1 3개 , 3×3=9

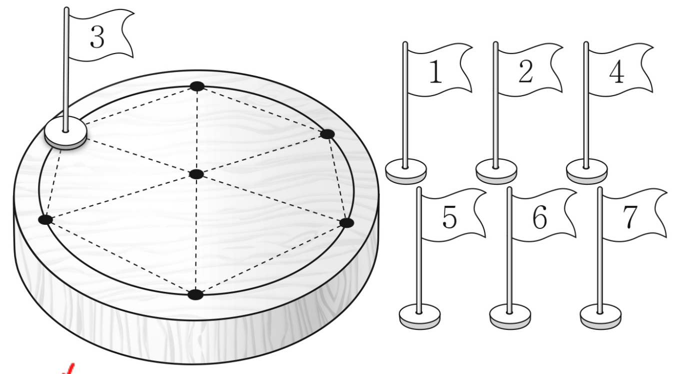
2 4 / 4 2) → $2\times {}_3H_2 = 12$

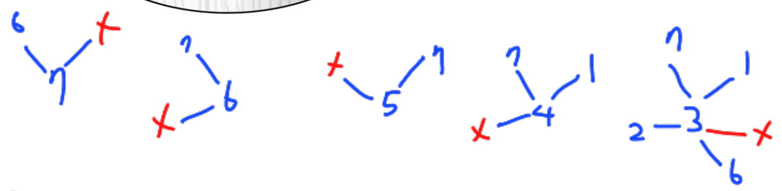
9+12=21

∴ 18+3+33+21 = 75

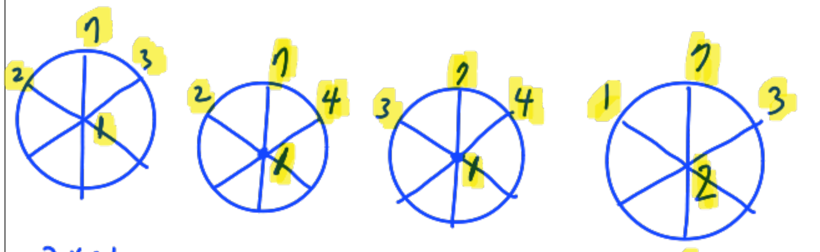
30. 그림과 같이 원판에 반지름의 길이가 1인 원이 그려져 있고, 원의 둘레를 6등분하는 6개의 점과 원의 중심이 표시되어 있다. 이 7개의 점에 1부터 7까지의 숫자가 하나씩 적힌 깃발 7개를 각각 한 개씩 놓으려고 할 때, 다음 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하시오. (단, 회전하여 일치하는 것은 같은 것으로 본다.) [4점] $\boxed{40}$

깃발이 놓여 있는 7개의 점 중 3개의 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형이 한 변의 길이가 1인 정삼각형일 때, 세 꼭짓점에 놓여 있는 깃발에 적힌 세 수의 합은 12 이하이다.





원의 중심 1 or 2



2×3! 2×3! 2×3! 2×2

12 12 12 4

12+12+12+4 = 40

※ 확인 사항

- ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- ○ 이어서, 「선택과목(미적분)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2024학년도 5월 고3 전국연합학력평가 문제지

수학 영역(미적분)

제 2 교시

5지선다형

23. 함수 $f(x) = \sin 2x$에 대하여 $f''\left(\frac{\pi}{4}\right)$의 값은? [2점]

[✓ ① -4]　② -2　③ 0　④ 2　⑤ 4

$f' = 2\cos 2x$

$f'' = -4\sin 2x$

$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -4$

24. 첫째항이 1이고 공차가 $d\,(d > 0)$인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{a_n} - \frac{n+1}{a_{n+1}}\right) = \frac{2}{3}$$

일 때, d의 값은? [3점]

