두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$의 x^3의 계수를 각각 a, b라 할 때 $a-b$의 값은?

1994학년도 수능1차 05

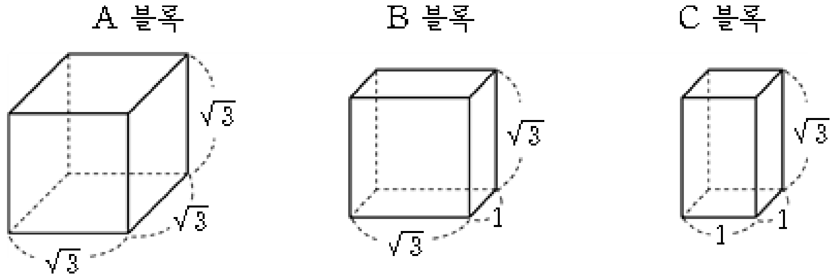
정답 : 0

두 다항식 A, B에 대하여 A^3-B^3은 $A-B$로 나누어떨어짐을 이용하자.

즉 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3-(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$은 x^4을 인수로 가지므로 삼차항의 계수가 0이다.

$\therefore a-b=0$

각 모서리의 길이가 그림과 같은 직육면체 모양의 A, B, C 세 종류의 블록이 있다.



A 블록 1개, B 블록 5개, C 블록 6개를 모두 사용하여 하나의 직육면체를 만들려고 한다.

다음 중 이 직육면체의 모서리의 길이가 될 수 있는 것은?

① 2 ② 3 ③ $2\sqrt{3}$ ④ $\sqrt{3}+1$ ⑤ $\sqrt{3}+2$

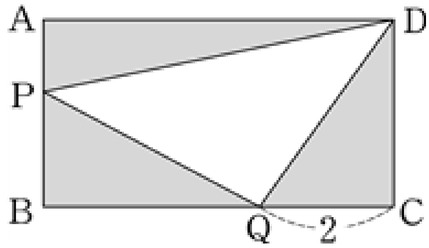
2003년 6월 가나21

정답 : ⑤

세 블록 A, B, C의 높이가 $\sqrt{3}$으로 동일하므로 밑면의 가로 길이와 세로 길이만 고려하자.

$\sqrt{3}=x$라 할 때 $x^2+5x+6=(x+2)(x+3)=(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+3)$에서 $\sqrt{3}+2$는 직육면체의 모서리가 될 수 있다.

직사각형 ABCD의 변 AB, BC 위에 각각 점 P, Q를 잡아 $\triangle APD$, $\triangle PBQ$, $\triangle QCD$의 넓이가 같게 하였다. $\overline{QC}=2$일 때, 선분 BQ의 길이는?



2003년 9월 가19

정답 : $1+\sqrt{5}$

① 세 삼각형 $\triangle$APD, $\triangle$PBQ, $\triangle$QCD의 넓이가 동일함과 ② $\overline{\mathrm{QC}}=2$에서 조건 ①에 주목하자.

조건 ①을 만족하는 여섯 점 A, B, C, D, P, Q에 대하여 두 변의 길이의 비 $\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PA}}$가 일정하도록 두 점 P, A를 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{BA}}$ 위에서 이동한 이후 선분 $\overline{\mathrm{AD}}$가 선분 $\overline{\mathrm{BC}}$와 평행하며 선분 $\overline{\mathrm{AD}}$와 선분 $\overline{\mathrm{DC}}$가 수직이 되도록 점 D의 위치를 찾으면 이때의 여섯 점 A, B, C, D, P, Q 또한 조건 ①을 만족한다. … ㉠

위와 동일하게 조건 ①을 만족하는 여섯 점 A, B, C, D, P, Q에 대하여 두 변의 길이의 비 $\overline{\mathrm{BQ}}:\overline{\mathrm{QC}}$가 일정하도록 두 점 Q, C를 반직선 $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ 위에서 이동한 이후 선분 $\overline{\mathrm{AD}}$가 선분 $\overline{\mathrm{BC}}$와 평행하며 선분 $\overline{\mathrm{AD}}$와 선분 $\overline{\mathrm{DC}}$가 수직이 되도록 점 D의 위치를 찾으면 이때의 여섯 점 A, B, C, D, P, Q 또한 조건 ①을 만족한다. … ㉡

한편 ㉠에서 $\overline{\mathrm{BQ}}$와 $\overline{\mathrm{QC}}$의 길이는 변화하지 않지만 ㉡에서 $\overline{\mathrm{BQ}}$와 $\overline{\mathrm{QC}}$의 길이는 변화한다.

