2025

수 I

TH①. 거듭제곱근

2024년 5월 교육청모의고사

1. 집합 $\mathrm{U}=\{x \mid -5 \le x \le 5,\ x$는 정수$\}$의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 두 집합 A, B를

$$\mathrm{A}=\{a \mid a\text{는 } x\text{의 실수인 네제곱근, } x \in \mathrm{X}\}$$

$$\mathrm{B}=\{b \mid b\text{는 } x\text{의 실수인 세제곱근, } x \in \mathrm{X}\}$$라 하자.

$n(\mathrm{A})=9$, $n(\mathrm{B})=7$이 되도록 하는 집합 X의 모든 원소의 합의 최댓값을 구하시오.

2025학년도 사관학교

2. 2 이상의 자연수 n에 대하여 $-(n-k)^2+8$의 n제곱근 중 실수인 것의 개수를 $f(n)$이라 하자.

$$f(3)+f(4)+f(5)+f(6)+f(7)=7$$

을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은?

① 14 ② 15 ③ 16
④ 17 ⑤ 18

TH②. 지수로그함수 (추론)

2024년 7월 교육청모의고사

2025 Trend

3. $m \leq -10$인 상수 m에 대하여 함수 $f(x)$는

$$f(x)=\begin{cases} |5\log_2(4-x)+m| & (x \leq 0) \\ 5\log_2 x+m & (x>0) \end{cases}$$

이다. 실수 t $(t>0)$에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=t$의 모든 실근의 합을 $g(t)$라 하자. 함수 $g(t)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(m)$의 값을 구하시오.

> $t \geq a$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=g(a)$가 되도록 하는 양수 a의 최솟값은 2이다.

2024년 5월 교육청모의고사

2025 Trend

4. 두 상수 a, b $(b>0)$에 대하여 함수 $f(x)$를

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+3}+b & (x \leq a) \\ 2^{-x+5}+3b & (x>a) \end{cases}$$라 하자.

다음 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값이 $4b+8$일 때, $a+b$의 값은? (단, $k>b$)

> $b<t<k$인 모든 실수 t에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=t$의 교점의 개수는 1이다.

① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

2024년 9월 평가원모의고사

2025 Trend

5. 두 자연수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=\begin{cases} 2^{x+a}+b & (x \le -8) \\ -3^{x-3}+8 & (x > -8) \end{cases}$$

이 다음 조건을 만족시킬 때, $a+b$의 값은? [4점]

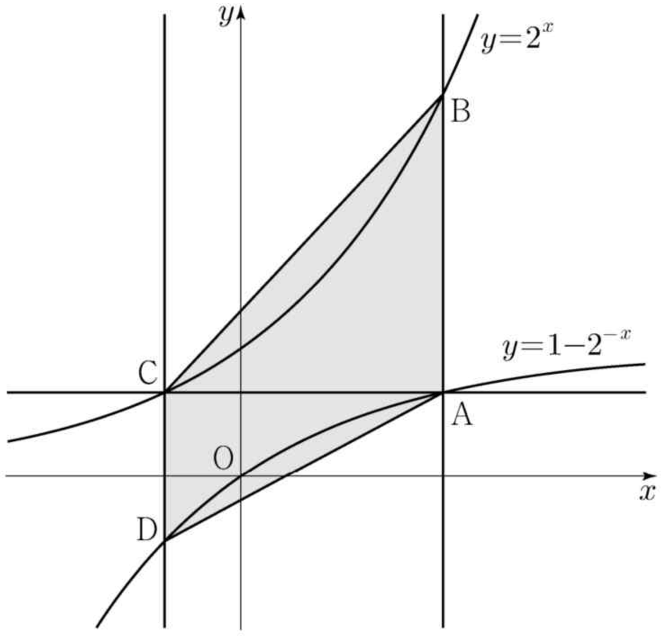
> 집합 $\{f(x) \mid x \le k\}$의 원소 중 정수인 것의 개수가 2가 되도록 하는 모든 실수 k의 값의 범위는 $3 \le k < 4$이다.

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

TH③. 지수로그함수의 Graph

2025학년도 6월 평가원모의고사

6. 그림과 같이 곡선 $y=1-2^{-x}$ 위의 제1사분면에 있는 점 A를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 B라 하자. 점 A를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=2^x$과 만나는 점을 C, 점 C를 지나고 y축에 평행한 직선이 곡선 $y=1-2^{-x}$과 만나는 점을 D라 하자. $\overline{AB}=2\overline{CD}$일 때, 사각형 ABCD의 넓이는?



① $\frac{5}{2}log_2 3-\frac{5}{4}$ ② $3\log_2 3-\frac{3}{2}$ ③ $\frac{7}{2}log_2 3-\frac{7}{4}$
④ $4\log_2 3-2$ ⑤ $\frac{9}{2}log_2 3-\frac{9}{4}$

7. $a>2$인 실수 a에 대하여 기울기가 -1인 직선이 두 곡선

$$y=a^{x}+2,\ y=\log_{a}x+2$$

와 만나는 점을 각각 A, B라 하자. 선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심의 y좌표가 $\frac{19}{2}$이고 넓이가 $\frac{121}{2}\pi$일 때, a^2의 값을 구하시오.

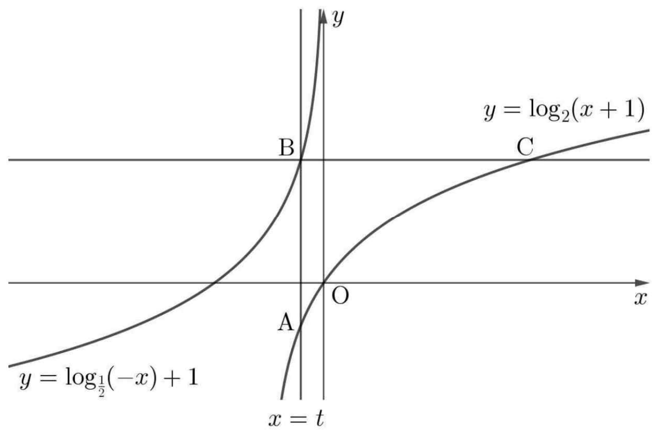
8. $-\frac{1}{2}<t<0$인 실수 t에 대하여 직선 $x=t$가 두 곡선

$$y=\log_{2}(x+1),\ y=\log_{1}(-x)+1$$

과 만나는 점을 각각 A, B라 하고, 점 B를 지나고 x축에 평행한 직선이 곡선 $y=\log_{2}(x+1)$과 만나는 점을 C라 하자. $\overline{\mathrm{AB}}=\log_{2}9$일 때, 선분 BC의 길이는?

① 4　　② $\frac{13}{3}$　　③ $\frac{14}{3}$

④ 5　　⑤ $\frac{16}{3}$



9. 자연수 n에 대하여 함수

$$y=\left|2^{|x-n|}-2n\right|$$

의 그래프가 직선 $y=15$와 제1사분면에서 만나는 점의 개수를 a_n이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n$의 값은?

① 52 ② 55 ③ 58 ④ 61 ⑤ 64

10. 자연수 n에 대하여 곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이다.

(나) $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$

중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점의 x좌표 중 큰 값을 x_n이라 하자. $x_1+x_2+x_3$의 값은?

① $\frac{150}{7}$ ② $\frac{155}{7}$ ③ $\frac{160}{7}$ ④ $\frac{165}{7}$ ⑤ $\frac{170}{7}$

TH④. 지수로그 방/부등식

2025학년도 6월 평가원모의고사

11. 다음 조건을 만족시키는 모든 자연수 k의 값의 합은?

> $\log_2 \sqrt{-n^2+10n+75} - \log_4(75-kn)$ 의 값이 양수가 되도록 하는 자연수 n의 개수가 12이다.

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

2025학년도 경찰대학교

12. 자연수 n에 대하여 집합

$$\{x \mid x \le \log_2(x+n),\ x\text{는 자연수}\}$$

의 원소의 개수를 $f(n)$이라 할 때, $\sum_{n=1}^{20} f(n)$의 값을 구하시오.

TH⑤. 자연수 만들기

2025학년도 경찰대학교

13. 40 이하의 두 자연수 m, n에 대하여

$$-\log_{\sqrt{2}} m + \log_{\frac{1}{2}} (4n+6)^{-1}$$

의 값이 자연수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (m, n)의 개수는?

① 4 ② 5 ③ 6

④ 7 ⑤ 8

TH⑥. 계산

2025학년도 경찰대학교

14. 함수 $f(x) = \dfrac{2^x}{2^x + \sqrt{2}}$ 에 대하여 수열 $\{a_n\}$의 일반항이

$$a_n = f\left(\frac{1}{n}\right) + f\left(\frac{2}{n}\right) + f\left(\frac{3}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n-1}{n}\right) + f\left(\frac{n}{n}\right)$$

일 때, $\sum_{n=1}^{20} a_n = p + q\sqrt{2}$ 이다. 정수 p, q에 대하여 $p+q$의 값을 구하시오.

1. 정답 11

홀수 제곱근중 실수인 수는 모두 1개이므로 B의 원소는 모두 7개

양수의 짝수 제곱근중 실수인 수는 2개이므로 $n(\mathrm{A})=9$를 만족하기 위해 집합 X는 양수를 4개, 0을 1개 포함해야 한다.

집합 X의 원소의 합이 최대이어야 하므로 X의 원소는

$5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 0,\ -1,\ -2$이다.

$\therefore\ 5+4+3+2+0-1-2=11$

2. [정답] ②

3. [정답] 8

[해설]

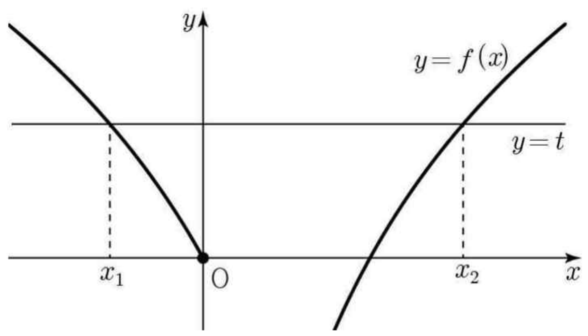
(ⅰ) $m=-10$인 경우

$f(0)=|10-10|=0$

$t>0$일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)-10=t$의 실근을 x_1,

방정식 $5\log_2 x-10=t$의 실근을 x_2라 하자.