① 1　② 2　[✓ ③ 3]　④ 4　⑤ 5

$a_n = dn \sim$

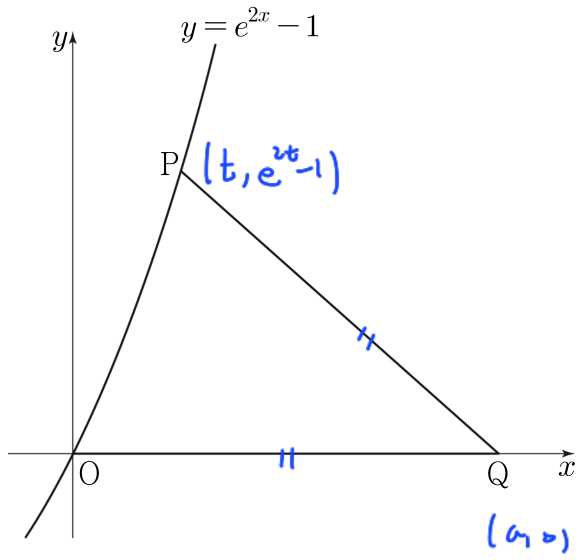
$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{a_1} - \frac{n+1}{a_{n+1}}\right)$

$= 1 - \frac{1}{d} = \frac{2}{3}$, $d = 3$

수학 영역(미적분)

25. 곡선 $y=e^{2x}-1$ 위의 점 $\mathrm{P}(t,\ e^{2t}-1)\,(t>0)$에 대하여 $\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{OQ}}$를 만족시키는 x축 위의 점 Q의 x좌표를 $f(t)$라 할 때, $\lim\limits_{t\to0+}\dfrac{f(t)}{t}$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]

① 1　② $\dfrac{3}{2}$　③ 2　[✓ ④ $\dfrac{5}{2}$]　⑤ 3



$$a^2=(a-t)^2+(e^{2t}-1)^2$$

$$0=-2at+t^2+(e^{2t}-1)^2$$

$$a=\frac{t^2+(e^{2t}-1)^2}{2t}=f(t)$$

$$\lim_{t\to0+}\frac{t^2+(e^{2t}-1)^2}{2t^2}=\frac{1}{2}(1+2^2)=\frac{5}{2}$$

26. 열린구간 $(0,\ \infty)$에서 정의된 함수

$$f(x)=\lim_{n\to\infty}\frac{x^{n+1}+\left(\dfrac{4}{x}\right)^n}{x^n+\left(\dfrac{4}{x}\right)^{n+1}}$$

이 있다. $x>0$일 때, 방정식 $f(x)=2x-3$의 모든 실근의 합은? [3점]

① $\dfrac{41}{7}$　② $\dfrac{43}{7}$　③ $\dfrac{45}{7}$　[✓ ④ $\dfrac{47}{7}$]　⑤ 7

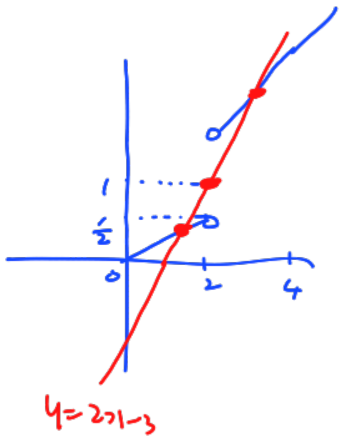
$x>0,\ x>\frac{4}{x}\rightarrow x>2$

$f(x)$

$x>2\ \rightarrow\ x$

$x=2\ \rightarrow\ 1$

$0<x<2\ \rightarrow\ \frac{x}{4}$



$x=\frac{12}{7},\ 2,\ 3\ \rightarrow\ \frac{47}{7}$

27. 함수 $f(x)=x^3+x+1$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 매개변수 t로 나타내어진 곡선

$$x=g(t)+t,\quad y=g(t)-t$$

에서 $t=3$일 때, $\frac{dy}{dx}$의 값은? [3점]

① $-\frac{1}{5}$ ② $-\frac{3}{10}$ ③ $-\frac{2}{5}$ ④ $-\frac{1}{2}$ [✓ ⑤ $-\frac{3}{5}$]

$\frac{dy}{dx}=\frac{g'(t)-1}{g'(t)+1}$

$g(3)=\alpha$

$f(\alpha)=\alpha^3+\alpha+1=3,\ \alpha=1$

$g(3)=1,\ f'(x)=3x^2+1$

$g'(3)=\frac{1}{f'(1)}=\frac{1}{4}$

$\therefore\ \frac{g'(3)-1}{g'(3)+1}=\frac{\frac{1}{4}-1}{\frac{1}{4}+1}=\frac{-3}{5}$