즉 ㉠에서 두 변의 길이의 비 $\overline{\mathrm{BP}}:\overline{\mathrm{PA}}$가 일정하다면 두 변의 길이 $\overline{\mathrm{AP}}$, $\overline{\mathrm{PB}}$의 값은 조건 ①에 영향을 주지 않는다. 따라서 조건 ②를 이용하기 위해 $\overline{\mathrm{BQ}}=x$라 하자.

$\triangle$APD, $\triangle$PBQ, $\triangle$QCD의 넓이를 S라 할 때 $\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{PB}}=\overline{\mathrm{CD}}$에서 $\dfrac{2S}{x+2}+\dfrac{2S}{x}=\dfrac{2S}{2}$ $(S,\ x>0)$이고

$\dfrac{1}{x+2}+\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{2}$에서 $2x+(2x+4)=x^2+2x$, $x^2-2x-4=0$이며 $x>0$이므로 $x=1+\sqrt{5}$이다.

따라서 선분 BQ의 길이는 $1+\sqrt{5}$이다.

다음 식의 분모를 0으로 만들지 않는 모든 실수 x에 대하여

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)\ \cdots\ (x-10)}=\frac{a_1}{x-1}+\frac{a_2}{x-2}+\ \cdots\ +\frac{a_{10}}{x-10}$$

이 성립할 때, $a_1+a_2+\ \cdots\ +a_{10}$의 값은?

1995학년도 수능 가나08

정답 : 0

주어진 식의 양변에 $(x-1)(x-2)\ \cdots\ (x-10)$을 곱하였을 때 좌변의 9차항의 계수는 0이며

우변의 9차항의 계수는 $a_1+a_2+\ \cdots\ +a_{10}$이므로 $a_1+a_2+\ \cdots\ +a_{10}=0$이다.

좌표평면에서 중심이 $(a,\ b)$이고 x축에 접하는 원이 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 5)$와 $\mathrm{B}(8,\ 1)$을 지난다.

이때, 원의 중심 $(a,\ b)$와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \le a \le 8$)

2003학년도 수능 가나21

정답 : $\sqrt{5}$

선분 AB의 중점을 M(4, 3)이라 할 때 원의 중심 $(a,\ b)$와 직선 AB 사이의 거리는 선분 AM의 길이와 같다. 한편 직선 AB의 기울기가 $-\frac{1}{2}$이므로 직선 AM의 기울기는 2이다.

이때 $a=4+d$라 하면 $b=3+2d$이며 원이 x축에 접하므로 반지름의 길이 또한 $b=3+2d$이다.

점 $(a,\ b)$와 점 A 사이의 거리가 반지름의 길이와 동일하므로 $\sqrt{(4+d)^2+(2d-2)^2}=3+2d$이다.

이때 $(4+d)^2+(2d-2)^2=(3+2d)^2$에서 $d^2-12d+11=(d-1)(d-11)=0$인데 $d=11$인 경우 $a>8$에서 $d=1$이므로 선분 AM의 길이는 $\sqrt{d^2+(2d)^2}=\sqrt{5}$이다.

a, b, c가 양의 실수일 때, 다음 연립부등식 $\begin{cases} ax^2 - bx + c < 0 \\ cx^2 - bx + a < 0 \end{cases}$의 해가 존재하기 위한 필요충분조건은?