$5\log_2(4-x_1)-10=5\log_2 x_2-10$

$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_2$

$4-x_1=x_2,\ x_1+x_2=4$

$t>0$인 모든 실수 t에 대하여

$g(t)=4$이므로 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $m<-10$인 경우

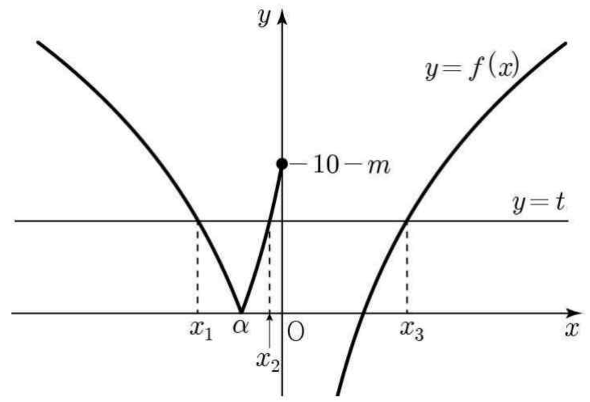
$x<0$에서 곡선 $y=f(x)$가 x축과 만나는 점의 x좌표를 α라 하면

$$f(x)=\begin{cases}5\log_2(4-x)+m & (x\le\alpha)\\ -5\log_2(4-x)-m & (\alpha<x\le 0)\\ 5\log_2 x+m & (x>0)\end{cases}$$

$f(0)=|10+m|=-10-m$

① $0<t<-10-m$일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$의 실근을 x_1, 방정식 $-5\log_2(4-x)-m=t$의 실근을 x_2, 방정식 $5\log_2 x+m=t$의 실근을 x_3이라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_3+m$

$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_3$

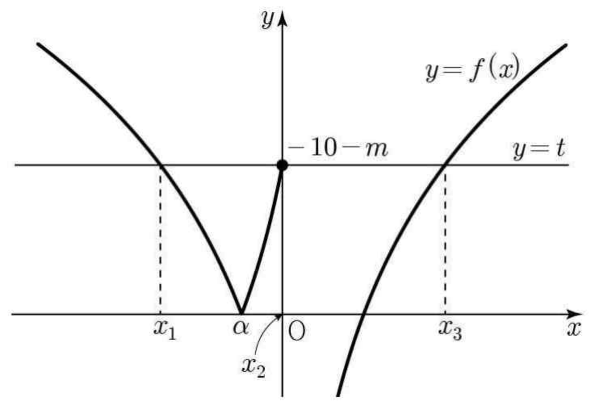
$4-x_1=x_3,\ x_1+x_3=4$

$g(t)=x_1+x_2+x_3=x_2+4<4$이고

$g(t)$의 값은 일정하지 않다.

② $t=-10-m$일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$의 실근을 x_1, 방정식 $-5\log_2(4-x)-m=t$의 실근을 x_2, 방정식 $5\log_2 x+m=t$의 실근을 x_3이라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_3+m$

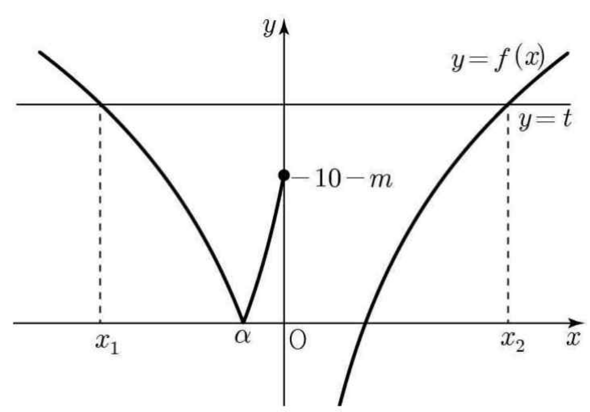
$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_3$, $4-x_1=x_3$

$x_1+x_3=4,\ x_2=0$이므로

$g(t)=x_1+x_2+x_3=4$

③ $t>-10-m$일 때,

방정식 $5\log_2(4-x)+m=t$의 실근을 x_1, 방정식 $5\log_2 x+m=t$의 실근을 x_2라 하자.



$5\log_2(4-x_1)+m=5\log_2 x_2+m$

$\log_2(4-x_1)=\log_2 x_2$

$4-x_1=x_2,\ x_1+x_2=4$

$g(t)=x_1+x_2=4$

①, ②, ③에 의하여 $t\ge-10-m$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=4$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $t\ge\alpha$인 모든 실수 t에 대하여 $g(t)=g(a)$가

되도록 하는 a의 최솟값은 $-10-m$이다.

$-10-m=2,\ m=-12$

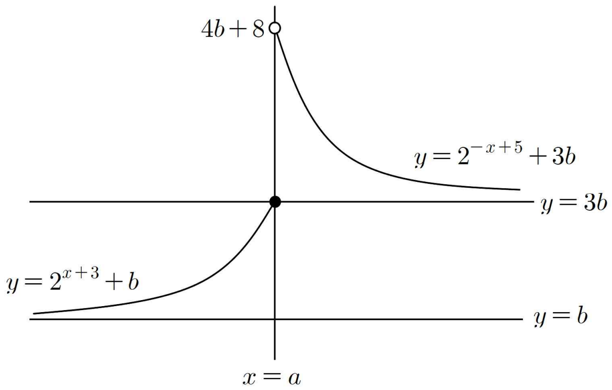
따라서 $f(m)=f(-12)$

$$=\left|5\log_2(4+12)-12\right|$$

$$=8$$

4. **정답** ①

$b<t<k$사이에 모든 점에서 수평선과 한번 만나는 그래프를 그려보면 아래 그림과 같다.



$2^{a+3}+b=3b,\ 2^{-a+5}+3b=4b+8$

$\begin{cases} 2^{a+3}=2b \\ 2^{-a+5}=b+8 \end{cases}$ 두 식을 곱하면, $2^8=2b^2+16b,\ b^2+8b-128=0$

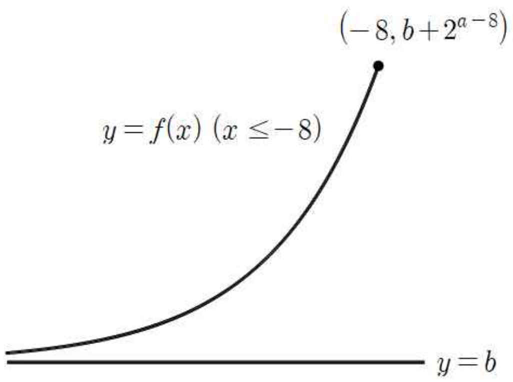
$(b+16)(b-8)=0,\ b=8\ (\because\ b>0)$

$2^{a+3}=16,\ a=1,\ \therefore\ a+b=9$

5. ②

함수 $y=2^{x+a}+b$는 증가함수이고, 함수 $y=2^{x+a}+b$의 그래프의 점근선은 $y=b$이다.

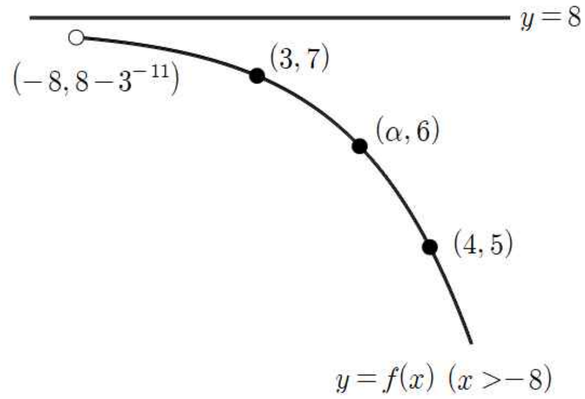
$$f(-8)=b+2^{a-8}$$



함수 $y=-3^{x-3}+8$는 감소함수이고, 함수 $y=-3^{x-3}+8$의 그래프의 점근선은 $y=8$이다.

$$\lim_{x\to -8+} f(x)=\lim_{x\to -8+}\left(-3^{x-3}+8\right)=8-3^{-11}$$

$$\therefore\ 7<\lim_{x\to -8+} f(x)<8 \qquad \cdots\cdots ㉠$$



집합 $\{f(x)\mid x\le k\}$의 원소 중에서 정수인 것의 개수가 2인 실수 k의 값의 범위는 $3\le k<4$이다. $\cdots\cdots$ ㉡

$$f(3)=7,\ f(4)=5$$

이때, $k\ne 4$이므로 $3\le k<4$일 때, 집합 $\{f(x)\mid x\le k\}$에서

$$5\notin \{f(x)\mid x\le k\}$$

$3<x<4$에서 $f(x)=6$인 실수 x는 오직 하나이다.

$$f(\alpha)=6\ (3<\alpha<4)$$

이라 하자.

$f(3)=7,\ f(\alpha)=6\ (3<\alpha<4)$이므로 $3\le k<4$일 때 집합 $\{f(x)\mid x\le k\}$에서

$$\{6, 7\}\subset \{f(x)\mid x\le k\}$$

㉡에서 k의 최솟값이 3이고, $f(3)=7$이므로 $x<3$인 실수 x에 대하여 $f(x)$의 값이 정수인 것은 6뿐이다.

㉠에 의하여 $-8<x<3$에서 $7<f(x)<8$이므로 $x\le -8$에서 $f(x)=6$인 실수 x가 존재한다.

$x\le -8$에서 $f(x)$가 정수인 것은 6 뿐이고, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 점근선은 $y=b$이므로

$$b+1=6 \qquad \therefore\ b=5$$

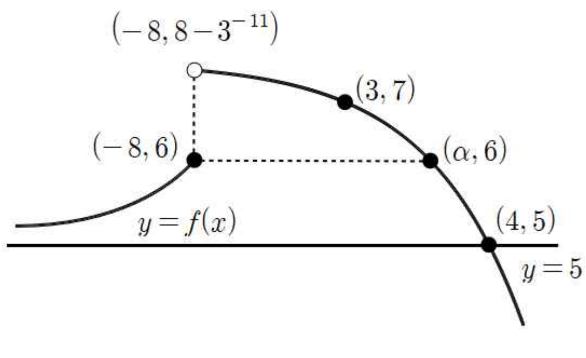
$$6\le f(-8)<7, \qquad 6\le b+2^{a-8}<7$$

$6\le b+2^{a-8}<7$에서

$$6\le 5+2^{a-8}<7, \qquad 1\le 2^{a-8}<2$$

$0\le a-8<1$이므로 $a=8$이다.

$$\therefore\ a+b=13$$



6. [정답] ③

[출처]	2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 12 [4.00점]

[해설]

주어진 그림에서 두 점 A, C의 x좌표를 각각 $k\ (k>0)$, $m\ (m<0)$이라 하면

$$\mathrm{A}(k, 1-2^{-k}),\ \mathrm{B}(k, 2^k),\ \mathrm{C}(m, 2^m),\ \mathrm{D}(m, 1-2^{-m})$$

두 점 A, C의 y좌표가 같으므로

$$1-2^{-k}=2^m \qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\overline{AB} = 2^k + 2^{-k} - 1$, $\overline{CD} = 2^m + 2^{-m} - 1$이고 $\overline{AB} = 2\overline{CD}$에서

$$2^k + 2^{-k} - 1 = 2(2^m + 2^{-m} - 1) \qquad \cdots\cdots \text{㉡}$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$$2^k + 2^{-k} - 1 = 2\left(1 - 2^{-k} + \frac{1}{1 - 2^{-k}} - 1\right)$$

$2^k = a \ (a > 0)$이라 하면

$$a + \frac{1}{a} - 1 = 2\left(\frac{1}{1 - \frac{1}{a}} - \frac{1}{a}\right),$$

$$\frac{a^2 - a + 1}{a} = 2 \times \frac{a^2 - a + 1}{a} \times \frac{1}{a - 1}$$

이때 $a \neq 0$, $a^2 - a + 1 \neq 0$이므로

$$1 = \frac{2}{a - 1}, \qquad a - 1 = 2$$

$$\therefore \ a = 3$$

즉 $2^k = 3$에서 $k = \log_2 3$이고 $2^{-k} = \frac{1}{3}$이므로 ㉠에서

$$2^m = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}, \qquad m = \log_2 \frac{2}{3}$$

따라서 $A\left(\log_2 3, \frac{2}{3}\right)$, $B(\log_2 3, 3)$, $C\left(\log_2 \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)$,

$D\left(\log_2 \frac{2}{3}, -\frac{1}{2}\right)$이므로

$$\overline{AC} = \log_2 3 - \log_2 \frac{2}{3} = \log_2 \frac{9}{2},$$

$$\overline{AB} = 3 - \frac{2}{3} = \frac{7}{3},$$

$$\overline{CD} = \frac{2}{3} - \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{6}$$

삼각형 ABC, ACD의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하면

$$S_1 = \frac{1}{2} \times \log_2 \frac{9}{2} \times \frac{7}{3} = \frac{7}{3} log_2 3 - \frac{7}{6},$$

$$S_2 = \frac{1}{2} \times \log_2 \frac{9}{2} \times \frac{7}{6} = \frac{7}{6} log_2 3 - \frac{7}{12}$$

따라서 구하려는 사각형 ABCD의 넓이는

$$S_1 + S_2 = \left(\frac{7}{3} log_2 3 - \frac{7}{6}\right) + \left(\frac{7}{6} log_2 3 - \frac{7}{12}\right)$$

$$= \frac{7}{2} log_2 3 - \frac{7}{4}$$

7. [정답] 13

[해설]

선분 AB를 지름으로 하는 원의 중심을 점 $C\left(k, \frac{19}{2}\right)$라 할 때, 점 C는 선분 AB의 중점이다.