28. 두 상수 $a(a>0)$, b에 대하여 두 함수 $f(x)$, $g(x)$를

$$f(x)=a\sin x-\cos x,\quad g(x)=e^{2x-b}-1$$

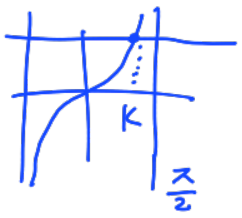
이라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $\tan b$의 값은? [4점]

> (가) $f(k)=g(k)=0$을 만족시키는 실수 k가 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에 존재한다.
>
> (나) 열린구간 $\left(-\frac{\pi}{2},\ \frac{\pi}{2}\right)$에서 방정식 $\{f(x)g(x)\}'=2f(x)$의 $\underline{\text{모든 해}}$의 합은 $\frac{\pi}{4}$이다.

① $\frac{5}{2}$ [✓ ② 3] ③ $\frac{7}{2}$ ④ 4 ⑤ $\frac{9}{2}$

(가) $a\sin k-\cos k=e^{2k-b}-1=0$, $k=\frac{b}{2}$

$a\sin k=\cos k$, $\tan k=\frac{1}{a}$



$\tan\frac{b}{2}=\frac{1}{a}$

(나) $f'g+fg'=2f$

$f(g'-2)+f'g=0$

$f(2e^{2x-b}-2)+f'(e^{2x-b}-1)=0$

$(e^{2x-b}-1)(2f+f')=0$

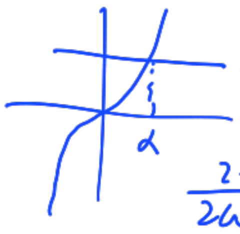
$f=a\sin x-\cos x$

$f'=a\cos x+\sin x$

$x=\frac{b}{2}$ or $2f+f'=0$

$(2a+1)\sin x+(a-2)\cos x=0$

$\tan x=\frac{2-a}{2a+1}$ $\xi;\ x=\alpha$



$\frac{2-a}{2a+1}=\frac{1}{a}$

$-a^2=1\ (\times)$

$\therefore\ \alpha\neq\frac{b}{2}$

$\frac{b}{2}+\alpha=\frac{\pi}{4}$

$\tan\frac{b}{2}=\frac{1}{a}$

$\tan\alpha=\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{b}{2}\right)=\frac{1-\frac{1}{a}}{1+\frac{1}{a}}=\frac{a-1}{a+1}=\frac{2-a}{2a+1}$

$2a^2-a-1=-a^2+a+2$

$3a^2-2a-3=0,\ a=\frac{1\pm\sqrt{10}}{3}$

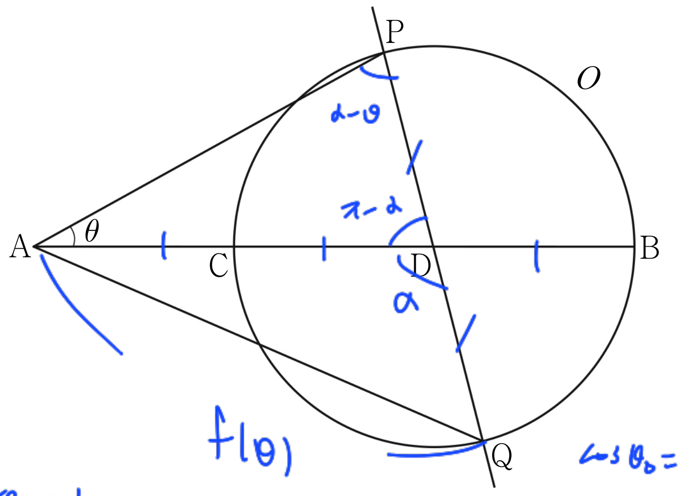
$a>0\rightarrow a=\frac{1+\sqrt{10}}{3}$

$\tan b=\frac{\frac{2}{a}}{1-\frac{1}{a^2}}=\frac{2a}{a^2-1}=\frac{6a}{3a^2-3}=\frac{6a}{2a}=3$