① $a+c < \dfrac{b}{2}$ ② $a+c < b$ ③ $a+c < 2b$ ④ $a+c < 1$ ⑤ $a+c < 2$

1994학년도 수능2차 16

정답 : ②

$ax^2 - bx + c = 0$의 두 근을 $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$라고 하면 $cx^2 - bx + a = 0$의 두 근은 $\frac{1}{\alpha},\ \frac{1}{\beta}\ \left(\frac{1}{\beta} < \frac{1}{\alpha}\right)$

이다.

따라서 두 열린구간 $(\alpha,\ \beta)$와 $\left(\frac{1}{\beta},\ \frac{1}{\alpha}\right)$의 교집합이 공집합이 아닐 때 주어진 조건을 만족한다.

즉 $0 < \alpha < 1 < \beta$인 경우 주어진 조건을 만족하므로 $f(1) < 0$에서 $a + c < b$이다.

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 30\}$의 부분집합 중에는 어떤 두 원소의 곱도 6의 배수가 아닌 수들로만 이루어진 것이 있다. 예를 들면, $\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 20\}$, $\{3,\ 5,\ 9,\ 15\}$이다. 이와 같은 부분집합 중에서 원소의 개수가 최대인 집합을 M이라고 할 때, 집합 M의 원소의 개수를 구하시오.

2003년 6월 나29

정답 : 20

집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 30\}$의 부분집합 중 2의 배수인 수들로만 원소로 가지는 집합을 A,

3의 배수인 수들로만 원소로 가지는 집합을 B라 하면 $n(A)>n(B)$이므로 $M=U-B$이다.

$\therefore n(M)=n(U)-n(B)=20$

전체집합 $U=\{x|x$는 7이하의 자연수$\}$의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 $B\subset A$이고

$A\cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이다. $A-B=\{5\}$, $B-C=\{2\}$, $C-A=\{4,\ 6\}$일 때,

집합 $A\cap\left(B^C\cup C\right)$는?

2016년 4월 나19

정답 : $\{1,\ 3,\ 5\}$

$A\cap(B^C\cup C)=A\cap(B\cap C^C)^C=A-(B-C)=\{(A\cup C)-(C-A)\}-(B-C)=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}-\{2\}$이다.

따라서 집합 $A\cap(B^C\cup C)$는 $\{1,\ 3,\ 5\}$이다.

* 본 풀이에서는 주어진 조건 중 $B\subset A$와 $A-B=\{5\}$를 사용하지 않았다.

전체집합 U의 두 부분집합 A, B가 $A^C \cap B^C = \{1\}$, $B^C = \{1,\ 5,\ 7\}$을 만족시킬 때, 집합 $A-B$의 모든 원소의 합을 구하시오.

2017년 10월 나24

정답 : 12

$B^C-(A^C\cap B^C)=B^C\cap(A^C\cap B^C)^C=B^C\cap(A\cup B)=B^C\cap A=A-B$이므로 $A-B=\{5,\ 7\}$이다.

따라서 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은 12이다.

실수 x에 대한 두 조건 $p:(x-1)^2 \le 0,\ q:2x^2-(3k+7)x+2=0$에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 모든 정수 k의 값의 합은?

2018년 10월 나17

정답 : -6

조건 q의 진리집합의 원소가 1뿐이거나 조건 q의 진리집합이 공집합인 경우 주어진 조건을 만족한다.

조건 q의 진리집합의 원소가 1뿐일 때, 즉 $x=1$일 때 $2x^2-(3k+7)x+2=2(x-1)^2$에서 $k=-1$이다.

조건 q의 진리집합이 공집합인 경우 $2x^2-(3k+7)x+2$의 판별식의 값이 음수이다.

즉 $(3k+7)^2-16<0$에서 $|3k+7|<4$, $-\dfrac{11}{3}<k<-1$이므로 가능한 모든 정수 k는 -3, -2, -1뿐이다. 따라서 가능한 모든 정수 k의 값의 합은 -6이다.

삼차함수 $P(x)$에 대하여 $P(1)=\frac{3}{2}$, $P(2)=\frac{4}{3}$, $P(3)=\frac{5}{4}$, $P(4)=\frac{6}{5}$일 때, $P(5)$의 값은?

2003학년도 경찰대 15

정답 : $\frac{17}{15}$

$x=1,\ 2,\ 3,\ 4$에서 $P(x)=\frac{x+2}{x+1}$이다.