두 곡선 $y = a^x + 2$, $y = \log_a x + 2$를 y축의 방향으로 각각 -2만큼 평행이동한 두 곡선 $y = a^x$, $y = \log_a x$가 직선 $y = x$에 대하여 대칭이므로 두 점 A, B를 y축의 방향으로 각각 -2만큼 평행이동한 두 점 A′, B′도 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

점 C를 y축의 방향으로 -2만큼 평행이동한 점 $C'\left(k, \frac{15}{2}\right)$가 선분 A′B′의 중점이므로 점 C′은 직선 $y = x$ 위에 있다. 그러므로

$k = \frac{15}{2}$이다.

넓이가 $\frac{121}{2}\pi$인 원의 반지름의 길이는 $\overline{A'C'} = \frac{11\sqrt{2}}{2}$이고 직선 A′B′의 기울기가 -1이므로

점 A′의 좌표는 $\left(\frac{15}{2} - \frac{11}{2}, \frac{15}{2} + \frac{11}{2}\right) = (2, 13)$

점 $A'(2, 13)$이 곡선 $y = a^x$ 위의 점이므로 $a^2 = 13$

8. [정답] ⑤

9. [정답] ④

[해설]

자연수 n에 대하여 함수 $f(x) = \left|2^{|x-n|} - 2n\right|$이라 하자.

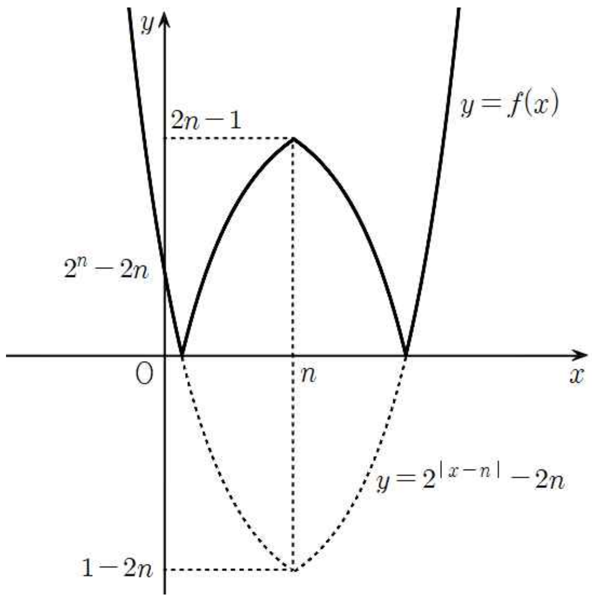
$$f(2n - x) = \left|2^{|n-x|} - 2n\right|$$
$$= \left|2^{|x-n|} - 2n\right|$$
$$= f(x)$$

이므로 함수 $y = f(x)$의 그래프는 직선 $x = n$에 대하여 대칭이다.

n이 자연수이므로

$$f(n) = |1 - 2n| = 2n - 1$$
$$f(0) = |2^n - 2n| = 2^n - 2n$$

함수 $y = f(x)$의 그래프의 개형은 다음과 같다.



함수 $y = f(x)$의 그래프와 직선 $y = 15$의 제1 사분면에서의 교점의 개수가 a_n이다.

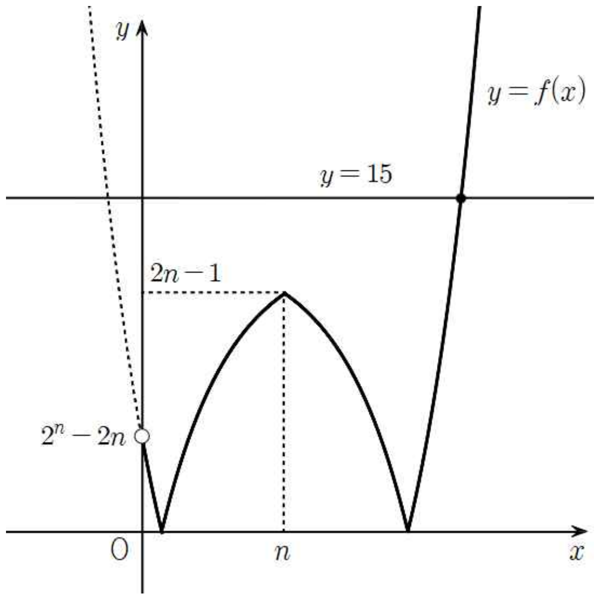
(ⅰ) $f(0) < 15$일 때

$$2^n - 2n < 15, \qquad 2^n < 2n + 15$$

따라서 $f(0) < 15$인 자연수 n의 값은

$n = 1$, $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$

이때, $2n - 1 < 15$, 즉 $f(n) < 15$이다.



위의 그림에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=15$의 제1 사분면에서의 교점의 개수는 1이다.

$\therefore\ a_1=1,\ a_2=1,\ a_3=1,\ a_4=1$

(ii) $f(0)>15$일 때

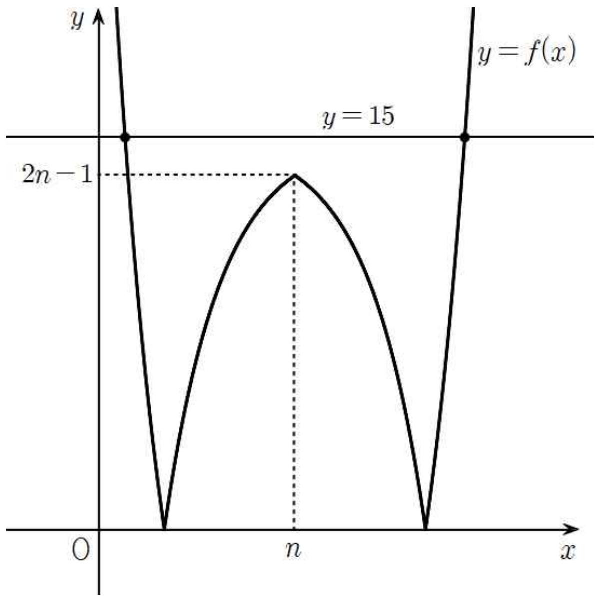
$2^n-2n>15,\qquad 2^n>2n+15$

따라서 $f(0)>15$인 자연수 n의 값은

$n=5,\ n=6,\ n=7,\ \cdots$

(a) $f(n)<15$일 때

$2n-1<15,\qquad n=5,\ n=6,\ n=7$

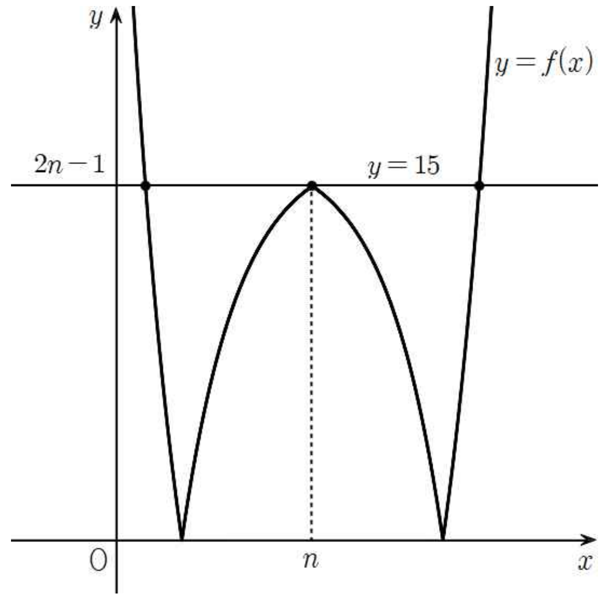


위의 그림에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=15$의 제1 사분면에서의 교점의 개수는 2이다.

$a_5=2,\ a_6=2,\ a_7=2$

(b) $f(n)=15$일 때

$2n-1=15,\qquad n=8$

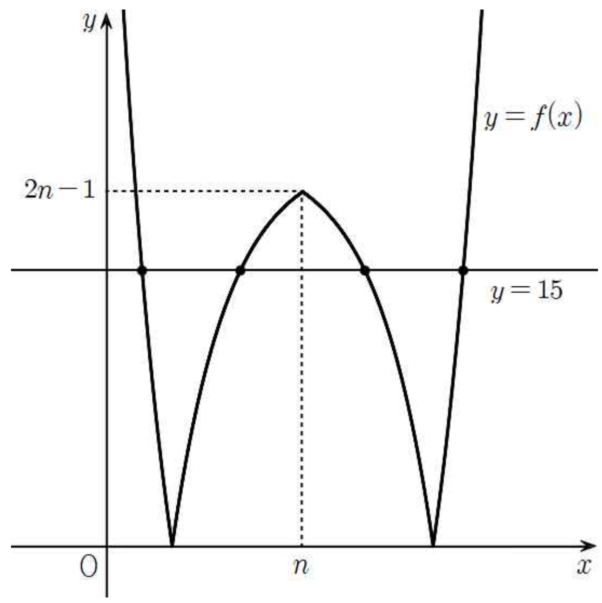


위의 그림에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=15$의 제1 사분면에서의 교점의 개수는 3이다.

$a_8=3$

(c) $f(n)>15$일 때

$2n-1>15,\qquad n=9,\ n=10,\ n=11,\ \cdots$



위의 그림에 의하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=15$의 제1 사분면에서의 교점의 개수는 4이다.