단답형

29. 그림과 같이 길이가 3인 선분 AB를 삼등분하는 점 중 A와 가까운 점을 C, B와 가까운 점을 D라 하고, 선분 BC를 지름으로 하는 원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P를 $\angle \mathrm{BAP} = \theta \left(0 < \theta < \frac{\pi}{6}\right)$가 되도록 잡고, 두 점 P, D를 지나는 직선이 원 O와 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. 선분 AQ의 길이를 $f(\theta)$라 할 때, $\cos\theta_0 = \frac{7}{8}$인 θ_0에 대하여 $f'(\theta_0) = k$이다. k^2의 값을 구하시오. (단, $\angle \mathrm{APD} < \frac{\pi}{2}$이고 $0 < \theta_0 < \frac{\pi}{6}$이다.) [4점]

$\boxed{40}$



$\cos\theta_0 = \frac{7}{8}$

$\sin\theta_0 = \frac{\sqrt{15}}{8}$

$\angle ADQ = \alpha$

$\triangle APD \Rightarrow \frac{1}{\sin\theta} = \frac{2}{\sin(\alpha-\theta)}$, $\sin(\alpha-\theta) = 2\sin\theta$

$\Rightarrow \cos(\alpha-\theta)\left(\frac{d\alpha}{d\theta}-1\right) = 2\cos\theta$

$\theta=\theta_0 \Rightarrow \sin(\alpha-\theta_0) = 2\sin\theta_0 = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\cos(\alpha-\theta_0) = \frac{1}{4}$

$\frac{1}{4}\left(\frac{d\alpha}{d\theta_0}-1\right) = \frac{7}{4}$, $\frac{d\alpha}{d\theta_0} = 8$

$\cos((\alpha-\theta_0)+\theta_0) = \frac{1}{4}\cdot\frac{7}{8} - \frac{\sqrt{15}}{4}\cdot\frac{\sqrt{15}}{8} = -\frac{1}{4} = \cos\alpha$

$\theta=\theta_0 \Rightarrow \sin\alpha = \frac{\sqrt{15}}{4}$

$\triangle ADQ \Rightarrow (f(\theta))^2 = 4+1-2\cdot2\cdot1\cos\alpha = 5-4\cos\alpha$

$\Rightarrow 2f(\theta)f'(\theta) = 4\sin\alpha\frac{d\alpha}{d\theta}$

$\theta=\theta_0 \Rightarrow (f(\theta_0))^2 = 5+1 = 6$, $f(\theta_0) = \sqrt{6}$

$2\sqrt{6}f'(\theta_0) = 4\cdot\frac{\sqrt{15}}{4}\cdot8 = 8\sqrt{15}$

$\therefore f'(\theta_0) = 2\sqrt{10} = k$, $k^2 = 40$

30. 수열 $\{a_n\}$은 공비가 0이 아닌 등비수열이고, 수열 $\{b_n\}$을 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \begin{cases} a_n & (|a_n| < \alpha) \\ -\frac{5}{a_n} & (|a_n| \geq \alpha) \end{cases} \quad (\alpha\text{는 양의 상수})$$

라 할 때, 두 수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 p가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = 4$ $\frac{a}{1-r} = 4$, $|r|<1$, $r \neq 0$
>
> (나) $\sum_{n=1}^{m} \frac{a_n}{b_n}$의 값이 최소가 되도록 하는 자연수 m은 p이고,
>
> $\sum_{n=1}^{p} b_n = 51$, $\sum_{n=p+1}^{\infty} b_n = \frac{1}{64}$이다.

$32 \times (a_3 + p)$의 값을 구하시오. [4점] $\boxed{138}$

$$\frac{a_n}{b_n} = \begin{cases} 1 & (|a_n| < \alpha) \\ -\frac{a_n^2}{5} & (|a_n| \geq \alpha) \end{cases}$$

α

$|a_p| \geq \alpha$, $|a_{p+1}| < \alpha$

$\sum_{n=p+1}^{\infty} b_n = \sum_{n=p+1}^{\infty} a_n = \frac{ar^p}{1-r} = 4r^p = \frac{1}{64}$

$r^p = \frac{1}{256}$

$\sum_{n=1}^{p} b_n = -5\sum_1^p \frac{1}{a_n} = -5\left(\frac{\frac{1}{a}\left(\left(\frac{1}{r}\right)^p-1\right)}{\frac{1}{r}-1}\right) = \left(\frac{-5}{a}\right)\left(\frac{r}{1-r}\right)\times255 = 51$