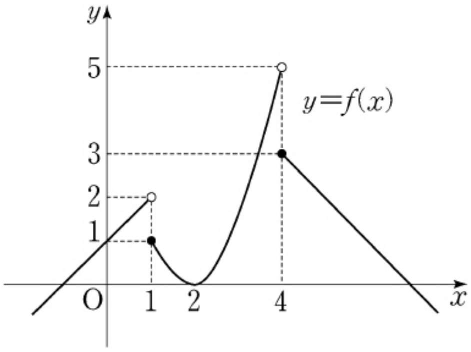
즉 사차함수 $(x+1)P(x)-(x+2)$는 $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$를 인수로 가진다.

다시 말해 $P(x)$의 최고차항의 계수를 a라 하면 $(x+1)P(x)=a(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+(x+2)$

이다.

양변에 $x=-1$을 대입하여 정리하였을 때 $a=-\frac{1}{120}$이므로 $P(5)$의 값은 $\frac{17}{15}$이다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프가 그림과 같다.



$\lim_{t\to\infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right)+\lim_{t\to-\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right)$의 값은?

2010년 6월 가07

정답 : 5

$\lim_{t \to \infty} f\left(\frac{t-1}{t+1}\right) = \lim_{a \to 1-} f(a) = 2$이고 $\lim_{t \to -\infty} f\left(\frac{4t-1}{t+1}\right) = \lim_{b \to 4+} f(b) = 3$이므로 $2+3=5$이다.

함수 $f(x)=\begin{cases} \dfrac{2}{x-2} & (x \neq 2) \\ 1 & (x=2) \end{cases}$와 이차함수 $g(x)$가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(가) $g(0)=8$
(나) 함수 $f(x)g(x)$는 모든 실수에서 연속이다.

이때 $g(6)$의 값을 구하시오.

2013년 7월 나28

정답 : 32

$f(2)g(2)=\lim_{x\to2}f(x)g(x)=\lim_{x\to2}\frac{2g(x)}{x-2}$이므로 극한값 $\lim_{x\to2}\frac{2g(x)}{x-2}$이 존재하므로 $g(2)=0$이다.

이때 $f(2)g(2)=0=\lim_{x\to2}\frac{2g(x)}{x-2}=2g'(2)$에서 $g'(2)=0$이다.

따라서 $g(x)$의 최고차항의 계수를 a라 할 때 $g(x)=a(x-2)^2$이므로 조건 (가)에서 $a=2$이다.

$\therefore g(6)=32$

최고차항의 계수가 1인 이차함수 $f(x)$에 대하여 함수 $g(x)=\begin{cases} f(x) & (x \le 1) \\ \dfrac{f(x)}{x-1} & (x > 1) \end{cases}$ 이 실수 전체의 집합에서 연속일 때, $f(5)$의 값은?

2018년 경남10월 나17

정답 : 16

$f(1)=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)}{x-1}$에서 극한값 $\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)}{x-1}$이 존재하므로 $f(1)=0$이다.

이때 $f(1)=0=\lim_{x\to 1+}\frac{f(x)}{x-1}=f'(1)$에서 $f'(1)=0$이다. $\therefore f(x)=(x-1)^2,\ f(5)=16$

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\int_0^x f(t)dt = x^3 - 2x^2 - 2x\int_0^1 f(t)dt$일 때, $f(0) = a$라 하자.

$60a$의 값을 구하시오.

2013년 9월 나28

$x=1$에서 $\int_0^1 f(t)dt=-1-2\int_0^1 f(t)dt$에서 $\int_0^1 f(t)dt=-\frac{1}{3}$이다.

즉 $f(0)=\lim_{x\to 0}\frac{\int_0^x f(t)dt}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{x^3-2x^2+\frac{2}{3}x}{x}=\frac{2}{3}$에서 $a=\frac{2}{3}$이므로 $60a=40$이다.