$a_9=4,\ a_{10}=4,\ a_{11}=4,\ \cdots$

이상에서 자연수 n에 대하여 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=15$의 제1 사분면에서의 교점의 개수는

$$a_n=\begin{cases}1 & (n=1,\,2,\,3,\,4)\\ 2 & (n=5,\,6,\,7)\\ 3 & (n=8)\\ 4 & (n=9,\,10,\,11,\ \cdots\ )\end{cases}$$

이므로

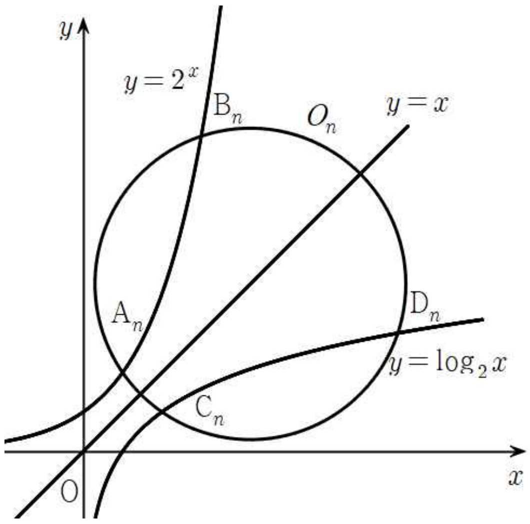
$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{20}a_n&=1\times4+2\times3+3\times1+4\times12\\&=61\end{aligned}$$

10. [정답] ⑤

[해설]

곡선 $y=2^x$ 위의 두 점 A_n, B_n 중 x좌표가 작은 점을 A_n이라 하고, 중심이 직선 $y=x$ 위에 있고 두 점 A_n, B_n을 지나는 원을 O_n이라 하자. 이 원이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점을 C_n, D_n이라 하고 이

두 점 중에서 x좌표가 큰 점을 D_n이라 하자. 곡선 $y=2^x$, $y=\log_2 x$와 원 O_n, 네 점 A_n, B_n, C_n, D_n은 다음과 같다.



이때, 함수 $y=2^x$와 함수 $y=\log_2 x$은 서로 역함수 관계이므로 두 점 A_n과 C_n, 두 점 B_n과 D_n은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

점 A_n의 x좌표를 α_n이라 하면,

$$\mathrm{A}_n\left(\alpha_n,\ 2^{\alpha_n}\right),\ \mathrm{C}_n\left(2^{\alpha_n},\ \alpha_n\right)$$

조건 (나)에서 $\overline{\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n}=n\times\sqrt{10}$이고, 조건 (가)에서 직선 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$의 기울기는 3이므로 점 B_n의 좌표는

$$\mathrm{B}_n\left(\alpha_n+n,\ 2^{\alpha_n}+3n\right)$$

이고, 두 점 B_n과 D_n은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 D_n의 좌표는

$$\mathrm{D}_n\left(2^{\alpha_n}+3n,\ \alpha_n+n\right)$$

이다. 또한 점 $\mathrm{B}_n\left(\alpha_n+n,\ 2^{\alpha_n}+3n\right)$은 곡선 $y=2^x$ 위의 점이므로

$$2^{\alpha_n}+3n=2^{\alpha_n+n},\qquad 2^{\alpha_n}\times\left(2^n-1\right)=3n$$

$$\therefore\ 2^{\alpha_n}=\frac{3n}{2^n-1}$$

이때, 원 O_n이 곡선 $y=\log_2 x$와 만나는 두 점 중의 x좌표가 큰 점이 D_n이므로

$$x_n=2^{\alpha_n}+3n=\frac{3n}{2^n-1}+3n=\frac{3n\times 2^n}{2^n-1}$$

$$\therefore\ x_1+x_2+x_3=6+8+\frac{72}{7}=\frac{170}{7}$$

11. [정답] ④

[출처]	2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 14 [4.00점]

[해설]

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)$ 에서 로그의 진수 조건에 의하여

$$\sqrt{-n^2+10n+75}>0,\ 75-kn>0$$

즉 $n^2-10n-75<0,\ kn<75$에서

$(n+5)(n-15)<0,\ n<\dfrac{75}{k}$이므로

$$1\leq n<15,\ n<\frac{75}{k}\ (\because\ n\text{은 자연수})\qquad \cdots\cdots ㉠$$

$\log_2\sqrt{-n^2+10n+75}-\log_4(75-kn)>0$ 에서

$$\log_4\left(-n^2+10n+75\right)>\log_4(75-kn),$$

$$-n^2+10n+75>75-kn,\qquad n(n-k-10)<0$$

$$\therefore\ 1\leq n<k+10\qquad \cdots\cdots ㉡$$

(i) $k+10>\dfrac{75}{k}$일 때

$k(k+10)-75>0$에서 $\quad k^2+10k-75>0$,

$(k+15)(k-5)>0$

$\therefore\ k>5$ ($\because$ k는 자연수)

㉠, ㉡에서 $1\leq n<\dfrac{75}{k}$이므로 이를 만족시키는 자연수 n의 개수가 12가 되려면

$$12<\frac{75}{k}\leq 13,\qquad \frac{75}{13}\leq k<\frac{75}{12}$$

따라서 이를 만족시키는 자연수 k의 값은 6이다.

(ii) $k+10\leq\dfrac{75}{k}$일 때

$k(k+10)-75\leq 0$에서 $\quad k^2+10k-75\leq 0$,

$(k+15)(k-5)\leq 0$

$\therefore\ 1\leq k\leq 5$ ($\because$ k는 자연수)

㉠, ㉡에서 $1\leq n<k+10$이므로 이를 만족시키는 자연수 n의 개수가 12가 되려면

$$12<k+10\leq 13,\qquad 2<k\leq 3$$

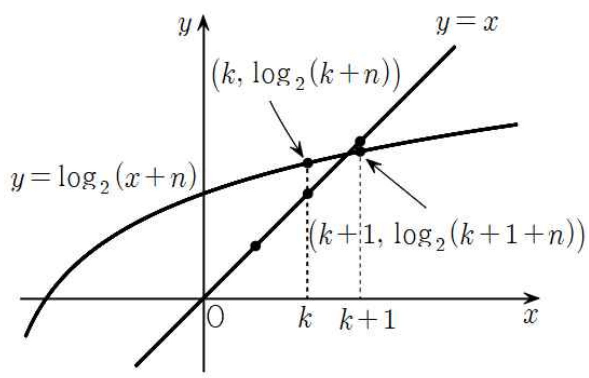
따라서 이를 만족시키는 자연수 k의 값은 3이다.

(i), (ii)에 의하여 구하려는 모든 자연수 k의 값의 합은

$$6+3=9$$

12. [정답] 64

[해설]



위의 그래프에서 $f(n)=k$ (단, k는 자연수)라 하면

$x=k$일 때 $\quad k\leq\log_2(k+n)$

$x=k+1$일 때 $\quad \log_2(k+1+n)<k+1$

이 성립하므로 두 식을 연립하면

$$2^k-k\leq n<2^{k+1}-k-1\qquad \cdots\cdots ㉠$$

이 성립한다. ㉠의 양변의 k값에 자연수를 대입하여 조건을 만족하는 자연수 n을 구하면 아래와 같다.

(i) $k=1$일 때

$$2-1\leq n<2^2-2,\qquad n=1$$

즉 $f(n)=1$인 자연수 n은 1 뿐이다.

(ii) $k=2$일 때

$$2^2-2\leq n<2^3-3,\qquad n=2,\ 3,\ 4$$

즉 $f(n)=2$인 자연수 n은 $n=2,\ 3,\ 4$이다.

(iii) $k=3$ 일 때

$$2^3-3\le n<2^4-4,\qquad 5\le n<12$$

즉 $f(n)=3$ 인 자연수 n은 $n=5,\ 6,\ 7,\ \cdots,\ 11$ 이다.

(iv) $k=4$ 일 때

$$2^4-4\le n<2^5-5,\qquad 12\le n<27$$

즉 $f(n)=4$ 인 자연수 n은 $n=12,\ 13,\ 14,\ \cdots,\ 26$ 이다.

이상에서

$$\sum_{n=1}^{20} f(n)=1\times1+2\times3+3\times7+4\times9=64$$

13. [정답] ①

[해설]

$$-\log_{\sqrt{2}} m+\log_{\frac{1}{2}}(4n+6)^{-1}$$

$$=\log_2(4n+6)-\log_2 m^2$$

$$=\log_2\frac{4n+6}{m^2}$$

이 값이 자연수이므로

$$\log_2\frac{4n+6}{m^2}=k\quad (k\text{는 자연수})$$

라 하면

$$\frac{4n+6}{m^2}=2^k,\qquad 2n+3=2^{k-1}m^2 \qquad \cdots\cdots ㉠$$

㉠에서 $2n+3$ 이 홀수이므로

$$k-1=0,\qquad k=1$$

즉, $2n+3=m^2$ 을 만족하는 순서쌍 $(m,\ n)$은

$$(3,\ 3),\ (5,\ 11),\ (7,\ 23),\ (9,\ 39)$$

따라서 구하는 모든 순서쌍 $(m,\ n)$의 개수는 4이다.

14. [정답] 115

[해설]

함수 $f(x)=\dfrac{2^x}{2^x+\sqrt{2}}$ 에서

$$f(1-x)=\frac{2^{1-x}}{2^{1-x}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2^x+\sqrt{2}}$$

이므로 $\quad f(x)+f(1-x)=1 \qquad \cdots\cdots ㉠$

$$f(0)=\frac{1}{1+\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1,\ f\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2} \qquad \cdots\cdots ㉡$$

$a_n=f\left(\dfrac{1}{n}\right)+f\left(\dfrac{2}{n}\right)+f\left(\dfrac{3}{n}\right)+\ \cdots\ +f\left(\dfrac{n-1}{n}\right)+f\left(\dfrac{n}{n}\right)$ 에서 자연수 k에 대하여

$$a_{2k}=f\left(\frac{1}{2k}\right)+f\left(\frac{2}{2k}\right)+\ \cdots\ +f\left(\frac{k}{2k}\right)+\ \cdots\ +f\left(\frac{2k}{2k}\right)$$

$$=f\left(\frac{0}{2k}\right)+f\left(\frac{1}{2k}\right)+\ \cdots\ +f\left(\frac{2k}{2k}\right)-f(0)$$

$$=k+\frac{1}{2}-\sqrt{2}+1\ (\because\ ㉠,\ ㉡)$$

$$a_{2k-1}=f\left(\frac{1}{2k-1}\right)+f\left(\frac{2}{2k-1}\right)+\ \cdots\ +f\left(\frac{2k-1}{2k-1}\right)$$

$$=f\left(\frac{0}{2k-1}\right)+f\left(\frac{1}{2k-1}\right)+\ \cdots\ +f\left(\frac{2k-1}{2k-1}\right)-f(0)$$

$$=k-\sqrt{2}+1\ (\because\ ㉠,\ ㉡)$$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{20}a_n=\sum_{k=1}^{10}(a_{2k-1}+a_{2k})$$

$$=\sum_{k=1}^{10}\left(2k+\frac{5}{2}-2\sqrt{2}\right)$$

$$=2\times\frac{10\times11}{2}+10\times\frac{5}{2}-20\sqrt{2}$$

$$=135-20\sqrt{2}$$

이므로 $\quad p=135,\ q=-20$

$$\therefore\ p+q=115$$

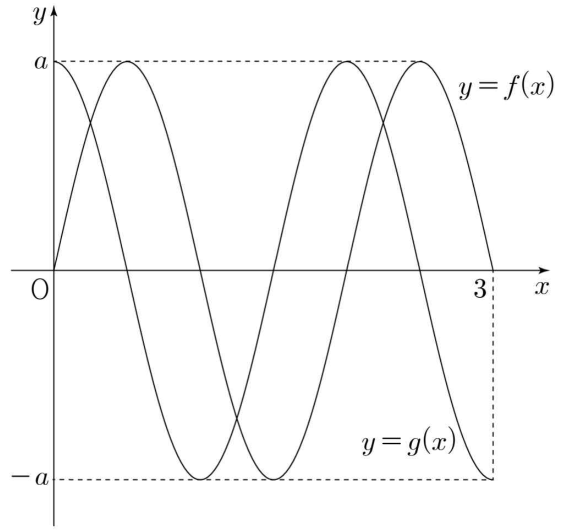
TH①. 삼각함수 그래프 [Easy]

2024년 7월 교육청모의고사 19번(3점)

1. 양수 a에 대하여 $0 \leq x \leq 3$에서 정의된 두 함수

$$f(x)=a\sin\pi x,\ g(x)=a\cos\pi x$$

가 있다. 두 곡선 $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이가 2일 때, a^2의 값을 구하시오.