$\frac{-5r}{a(1-r)} = \frac{1}{5}$, $a(1-r) = -25r$

$a = 4(1-r) \rightarrow 4(1-r)^2 = -25r$

$4r^2+17r+4=0$

$\begin{matrix} 4 & +1 \\ 1 & +4 \end{matrix}$ $r = -\frac{1}{4}$, $a=5$

$\left(-\frac{1}{4}\right)^p = \frac{1}{256}$, $p=4$, $a_3 = ar^2 = \frac{5}{16}$

$\therefore 32\times\left(\frac{5}{16}+4\right) = 10+128 = 138$

※ 확인 사항

- ○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.
- ○ 이어서, 「선택과목(기하)」 문제가 제시되오니, 자신이 선택한 과목인지 확인하시오.

2024학년도 5월 고3 전국연합학력평가 문제지

수학 영역(기하)

제 2 교시

5지선다형

23. 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{36}=1$의 한 점근선이 $y=2x$일 때, 양수 a의 값은? [2점]

① 1　　② 2　　[✓ ③ 3]　　④ 4　　⑤ 5

$\frac{6}{a}=2$

24. 방향이 같은 두 벡터 $\vec{a}$, $\vec{b}$에 대하여 $|\vec{a}|=3$, $|\vec{a}-2\vec{b}|=6$일 때, 벡터 $\vec{b}$의 크기는? [3점]

① 3　　② $\frac{7}{2}$　　③ 4　　[✓ ④ $\frac{9}{2}$]　　⑤ 5

$\vec{b}=k\vec{a}$ $(k>0)$

$|\vec{a}|\,|1-2k|=6$

$|1-2k|=2$　　$k=\frac{3}{2}$　　$\frac{3}{2}|\vec{a}|=\frac{9}{2}$

25. 한 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)\,(c>0)$인 타원 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서의 접선의 기울기와 직선 PF의 기울기의 곱이 1일 때, $x_1{}^2+y_1{}^2$의 값은? (단, $x_1 \neq c$) [3점]

[✓ ① $\frac{11}{9}$]　② $\frac{4}{3}$　③ $\frac{13}{9}$　④ $\frac{14}{9}$　⑤ $\frac{5}{3}$

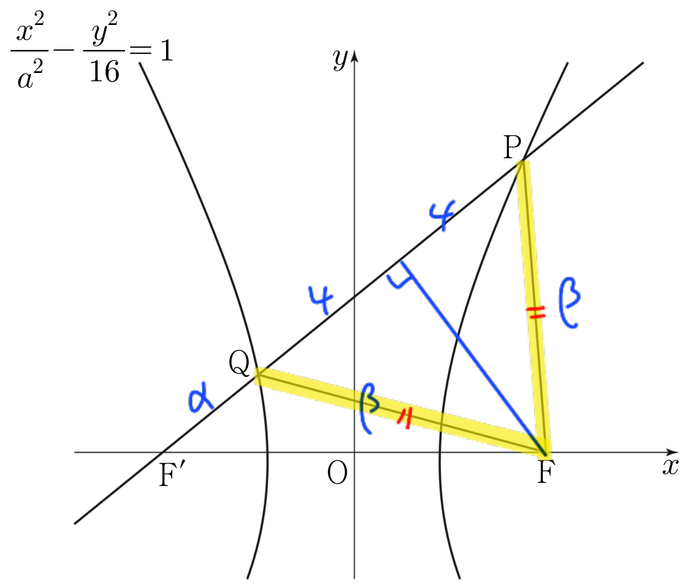
$P(x_1, y_1)$, $\frac{x_1 x}{2} + y_1 y = 1$　기울기 $= -\frac{x_1}{2y_1}$,　$c^2 = 2-1 = 1$
$c = 1$

$\left(-\frac{x_1}{2y_1}\right) \times \left(\frac{y_1}{x_1-1}\right) = \frac{-x_1}{2(x_1-1)} = 1$

$x_1 = \frac{2}{3}$, $x_1{}^2 = \frac{4}{9}$

$\frac{\frac{4}{9}}{2} + y_1{}^2 = 1$, $y_1{}^2 = \frac{7}{9}$　) $\frac{11}{9}$

26. 그림과 같이 두 초점이 $\mathrm{F}(c,\ 0)$, $\mathrm{F}'(-c,\ 0)\,(c>0)$인 쌍곡선 $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{16}=1$ 위의 점 중 제1사분면에 있는 점을 P라 하고, 이 쌍곡선과 직선 PF′이 만나는 점 중 P가 아닌 점을 Q라 하자. $\overline{\mathrm{PF}}=\overline{\mathrm{QF}}$이고 $\overline{\mathrm{PQ}}=8$일 때, 선분 FF′의 길이는? (단, $a>0$) [3점]