모든 실수 x에 대하여 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

$$\int_{12}^{x} f(t)dt = -x^3 + x^2 + \int_{0}^{1} xf(t)dt$$

$\int_{0}^{1} f(x)dx$의 값을 구하시오.

2014년 10월 나24

$x=12$에서 $\int_{12}^{12} f(t)dt = -12^3 + 12^2 + \int_0^1 12f(t)dt$이므로 $\int_0^1 f(x)dx = 132$이다.

다항함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $\int_{1}^{x}\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt = x^3 + ax^2 - 2$를 만족시킬 때, $f'(a)$의 값은? (단, a는 상수이다.)

2019학년도 수능 나14

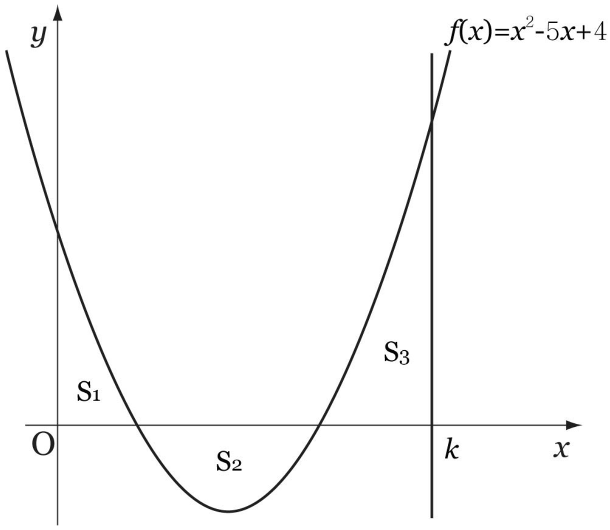
$x=1$에서 $0=1+a-2$, $a=1$이다. 이때 x^3+x^2-2의 도함수가 $3x^2+2x$이므로

$$\lim_{x\to1}\frac{\int_1^x\left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt}{x-1}=f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{x^3+x^2-2}{x-1}=3+2=5$$이다. $\therefore f'(a)=5$

그림과 같이 곡선 $f(x)=x^2-5x+4$와 x축 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_1, 곡선 $y=f(x)$와

x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 S_2, 곡선 $y=f(x)$와 x축 및 $x=k$ $(k>4)$로 둘러싸인 부분의

넓이를 S_3이라 하자. S_1, S_2, S_3이 이 순서대로 등차수열을 이룰 때, $\int_0^k f(x)dx$의 값은?



2009년 7월 가07

정답 : $\frac{9}{2}$

주어진 조건에서 $2\mathrm{S}_2 = \mathrm{S}_1 + \mathrm{S}_3$이므로 $\int_0^k f(x)dx = \mathrm{S}_1 - \mathrm{S}_2 + \mathrm{S}_3 = \mathrm{S}_2 = -\int_1^4 x^2 - 5x + 4dx = \frac{9}{2}$이다.

연속함수 $f(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(-x)=f(x)$
(나) $f(x+2)=f(x)$
(다) $\int_{-1}^{1}(2x+3)f(x)dx=15$

$\int_{-6}^{10}f(x)dx$의 값을 구하시오.

2014년 7월 나29

정답 : 40

조건 (가)에서 곡선 $y=f(x)$가 y축에 대하여 대칭이므로 $\int_{-1}^{1}(2x+3)f(x)dx=\int_{-1}^{1}3f(x)dx=15$이다.

$\therefore \int_{-1}^{1}f(x)dx=5,\ \int_{-6}^{10}f(x)dx=8\int_{-1}^{1}f(x)dx=40$

모든 실수 x에 대하여 $f(x) \geq 0$, $f(x+3)=f(x)$이고 $\int_{-1}^{2}\{f(x)+x^2-1\}^2 dx$의 값이 최소가 되도록 하는 연속함수 $f(x)$에 대하여 $\int_{-1}^{26} f(x) dx$의 값을 구하시오.