2024년 5월 교육청모의고사 8번(3점)

2. 두 양수 a, b에 대하여 함수

$$f(x)=a\cos bx$$

의 주기가 6π이고 닫힌구간 $[\pi,\ 4\pi]$에서 함수 $f(x)$의 최댓값이 1일 때, $a+b$의 값은?

① $\frac{5}{3}$ ② $\frac{11}{6}$ ③ 2 ④ $\frac{13}{6}$ ⑤ $\frac{7}{3}$

TH②. 삼각함수 그래프 [Normal]

2025학년도 6월 평가원모의고사

EBS 연계문항

3. 5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여 열린구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수

$$y=a\sin x+b$$

의 그래프가 직선 $x=\pi$와 만나는 점의 집합을 A라 하고, 두 직선 $y=1$, $y=3$과 만나는 점의 집합을 각각 B, C라 하자. $n(A\cup B\cup C)=3$이 되도록 하는 a, b의 순서쌍 $(a,\ b)$에 대하여 $a+b$의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M\times m$의 값을 구하시오.

2025학년도 9월 평가원모의고사

2025 Trend

4. 닫힌구간 $[0,\ 2\pi]$에서 정의된 함수

$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & (0\leq x<\pi)\\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\leq x\leq 2\pi)\end{cases}$$

가 있다. $0\leq t\leq 2\pi$인 실수 t에 대하여 x에 대한 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근의 개수가 3이 되도록 하는 모든 t의 값의 합은 $\frac{q}{p}\pi$이다. $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.)

2025학년도 경찰대학교

5. 두 자연수 a, b에 대하여 $0 \leq x \leq 2\pi$에서 정의된 함수 $f(x) = a\sin(bx) + a$의 그래프가 직선 $y = 2$와 서로 다른 네 점에서 만난다. ab의 최솟값은?

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

TH③. 삼각함수의 방/부등식

2025학년도 사관학교

EBS 연계문항

6. 다음 조건을 만족시키는 두 실수 α, β에 대하여 $\frac{12}{\pi} \times (\beta - \alpha)$의 최댓값을 구하시오.

> $0 \leq x < 2\pi$에서 함수
> $f(x) = \cos^2\left(\frac{13}{12}\pi - 2x\right) + \sqrt{3}\cos\left(2x - \frac{7}{12}\pi\right) - 1$
> 은 $x = \alpha$일 때 최댓값을 갖고, $x = \beta$일 때 최솟값을 갖는다.

2024년 3월 교육청모의고사

7. 두 함수 $f(x)=2x^2+2x-1$, $g(x)=\cos\frac{\pi}{3}x$에 대하여 $0\le x<12$에서 방정식

$$f(g(x))=g(x)$$

를 만족시키는 모든 실수 x의 값의 합을 구하시오.

TH④. 삼각함수의 활용

2025학년도 6월 평가원모의고사

2025 Trend

8. 다음 조건을 만족시키는 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 9π일 때, 삼각형 ABC의 넓이는?

(가) $3\sin A=2\sin B$
(나) $\cos B=\cos C$

① $\frac{32}{9}\sqrt{2}$ ② $\frac{40}{9}\sqrt{2}$ ③ $\frac{16}{3}\sqrt{2}$ ④ $\frac{56}{9}\sqrt{2}$ ⑤ $\frac{64}{9}\sqrt{2}$

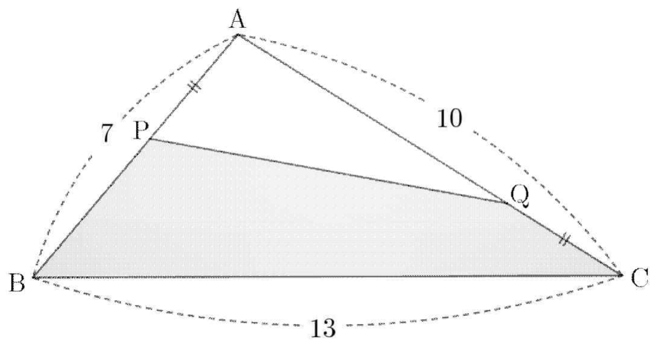
9. $\angle A > \frac{\pi}{2}$인 삼각형 ABC의 꼭짓점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 H라 하자.

$$\overline{AB} : \overline{AC} = \sqrt{2} : 1,\ \overline{AH} = 2$$

이고, 삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π일 때, 선분 BH의 길이는?

① 6　② $\frac{25}{4}$　③ $\frac{13}{2}$　④ $\frac{27}{4}$　⑤ 7

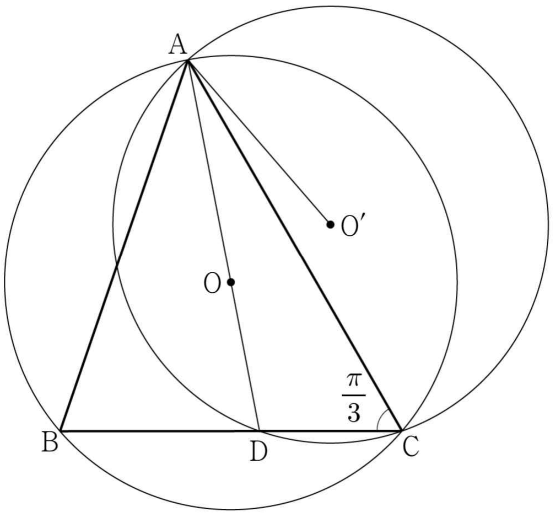
10. 그림과 같이 $\overline{AB} = 7$, $\overline{BC} = 13$, $\overline{CA} = 10$인 삼각형 ABC가 있다. 선분 AB 위의 점 P와 선분 AC 위의 점 Q를 $\overline{AP} = \overline{CQ}$이고 사각형 PBCQ의 넓이가 $14\sqrt{3}$이 되도록 잡을 때, $\overline{PQ}^2$의 값을 구하시오.



11. 그림과 같이

$$\overline{\mathrm{BC}}=\frac{36\sqrt{7}}{7},\ \sin(\angle\mathrm{BAC})=\frac{2\sqrt{7}}{7},\ \angle\mathrm{ACB}=\frac{\pi}{3}$$

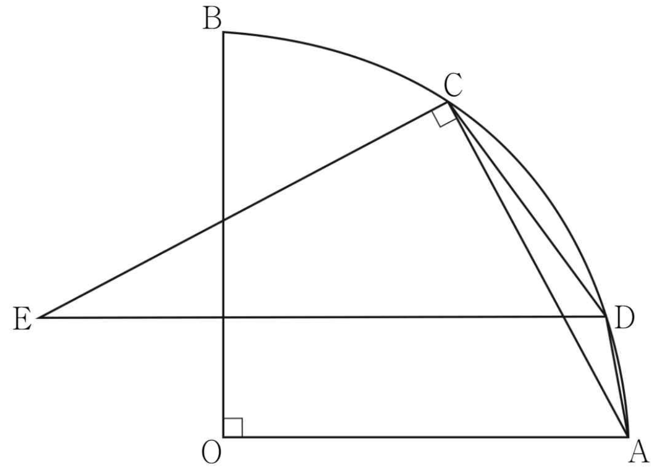
인 삼각형 ABC가 있다. 삼각형 ABC의 외접원의 중심을 O, 직선 AO가 변 BC와 만나는 점을 D라 하자. 삼각형 ADC의 외접원의 중심을 O′이라 할 때, $\overline{\mathrm{AO'}}=5\sqrt{3}$이다. $\overline{\mathrm{OO'}}^2$의 값은? $\left(\text{단, } 0<\angle\mathrm{BAC}<\frac{\pi}{2}\right)$



① 21 ② $\frac{91}{4}$ ③ $\frac{49}{2}$

④ $\frac{105}{4}$ ⑤ 28

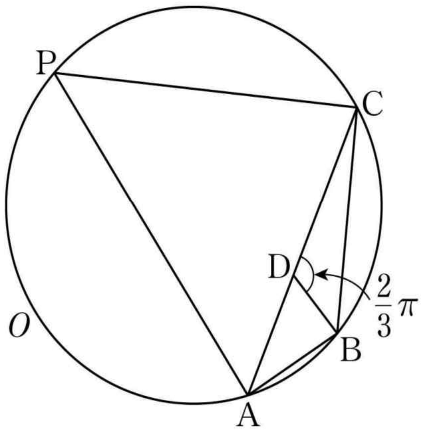
12.. 그림과 같이 중심이 O, 반지름의 길이가 6이고 중심각의 크기가 $\frac{\pi}{2}$인 부채꼴 OAB가 있다. 호 AB위에 점 C를 $\overline{\mathrm{AC}}=4\sqrt{2}$가 되도록 잡는다. 호 AC 위의 한 점 D에 대하여 점 D를 지나고 선분 OA에 평행한 직선과 점 C를 지나고 선분 AC에 수직인 직선이 만나는 점을 E라 하자. 삼각형 CED의 외접원의 반지름의 길이가 $3\sqrt{2}$일Eo, $\overline{\mathrm{AD}}=p+q\sqrt{7}$을 만족시키는 두 유리수 p, q에 대하여 $9\times|p\times q|$의 값을 구하시오.(단, 점 D는 점 A도 아니고, 점 C도 아니다.)12.



13.. 그림과 같이

$$2\overline{AB}=\overline{BC},\ \cos(\angle ABC)=-\frac{5}{8}$$

인 삼각형 ABC의 외접원을 O라 하자. 원 O 위의 점 P에 대하여 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되도록 하는 점 P를 Q라 할 때, $\overline{QA}=6\sqrt{10}$이다. 선분 AC 위의 점 D에 대하여 $\angle CDB=\frac{2}{3}\pi$일 때, 삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이는?



① $3\sqrt{3}$ ② $4\sqrt{3}$ ③ $3\sqrt{6}$
④ $5\sqrt{3}$ ⑤ $4\sqrt{6}$

14. 넓이가 $4\sqrt{3}$이고 $\angle A=\frac{\pi}{3}$인 삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 4일 때, $\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA}$의 값은?

① $4(\sqrt{2}+\sqrt{3})$ ② $4(2+\sqrt{3})$
③ $4(\sqrt{3}+\sqrt{5})$ ④ $4(\sqrt{3}+\sqrt{6})$
⑤ $4(\sqrt{3}+\sqrt{7})$

1. [정답] 2

[해설]

삼각함수 $y=a\sin\pi x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$, 최댓값은 a,

최솟값은 $-a$이다.

삼각함수 $y=a\cos\pi x$의 주기는 $\dfrac{2\pi}{\pi}=2$,

최댓값은 a, 최솟값은 $-a$이다.

곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 점의 x좌표는 방정식

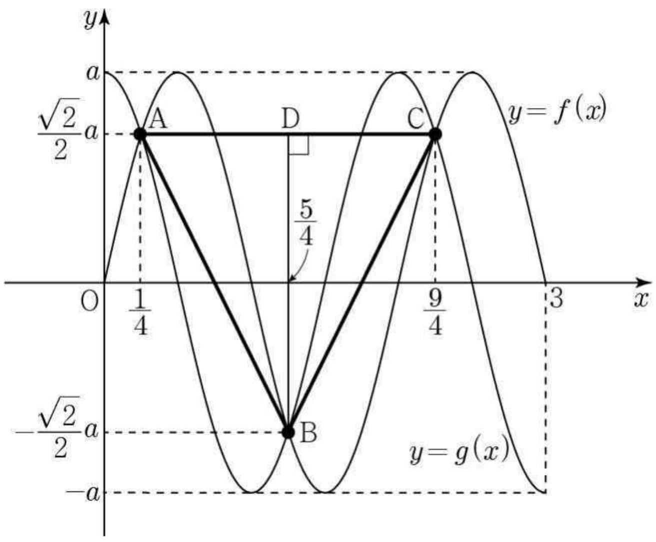
$f(x)=g(x)$의 실근이므로 $a\sin\pi x=a\cos\pi x$, $\tan\pi x=1\pi x=\dfrac{\pi}{4}$,

$\dfrac{5}{4}\pi$, $\dfrac{9}{4}\pi$ $(0\leq\ \pi x\leq\ 3\pi)$

$x=\dfrac{1}{4}$, $\dfrac{5}{4}$, $\dfrac{9}{4}$곡선 $y=f(x)$와 곡선 $y=g(x)$가 만나는 서로 다른 세

점을 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $\mathrm{B}\left(\dfrac{5}{4},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)$, $\mathrm{C}\left(\dfrac{9}{4},\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)$라 하고, 점

B에서 선분 AC에 내린 수선의 발을 D라 하자.



$\overline{\mathrm{AC}}=\dfrac{9}{4}-\dfrac{1}{4}=2$

$\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}a-\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2}a\right)=\sqrt{2}\,a$

삼각형 ABC의 넓이는

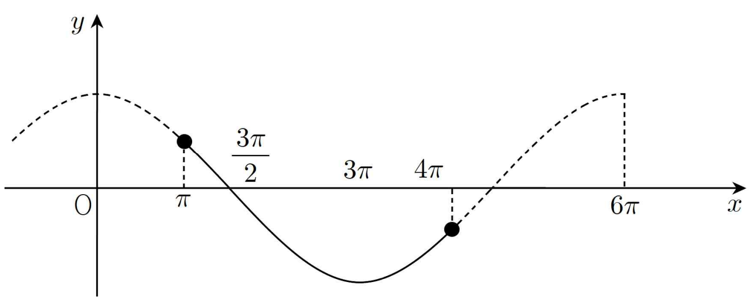
$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{BD}}=\dfrac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}\,a=2$

$a=\sqrt{2}$

따라서 $a^2=2$

2. **정답** ⑤

주기는 $\dfrac{2\pi}{b}=6\pi$이므로 $b=\dfrac{1}{3}$



위의 그림에서 보듯이 최댓값은 $f(\pi)$이므로 $a\cos\dfrac{\pi}{3}=1$

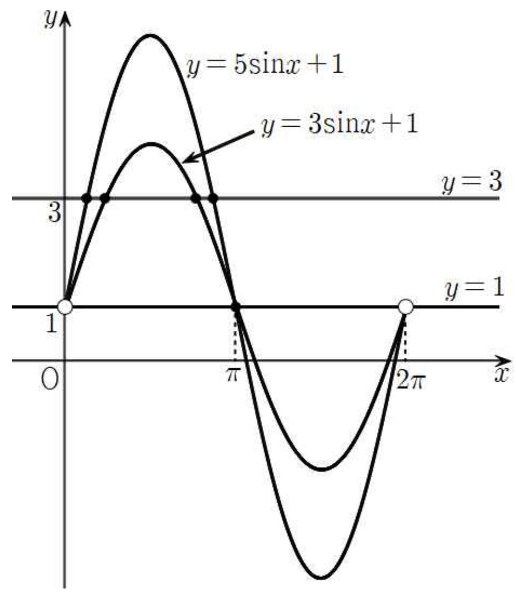
$\therefore\ a=2,\ b=\dfrac{1}{3},\ a+b=\dfrac{7}{3}$

3. [정답] 24

[출처]	2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 20 [4.00점]

[해설]

(ⅰ) $b=1$일 때

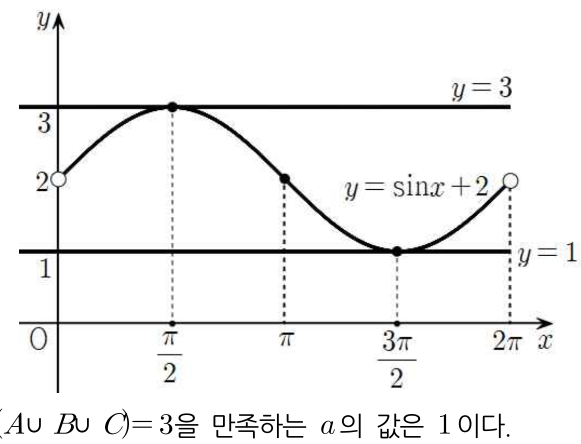


$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족하는 a의 값의 범위는

$3\leq\ a\leq\ 5$

$\therefore\ \ 4\leq\ a+b\leq\ 6$

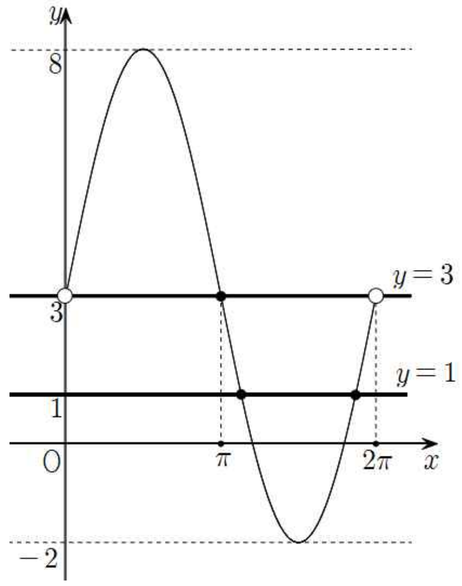
(ⅱ) $b=2$일 때



$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족하는 a의 값은 1이다.

$\therefore\ \ a+b=1+2=3$

(ⅲ) $b=3$일 때

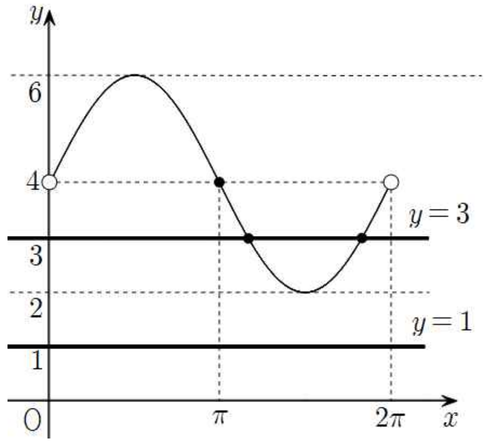


$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족하는 a의 값의 범위는

$3\le a\le 5$

$\therefore\ 6\le a+b\le 8$

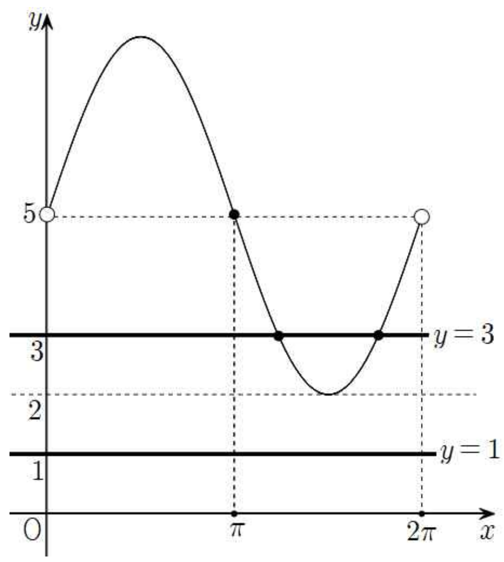
(iv) $b=4$일 때



$n(A\cup B\cup C)=3$을 만족하는 a의 값은 2이므로

$a+b=6$

(v) $b=5$일 때



$n(A\cup B\cup C)$를 만족하는 a의 값은 3이므로

$a+b=8$

이상에서 $m=3,\ M=8$

$\therefore\ M\times m=8\times 3=24$

4. [정답] 15

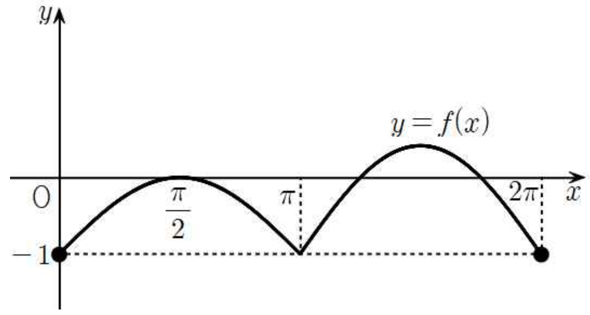
[해설]

닫힌구간 $[0,2\pi]$에서 정의된 함수

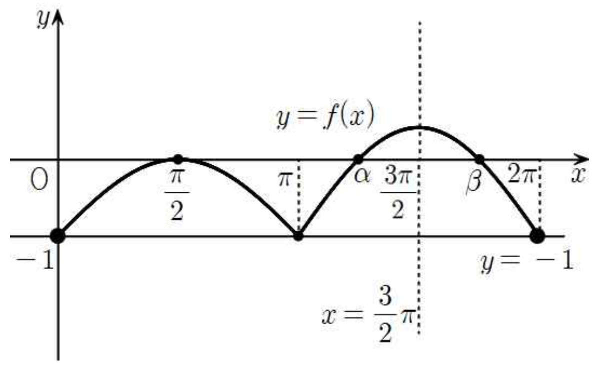
$$f(x)=\begin{cases}\sin x-1 & (0\le x<\pi)\\ -\sqrt{2}\sin x-1 & (\pi\le x\le 2\pi)\end{cases}$$

에서 함수 $y=f(x)$의 그래프는 $0\le x<\pi$에서 $y=\sin x$의 그래프를 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이고

$\pi\le x\le 2\pi$에서 $y=\sqrt{2}\sin x$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후 y축의 방향으로 -1만큼 평행이동한 것이므로 좌표평면에 나타내면 다음과 같다.



따라서 방정식 $f(x)=f(t)$의 서로 다른 실근은 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=f(t)$의 교점의 x좌표이다.