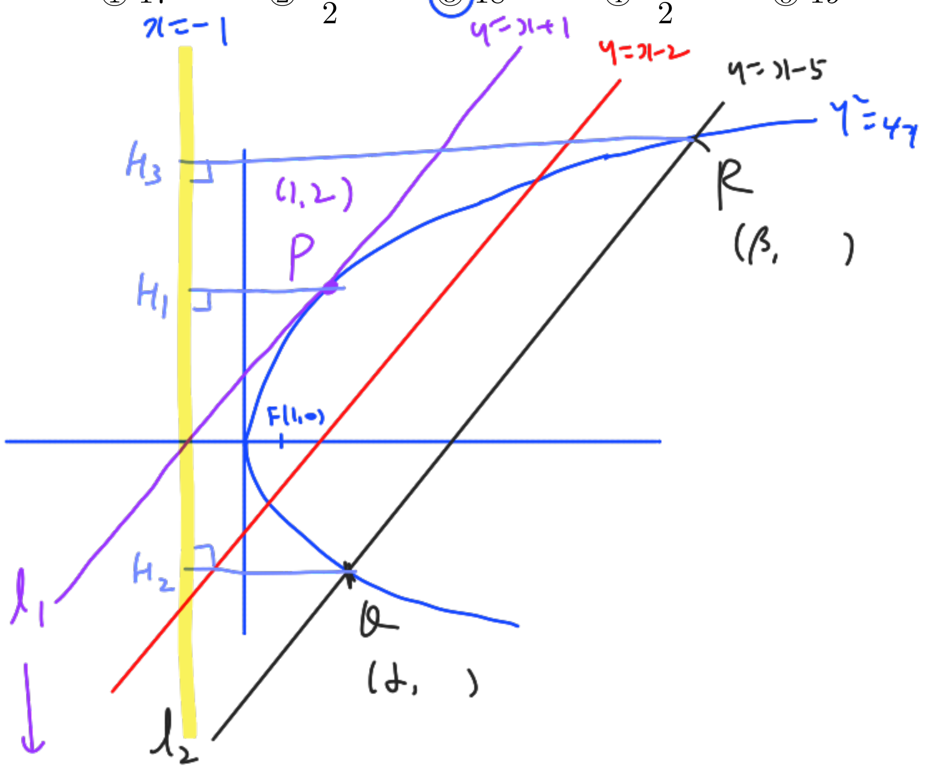
① 8　[✓ ② $4\sqrt{5}$]　③ $4\sqrt{6}$　④ $4\sqrt{7}$　⑤ $8\sqrt{2}$

$(\alpha+8)-\beta = 2a$
$+\ \underline{\beta - \alpha = 2a}$
$8 = 4a$, $a = 2$　$c^2 = 4+16 = 20$
$c = 2\sqrt{5}$　$\overline{FF'} = 4\sqrt{5}$

27. 점 F를 초점으로 하는 포물선 $y^2=4x$가 있다. 다음 조건을 만족시키는 포물선 $y^2=4x$ 위의 서로 다른 세 점 P, Q, R에 대하여 $\overline{\mathrm{PF}}+\overline{\mathrm{QF}}+\overline{\mathrm{RF}}$의 값은? [3점]

> 점 P와 직선 $y=x-2$ 사이의 거리를 k라 할 때, 이 직선으로부터의 거리가 k가 되도록 하는 포물선 $y^2=4x$ 위의 점 중 P가 아닌 점은 Q, R뿐이다.