2020년 7월 나28

정답 : 12

닫힌구간 $[-1,\ 2]$에서 $x^2-1 \leq 0$이므로 $f(x)=-x^2+1$이고 $(1,\ 2]$에서 $x^2-1>0$이므로 $f(x)=0$

이다. $\therefore \int_{-1}^{26} f(x)dx = 9\int_{-1}^{2} f(x)dx = 9\int_{-}^{1}\left(-x^2+1\right)dx = 12$

실수 전체의 집합에서 연속인 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(x) \geq g(x)$

(나) $f(x)+g(x)=x^2+3x$

(다) $f(x)g(x)=\left(x^2+1\right)(3x-1)$

$\int_0^2 f(x)dx$의 값은?

2020년 9월 나20

정답 : $\dfrac{29}{6}$

$f(x)$와 $g(x)$를 두 근으로 가지는 t에 대한 이차방정식은 아래와 같다.

$(t-f(x))(t-g(x))=t^2-\left(x^2+3x\right)t+\left(x^2+1\right)(3x-1)=\left(t-\left\{x^2+1\right\}\right)(t-\{3x-1\})$

$\therefore \{f(x),\ g(x)\}=\left\{x^2+1,\ 3x-1\right\}$

이때 조건 (가)에서 $f(x)$는 $x \le 1$과 $x \ge 2$에서 $f(x)=x^2+1$이고 $1<x<2$에서 $f(x)=3x-1$이다.

$\therefore \displaystyle\int_0^2 f(x)dx=\int_0^1 x^2+1dx+\int_1^2 3x-1dx=\frac{29}{6}$

다항함수 $f(x)$에 대하여 $\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(a+\frac{b}{n}\right)-f\left(a-\frac{b}{n}\right)\right\}$의 값은? (단, $b\neq 0$)

① $\frac{1}{b}f'(a)$ ② 0 ③ $f'(a)$ ④ $bf'(a)$ ⑤ $2bf'(a)$

1994학년도 수능1차 02

정답 : ⑤

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f\left(a+\frac{b}{n}\right)-f\left(a-\frac{b}{n}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{f\left(a+\frac{b}{n}\right)-f\left(a-\frac{b}{n}\right)}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}2b\times\frac{f\left(a+\frac{b}{n}\right)-f\left(a-\frac{b}{n}\right)}{\frac{2b}{n}}=2bf'(a)$$

자연수 n에 대하여 구간 $[n,\ n+1]$에서 함수 $y=f(x)$의 평균변화율은 $n+1$이다.

이때, 함수 $f(x)$의 구간 $[1,\ 100]$에서의 평균변화율을 구하시오.

2004년 10월 가21

정답 : 51

$f(n+1)-f(n)=n+1$에서 $\dfrac{f(100)-f(1)}{99}=\dfrac{100+99+\quad\cdots\quad+3+2}{99}=\dfrac{100+2}{2}\times\dfrac{99}{99}=51$이다.

등차수열 $\{x_n\}$과 이차함수 $f(x)=ax^2+bx+c$에 대하여 <보기>에서 옳은 것을 모두 고른 것은?

㉠ 수열 $\{f'(x_n)\}$은 등차수열이다.
㉡ 수열 $\{f(x_{n+1})-f(x_n)\}$은 등차수열이다.
㉢ $f(0)=3,\ f(2)=5,\ f(4)=9$이면 $f(6)=15$이다.

2005년 9월 가06

정답 : ㉠, ㉡, ㉢

㉠ 일차함수와 일차함수를 합성한 함수는 일차함수이다.

㉡ 등차수열 $\{x_n\}$의 공차를 d라 할 때 함수 $f(x+d)-f(x)$의 이차항의 계수는 0이므로

함수 $f(x+d)-f(x)$는 일차함수이며, 일차함수와 일차함수를 합성한 함수는 일차함수이다.

㉢ ㉡에서 $f(2)-f(0)$, $f(4)-f(2)$, $f(6)-f(4)$도 이 순서대로 등차수열을 이룬다.

즉 2, 4, $f(6)-9$가 이 순서대로 등차수열을 이루므로 $f(6)=15$이다.

함수 $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)\ \cdots\ (x-10)$에 대하여 $\dfrac{f'(1)}{f'(4)}$의 값은?