교점의 개수가 3인 경우는 $f(t)=0$ 또는 $f(t)=-1$

$f(t)=-1$에서 $t=0$ 또는 $t=\pi$ 또는 $t=2\pi$

$\pi\le x\le 2\pi$에서 $-\sqrt{2}\sin x-1=0$을 만족시키는 두 근을 $\alpha,\ \beta$라 하면 $f(t)=0$에서

$$t=\frac{\pi}{2}\ \text{또는}\ t=\alpha\ \text{또는}\ t=\beta$$

이때 $\alpha+\beta=3\pi$이므로 모든 t의 값의 합은

$$0+\frac{\pi}{2}+\pi+2\pi+3\pi=\frac{13}{2}\pi$$

$\therefore\ p+q=2+13=15$

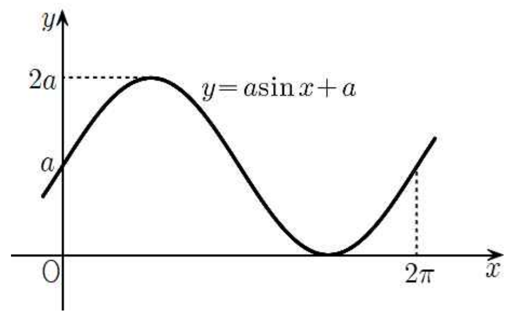
5. [정답] ①

[해설]

$-1\le \sin bx\le 1$이므로 함수 $f(x)$의 최솟값은 0이고 최댓값은 $2a$이다. 이때 b가 자연수이므로

(i) $b=1$일 때

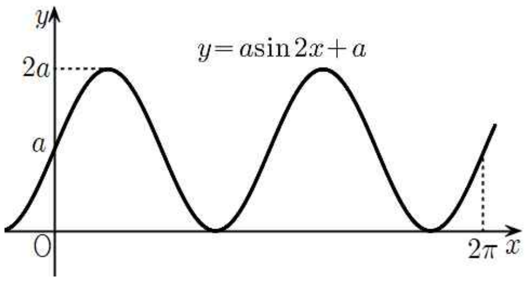
$f(x)=a\sin x+a$이므로 함수 $f(x)$의 주기는 2π이다.



그림에서 $0\le x\le 2\pi$일 때 함수 $y=f(x)$의 그래프와 직선 $y=2$는 서로 다른 네 점에서 만나지 않는다.

(ii) $b=2$일 때

$f(x)=a\sin 2x+a$ 이고 $f(x)$ 의 주기는 π 이다.



그림에서 $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 의 교점이 4 개이려면

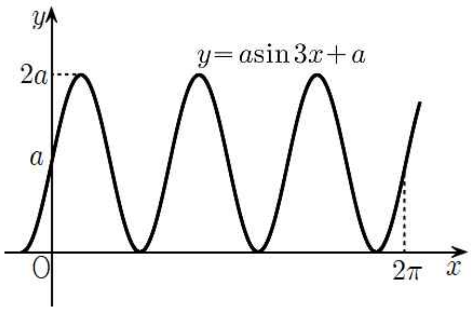
$$a \neq 2,\ 0<2<2a$$

이어야 한다. 즉, 자연수 a 의 최솟값은 3 이므로 ab 의 최솟값은

$$3 \times 2=6$$

(iii) $b=3$ 일 때

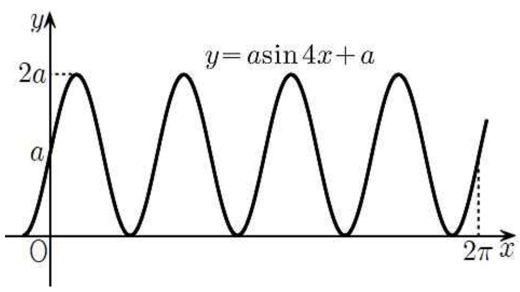
$f(x)=a\sin 3x+a$ 이고 $f(x)$ 의 주기는 $\dfrac{2}{3}\pi$ 이다.



그림에서 $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 는 서로 다른 네 점에서 만나지 않는다.

(iv) $b=4$ 일 때

$f(x)=a\sin 4x+a$ 이므로 함수 $f(x)$ 의 주기는 $\dfrac{1}{2}\pi$ 이다.



그림에서 $0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 의 교점이 4 개이려면

$$2a=2,\ a=1$$

이어야 한다. 즉, 자연수 a 의 최솟값은 1 이므로 ab 의 최솟값은

$$1 \times 4=4$$

(v) $b \geq 5$ 일 때

$0 \leq x \leq 2\pi$ 일 때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프와 직선 $y=2$ 는 서로 다른 네 점에서 만나지 않는다.

이상에서 ab 의 최솟값은 4이다.

6. [정답] 19

7. [정답] 36

[해설]

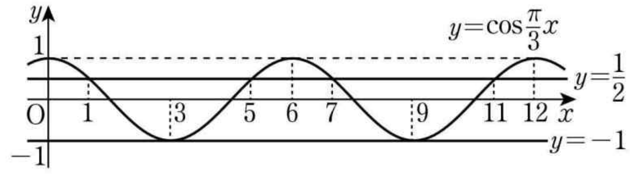
$f(g(x))=g(x)$ 에서 $g(x)=t\ (-1 \leq t \leq 1)$ 이라 하면 $f(t)=t$ 에서

$2t^2+2t-1=t,\ (2t-1)(t+1)=0$

$t=\dfrac{1}{2}$ 또는 $t=-1$ 이므로 $g(x)=\dfrac{1}{2}$ 또는 $g(x)=-1$

함수 $g(x)=\cos\dfrac{\pi}{3}x$ 의 주기는 6이고, $g(1)=g(5)=\dfrac{1}{2}$,

$g(3)=-1$ 이다.



그러므로 $0 \leq x < 12$ 에서 $g(7)=g(11)=\dfrac{1}{2}$, $g(9)=-1$ 이다. 따라서 구하는 모든 실수 x 의 값의 합은 $1+3+5+7+9+11=36$

8. [정답] ⑤

[출처]	2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 10 [4.00점]

[해설]

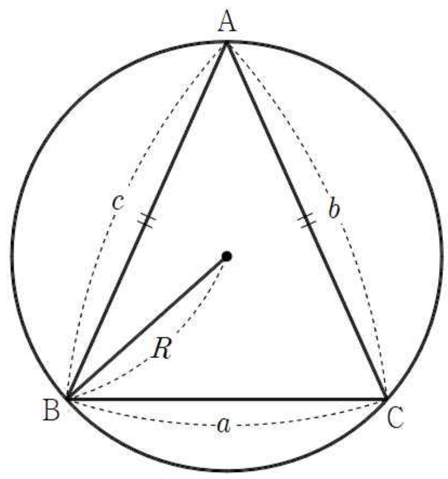
삼각형 ABC 의 외접원의 넓이가 9π 이므로 외접원의 반지름의 길이를 R 라 하면 $R=3$

조건 (가)에서 $3\sin A=2\sin B$ 이므로

$$\frac{3a}{2R}=\frac{2b}{2R} \qquad \therefore\ 3a=2b$$

조건 (나)에서 $\cos B=\cos C$ 이므로

$$\angle \mathrm{B}=\angle \mathrm{C} \qquad \therefore\ b=c$$



삼각형 ABC 에서 코사인법칙에 의하여

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}=\frac{b^2+b^2-\left(\frac{2}{3}b\right)^2}{2b^2}=\frac{7}{9}$$

$$\sin A=\sqrt{1-\left(\frac{7}{9}\right)^2}=\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

삼각형 ABC 에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{a}{\sin A}=2R, \qquad a=2\times 3\times\frac{4\sqrt{2}}{9}=\frac{8\sqrt{2}}{3}$$

따라서 삼각형 ABC 의 넓이를 S 라 하면

$$S=\frac{1}{2}\times b\times c\times\sin A$$

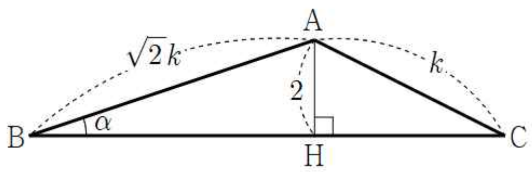
$$=\frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{2}a\right)\times\left(\frac{3}{2}a\right)\times\frac{4\sqrt{2}}{9}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}a^2$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \left(\frac{8\sqrt{2}}{3}\right)^2$$
$$= \frac{64\sqrt{2}}{9}$$

9. [정답] ①

[해설]



삼각형 ABC의 외접원의 넓이가 50π이므로 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 $R = 5\sqrt{2}$

$\overline{\mathrm{AB}} = \sqrt{2}k$, $\overline{\mathrm{AC}} = k$ $(k > 0)$으로 놓고 $\angle \mathrm{ABC} = \alpha$라 하면 삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{k}{\sin\alpha} = 2R = 10\sqrt{2}, \quad \sin\alpha = \frac{k}{10\sqrt{2}} \quad \cdots\cdots ㉠$$

직각삼각형 ABH에서 $\sin\alpha = \frac{2}{\sqrt{2}k}$ $\cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡을 연립하면

$$\frac{k}{10\sqrt{2}} = \frac{2}{\sqrt{2}k}, \quad k^2 = 20$$

직각삼각형 ABH에서 피타고라스의 정리에 의하여

$$\overline{\mathrm{BH}} = \sqrt{\overline{\mathrm{AB}}^2 - \overline{\mathrm{AH}}^2} = \sqrt{2k^2 - 4} = 6$$

10. [정답] 64

11. [정답] ①

[해설]

삼각형 ABC의 외접원을 C_1,

삼각형 ADC의 외접원을 C_2라 하자.

원 C_1의 반지름의 길이를 R이라 하면

삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle \mathrm{BAC})} = \frac{\frac{36\sqrt{7}}{7}}{\frac{2\sqrt{7}}{7}} = 18 = 2R, \ R = 9$$

원 C_2에서 $\angle \mathrm{AO'D}$는 호 AD의 중심각,

$\angle \mathrm{ACD}$는 호 AD의 원주각이므로

$$\angle \mathrm{AO'D} = 2\angle \mathrm{ACD} = \frac{2}{3}\pi$$

이등변삼각형 $\mathrm{O'AD}$에서 $\angle \mathrm{AO'D} = \frac{2}{3}\pi$이므로

$$\angle \mathrm{DAO'} = \frac{\pi}{6}$$

$\overline{\mathrm{OA}} = R = 9$, $\overline{\mathrm{AO'}} = 5\sqrt{3}$

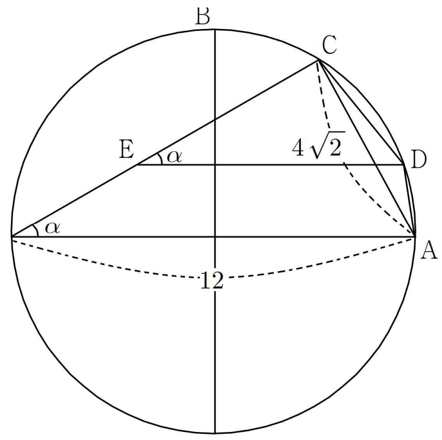
$\angle \mathrm{OAO'} = \frac{\pi}{6}$이므로

삼각형 $\mathrm{AOO'}$에서 코사인법칙에 의하여

$$\overline{\mathrm{OO'}}^2 = 9^2 + (5\sqrt{3})^2 - 2 \times 9 \times 5\sqrt{3} \times \cos\frac{\pi}{6}$$
$$= 81 + 75 - 135 = 21$$