① 17 ② $\frac{35}{2}$ [✓ ③ 18] ④ $\frac{37}{2}$ ⑤ 19



기울기 1 ⇒ $y=x+\frac{1}{1}=x+1$ P(1,2)

$\therefore l_2 : y=x-5$

$\begin{cases} y^2=4x \\ y=x-5 \end{cases}$ $x^2-14x+25=0$, $\alpha+\beta=14$

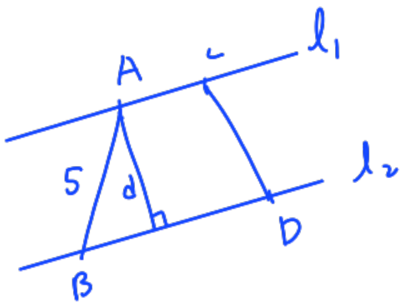
$\overline{PF}+\overline{QF}+\overline{RF}$

$=\overline{PH_1}+\overline{QH_2}+\overline{RH_3}$

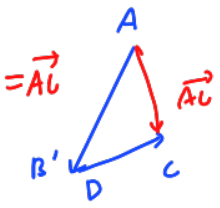
$=(1+1)+(\alpha+1)+(\beta+1)=18$

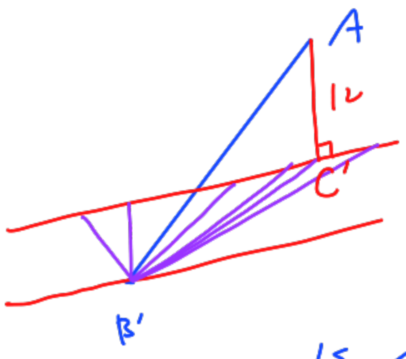
28. 서로 평행한 두 직선 l_1, l_2가 있다. 직선 l_1 위의 점 A에 대하여 점 A와 직선 l_2 사이의 거리는 d이다. 직선 l_2 위의 점 B에 대하여 $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=5$이고, 직선 l_1 위의 점 C, 직선 l_2 위의 점 D에 대하여 $|4\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$의 최솟값은 12이다. $|4\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$의 값이 최소일 때의 벡터 $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$의 크기를 k라 할 때, $d\times k$의 값은? (단, d는 $d\leq 5$인 상수이다.) [4점]

① $16\sqrt{7}$ ② $32\sqrt{2}$ ③ 48
[✓ ④ $16\sqrt{10}$] ⑤ $16\sqrt{11}$

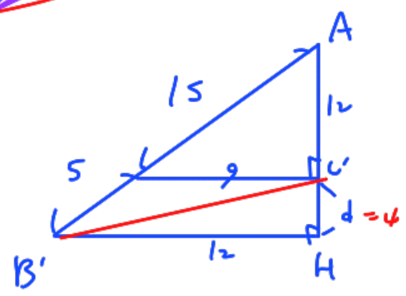


$4\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AC}$
〃
$\overrightarrow{AB'}$





$|\overrightarrow{AC}|$최소 → $|\overrightarrow{AC'}|=12$



$15:12=5:d$, $d=4$

$BH=12$

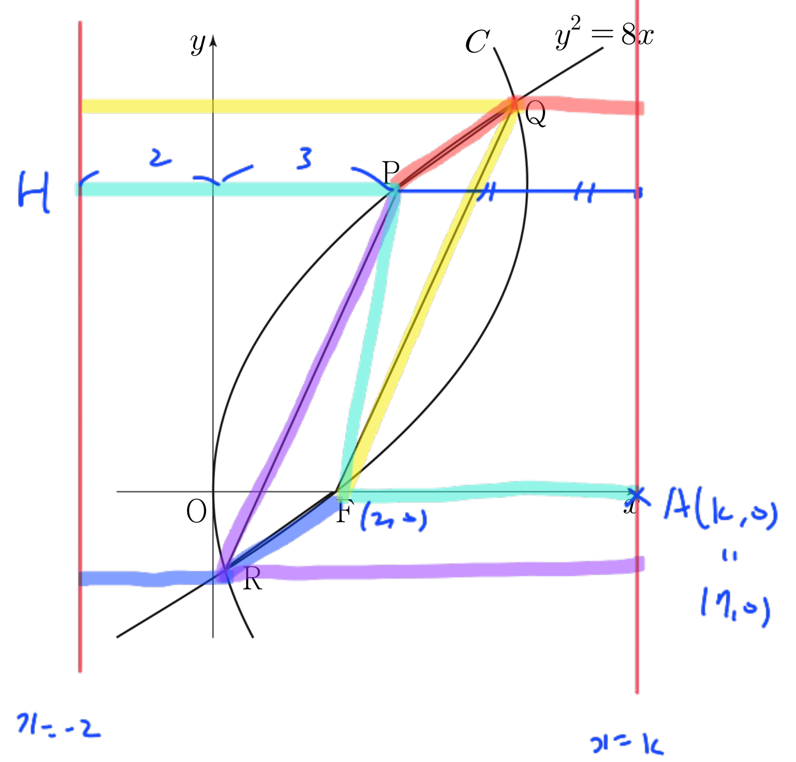
$k=|\overrightarrow{B'C'}|=\sqrt{144+16}=4\sqrt{10}$