2012년 7월 나12

정답 : -84

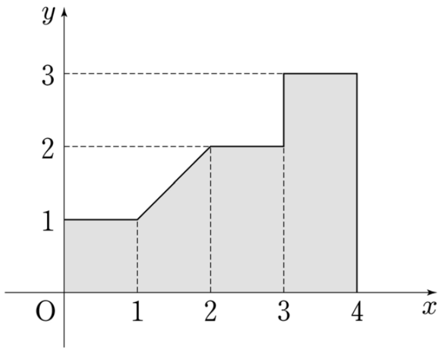
$f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}(x-2)(x-3)\ \cdots\ (x-9)(x-10)=-9!$이고

$f'(4)=\lim_{x\to4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=\lim_{x\to4}(x-1)(x-2)(x-3)(x-5)(x-6)\ \cdots\ (x-9)(x-10)=3!\times6!$이므로

$\frac{f'(1)}{f'(4)}=\frac{-9!}{3!\times6!}=-\frac{9\times8\times7}{3\times2\times1}=-84$이다.

좌표평면 위에 그림과 같이 어두운 부분을 내부로 하는 도형이 있다. 이 도형과 네 점

$(0,\ 0)$, $(t,\ 0)$, $(t,\ t)$, $(0,\ t)$를 꼭짓점으로 하는 정사각형이 겹치는 부분의 넓이를 $f(t)$라 하자.



열린구간 $(0,\ 4)$에서 함수 $f(t)$가 미분가능하지 않은 모든 t의 값의 합은?

2012년 5월 나21

정답 : 4

$0<t<4$에서 t가 자연수가 아닐 때 미분가능하므로 $f'(t)$는 열린구간 $(0,\ 1)$에서 $f'(t)=2t$,

열린구간 $(1,\ 2)$에서 $f'(t)=t$, 열린구간 $(2,\ 3)$에서 $f'(t)=2$, 열린구간 $(3,\ 4)$에서 $f'(t)=3$이다.

$\lim_{t\to 2+} f'(t)=\lim_{t\to 2-} f'(t)$이지만 $t=1$, $t=3$에서 미분가능하지 않다. 따라서 $1+3=4$이다.

x에 대한 삼차방정식 $\frac{1}{3}x^3 - x = k$가 서로 다른 세 실근 α, β, γ를 가진다. 실수 k에 대하여 $|\alpha| + |\beta| + |\gamma|$의 최솟값을 m이라 할 때, m^2의 값을 구하시오.

2005학년도 수능 가24

정답 : 12

일반성을 잃지 않고 $\alpha<\beta<\gamma$라 하자.

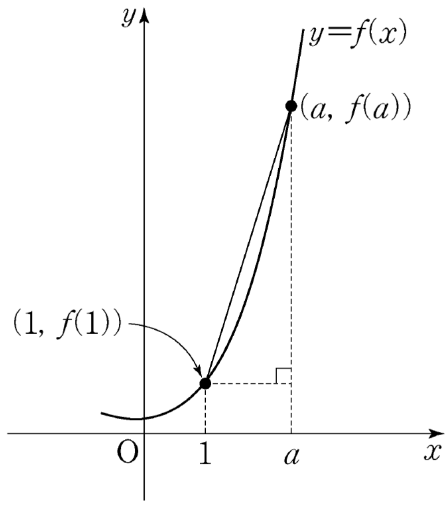
삼차방정식 $\frac{1}{3}x^3-x=k$의 서로 다른 세 실근의 절댓값의 합은 삼차방정식 $\frac{1}{3}x^3-x=-k$의 서로 다른 세 실근의 절댓값의 합과 동일하므로 $k\geq 0$인 경우만 고려하자.

곡선 $y=\frac{1}{3}x^3-x$가 원점에 대하여 대칭이고 근과 계수의 관계에서 $\alpha+\beta+\gamma=0$이며

$\frac{1}{3}x^3-x=\frac{1}{3}(x+\sqrt{3})x(x-\sqrt{3})$에서 $-\sqrt{3}\leq\alpha<\beta\leq 0<\sqrt{3}\leq\gamma$이다.