$\therefore 4\times4\sqrt{10}=16\sqrt{10}$

단답형

29. 그림과 같이 초점이 F인 포물선 $y^2=8x$와 이 포물선 위의 제1사분면에 있는 점 P가 있다. 점 P를 초점으로 하고 준선이 $x=k$인 포물선 중 점 F를 지나는 포물선을 C라 하자. 포물선 $y^2=8x$와 포물선 C가 만나는 두 점을 Q, R이라 할 때, 사각형 PRFQ의 둘레의 길이는 18이다. 삼각형 OFP의 넓이를 S라 할 때, S^2의 값을 구하시오. (단, k는 점 P의 x좌표보다 크고, O는 원점이다.) [4점]

$\boxed{24}$



$18=2(k+2)$, $k=7$

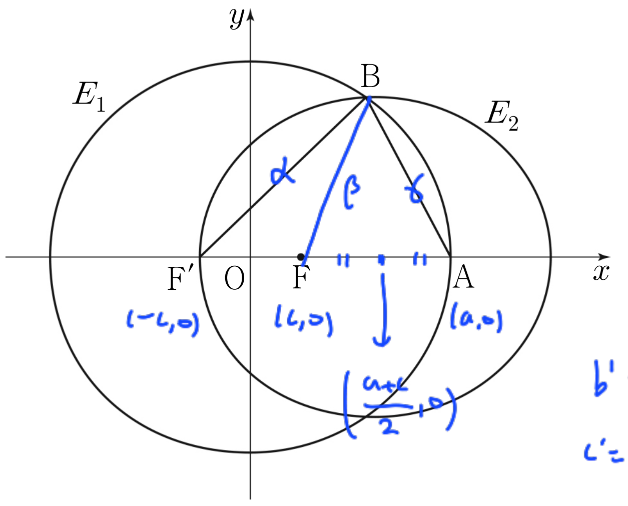
$\therefore \overline{AF}=5=\overline{PF}=\overline{PH}$

$\therefore P(3, 2\sqrt{6})$

$S=\frac{1}{2}\times 2\times 2\sqrt{6}=2\sqrt{6}$, $S^2=24$

30. 그림과 같이 두 초점이 F$(c, 0)$, F$'(-c, 0)$$(c>0)$인 타원 E_1이 있다. 타원 E_1의 꼭짓점 중 x좌표가 양수인 점을 A라 하고, 두 점 A, F를 초점으로 하고 점 F$'$을 지나는 타원을 E_2라 하자. 두 타원 E_1, E_2의 교점 중 y좌표가 양수인 점 B에 대하여 $\overline{\mathrm{BF'}}-\overline{\mathrm{BA}}=\frac{1}{5}\overline{\mathrm{AF'}}$이 성립한다. 타원 E_2의 단축의 길이가 $4\sqrt{3}$일 때, $30\times c^2$의 값을 구하시오. [4점]

$\boxed{36}$



$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$

$\frac{x^2}{a'^2}+\frac{y^2}{b'^2}=1$

$b'=2\sqrt{3}$

$c'=\frac{a-c}{2}$, $a'=\frac{a+3c}{2}$

$\alpha+\beta=2a$

$-\ \beta+\gamma=2a'$

$\alpha-\gamma=2a-2a'=\frac{1}{5}\overline{AF'}=\frac{1}{5}(a+c)$

$2a-a-3c=\frac{1}{5}(a+c)$

$5a-15c=a+c$, $a=4c$

$c'=\frac{3}{2}c$

$a'=\frac{7}{2}c$

$\frac{9}{4}c^2=\frac{49}{4}c^2-12$, $c^2=\frac{6}{5}$

$30\times\frac{6}{5}=36$

※ 확인 사항

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.