이때 $|\alpha|+|\beta|+|\gamma|=-\alpha-\beta+\gamma=-(\alpha+\beta+\gamma)+2\gamma=2\gamma\geq 2\sqrt{3}$이므로 $m=2\sqrt{3}$, $m^2=12$이다.

양의 실수 전체의 집합에서 증가하는 함수 $f(x)$가 $x=1$에서 미분가능하다. 1보다 큰 모든 실수 a에 대하여 점 $(1,\ f(1))$과 점 $(a,\ f(a))$ 사이의 거리가 a^2-1일 때, $f'(1)$의 값은?



2012년 6월 가16

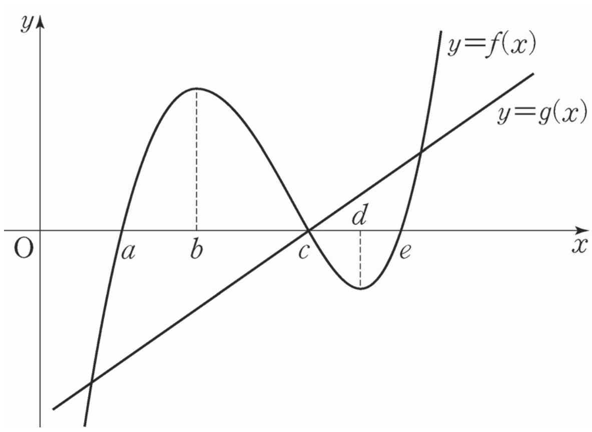
정답 : $\sqrt{3}$

$x>1$일 때 $\sqrt{(x-1)^2+\{f(x)-f(1)\}^2}=x^2-1$에서 $\{f(x)-f(1)\}^2=\left(x^2-1\right)^2-(x-1)^2$이므로

$f(x)-f(1)=(x-1)\sqrt{x(x+2)}$이다. $\therefore f'(1)=\lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}=\lim_{x\to1}\sqrt{x(x+2)}=\sqrt{3}$

혹은 $\frac{d}{da}(a)=1$, $\frac{d}{da}\left(a^2-1\right)=2a$이고 $a=1$에서 $2a=2$에서 $\sqrt{1+\{f'(1)\}^2}=2$, $f'(1)=\sqrt{3}$이다.

삼차함수 $y=f(x)$와 일차함수 $y=g(x)$의 그래프가 그림과 같고, $f'(b)=f'(d)=0$이다.



함수 $y=f(x)g(x)$는 $x=p$와 $x=q$에서 극소이다. 다음 중 옳은 것은? (단, $p<q$)

① $a<p<b$이고 $c<q<d$
② $a<p<b$이고 $d<q<e$
③ $b<p<c$이고 $c<q<d$
④ $b<p<c$이고 $d<q<e$
⑤ $c<p<d$이고 $d<q<e$

2016년 6월 나18

정답 : ②

$h(x)=f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$라 할 때 $h(a)<0$, $h(b)>0$, $h(c)=0$, $h(d)<0$, $h(e)>0$이다.

따라서 $a<p<b$이고 $d<q<e$이다.

두 함수 $f(x)=x^4+x^2-(k+1)x+k$, $g(x)=2x^3+x^2-5x+3$에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 모든 근이 실수가 되도록 하는 실수 k의 최솟값은?

2019년 5월 나18

정답 : 2

$f(x)-g(x)=x^4-2x^3-(k-4)x+k-3=(x-1)\left(x^3-x^2-x-k+3\right)$에서 $h(x)=x^3-x^2-x-k+3$라 하면 방정식 $h(x)=0$의 모든 근이 실수인 경우, 다시 말해 곡선 $y=h(x)$와 x축과의 서로 다른 교점의 개수가 3인 경우 주어진 조건을 만족한다.

$h'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$이므로 $h(1)=2-k\le 0$, 즉 $2\le k$이고 $h\left(-\dfrac{1}{3}\right)\ge 0$인 경우 주어진 조건을 만족한다. 따라서 주어진 조건을 만족하는 실수 k의 최솟값은 2이다.