따라서 $\overline{\overline{\mathrm{OO'}}} = 21$

12. 정답 64

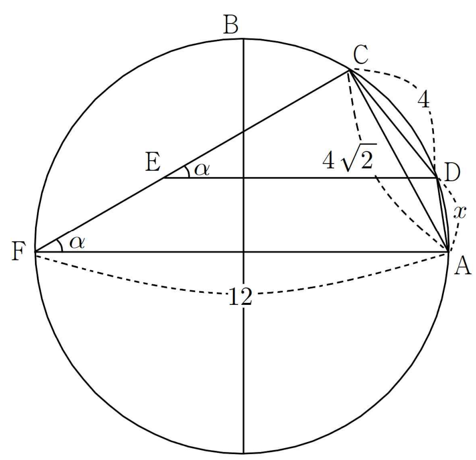


선분 AC의 연장선과 외접원과의 교점을 F라 할 때,

직각삼각형 ACF에서 $\sin\alpha = \frac{4\sqrt{2}}{12} = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 삼각형 CDE에서

$\frac{\overline{\mathrm{CD}}}{\sin\alpha} = 2R = 6\sqrt{2}$이므로 $\overline{\mathrm{CD}} = 6\sqrt{2} \times \sin\alpha = 6\sqrt{2} \times \frac{\sqrt{2}}{3} = 4$

$\angle \mathrm{CDA} = \pi - \alpha$, $\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $\cos(\pi - \alpha) = \frac{\sqrt{7}}{3}$



$\angle \mathrm{DAC} = \beta$라 할 때, 삼각형 ACD에서 사인법칙에 따라

$$\frac{4}{\sin\beta} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin\alpha}, \ \sin\beta = \frac{4}{4\sqrt{2}} \times \sin\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\sqrt{2}}{3} = \frac{1}{3}$$

삼각형 ACD에서 코사인 2법칙에 따라

$$x^2 + 32 - 8\sqrt{2}x \times \frac{2\sqrt{2}}{3} = 16, \ x^2 - \frac{32}{3}x + 16 = 0$$

$3x^2 - 32x + 48 = 0$, 근의 공식의 짝수 공식에 따라

$$x = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 144}}{3} = \frac{16}{3} \pm \frac{\sqrt{112}}{3} = \frac{16}{3} \pm \frac{4}{3}\sqrt{7}$$

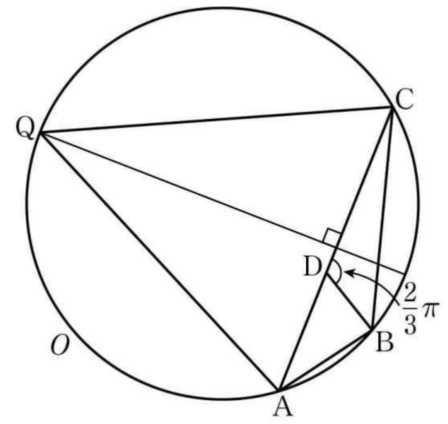
$$p = \frac{16}{3}, \ q = -\frac{4}{3}, \ \therefore \ 9|p \times q| = 9\left(\frac{16}{3} \times \frac{4}{3}\right) = 64$$

13. [정답] ②

[해설]

점 B를 포함하지 않는 호 AC와 선분 AC의 수직이등분선의 교점을 R라 하자. $\mathrm{P} = \mathrm{R}$일 때, 삼각형 PAC의 넓이가 최대가 되므로

Q$=$R이다.



$\cos(\angle \mathrm{ABC})= -\frac{5}{8}$이므로

$\cos(\angle \mathrm{CQA})=\cos(\pi-\angle \mathrm{ABC})= -\cos(\angle \mathrm{ABC})=\frac{5}{8}$

$\overline{\mathrm{QA}}=\overline{\mathrm{QC}}=6\sqrt{10}$이므로

삼각형 QAC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{QA}}^2+\overline{\mathrm{QC}}^2-2\times\overline{\mathrm{QA}}\times\overline{\mathrm{QC}}\times\cos(\angle \mathrm{CQA})$

$=(6\sqrt{10})^2+(6\sqrt{10})^2-2\times6\sqrt{10}\times6\sqrt{10}\times\frac{5}{8}=270$

$\overline{\mathrm{AB}}=a\ (a>0)$이라 하면 $2\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}$에서 $\overline{\mathrm{BC}}=2a$이다.

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2+\overline{\mathrm{BC}}^2-2\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BC}}\times\cos(\angle \mathrm{ABC})$

$=a^2+(2a)^2-2\times a\times 2a\times\left(-\frac{5}{8}\right)=\frac{15}{2}a^2$

$\frac{15}{2}a^2=270$에서 $a=6$

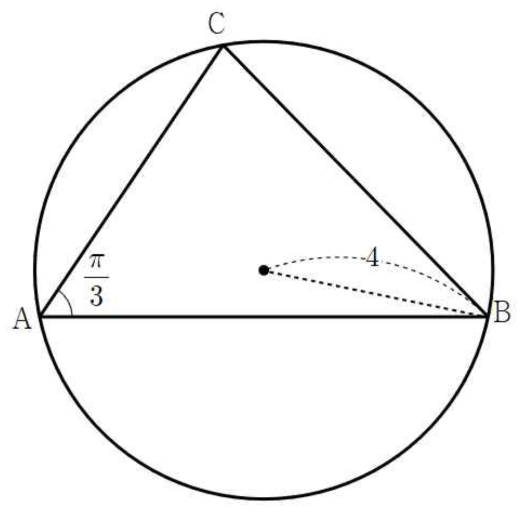
삼각형 CDB의 외접원의 반지름의 길이를 R라 하면 삼각형 CDB에서 사인법칙에 의하여

$$2R=\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin(\angle \mathrm{CDB})}=\frac{2a}{\sin\frac{2}{3}\pi}=\frac{12}{\frac{\sqrt{3}}{2}}=8\sqrt{3}$$

따라서 $R=4\sqrt{3}$

14. [정답] ④

[해설]



삼각형 ABC에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{\mathrm{BC}}}{\sin\frac{\pi}{3}}=2\times4 \quad \therefore\ \overline{\mathrm{BC}}=4\sqrt{3}$$

삼각형 ABC의 넓이가 $4\sqrt{3}$ 이므로

$$\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{CA}}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\sin\frac{\pi}{3}=4\sqrt{3}$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CA}}\times\overline{\mathrm{AB}}=16$

삼각형 ABC에서 코사인법칙에 의하여

$$48=\overline{\mathrm{CA}}^2+\overline{\mathrm{AB}}^2-2\times\overline{\mathrm{CA}}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\cos\frac{\pi}{3}$$

$$=(\overline{\mathrm{CA}}+\overline{\mathrm{AB}})^2-3\overline{\mathrm{CA}}\times\overline{\mathrm{AB}}$$

$$=(\overline{\mathrm{CA}}+\overline{\mathrm{AB}})^2-3\times16$$

$\therefore\ \overline{\mathrm{CA}}+\overline{\mathrm{AB}}=4\sqrt{6}$

$\therefore\ \overline{\mathrm{AB}}+\overline{\mathrm{BC}}+\overline{\mathrm{CA}}=4\sqrt{3}+4\sqrt{6}=4(\sqrt{3}+\sqrt{6})$

Ch③ 수열

TH①. 등차수열

2024년 7월 교육청모의고사

1. 공차가 $d\ (0<d<1)$인 등차수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) a_5는 자연수이다.
(나) 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, $S_8=\dfrac{68}{3}$이다.

a_{16}의 값은?

① $\dfrac{19}{3}$ ② $\dfrac{77}{12}$ ③ $\dfrac{13}{2}$
④ $\dfrac{79}{12}$ ⑤ $\dfrac{20}{3}$

2024년 5월 교육청모의고사

2. 공차가 정수인 두 등차수열 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$과 자연수 $m\ (m\geq 3)$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $|a_1-b_1|=5$
(나) $a_m=b_m$, $a_{m+1}<b_{m+1}$

$\sum_{k=1}^{m}a_k=9$일 때, $\sum_{k=1}^{m}b_k$의 값은?2.

① -6 ② -5 ③ -4
④ -3 ⑤ -2

3. 공차가 음의 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여

$$a_6 = -2,\ \sum_{k=1}^{8}|a_k| = \sum_{k=1}^{8}a_k + 42$$

일 때, $\sum_{k=1}^{8}a_k$의 값은?

① 40 ② 44 ③ 48
④ 52 ⑤ 56

4. 수열 $\{a_n\}$은 등차수열이고, 수열 $\{b_n\}$은 모든 자연수 n에 대하여

$$b_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$$

를 만족시킨다. $b_2 = -2$, $b_3 + b_7 = 0$일 때, 수열 $\{b_n\}$의 첫째항부터 제9항까지의 합은?

① -22 ② -20 ③ -18
④ -16 ⑤ -14

5. 공차가 0이 아닌 등차수열 $\{a_n\}$이

$$a_{12}=5,\ |a_5|=|a_{13}|$$

을 만족시킬 때, a_{24}의 값을 구하시오.

6. 첫째항과 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$에 대하여 수열 $\{b_n\}$이

$$b_n=n^2\sin(\pi a_n)+n\cos(\pi a_n)+1$$

$$\sum_{n=1}^{7} b_n=3$$

을 만족시킬 때, $b_{48}+b_{49}+b_{50}$의 값은?

① 48 ② 50 ③ 52 ④ 54 ⑤ 56

TH②. 귀납법

2025학년도 6월 평가원모의고사

2025 Trend

7. 수열 $\{a_n\}$은

$$a_2 = -a_1$$

이고, $n \geq 2$인 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1} = \begin{cases} a_n - \sqrt{n} \times a_{\sqrt{n}} & (\sqrt{n}\text{이 자연수이고 } a_n > 0\text{인 경우}) \\ a_n + 1 & (\text{그 외의 경우}) \end{cases}$$

를 만족시킨다. $a_{15} = 1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱을 구하시오.

2025학년도 9월 평가원모의고사

2025 Trend

8. 양수 k에 대하여 $a_1 = k$인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $a_2 \times a_3 < 0$

(나) 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(a_{n+1} - a_n + \frac{2}{3}k\right)(a_{n+1} + ka_n) = 0\text{이다.}$$

$a_5 = 0$이 되도록 하는 서로 다른 모든 양수 k에 대하여 k^2의 값의 합을 구하시오.

9. 모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 다음 조건을 만족시킬 때, 모든 a_1의 값의 합을 구하시오.

(가) 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n+1 & (a_n\text{은 홀수}) \\ \dfrac{a_n}{2} & (a_n\text{은 짝수}) \end{cases}$$

(나) $a_5=1$

2025학년도 경찰대학교

10. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제n항까지의 합을 S_n이라 할 때, 모든 자연수 n에 대하여

$$S_n=2a_n-pn$$

이다. $\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\frac{p+a_k}{a_k a_{k+1}}=3$일 때, 상수 p의 값은?

① $\dfrac{36}{127}$ ② $\dfrac{38}{127}$ ③ $\dfrac{40}{127}$ ④ $\dfrac{42}{127}$ ⑤ $\dfrac{44}{127}$

2025학년도 사관학교

11. 다음 조건을 만족시키는 모든 수열 $\{a_n\}$에 대하여 $|a_5|$의 최댓값과 최솟값을 각각 M, m이라 할 때, $M+m$의 값은?

> (가) $a_2=27$, $a_3a_4>0$
>
> (나) 2 이상의 모든 자연수 n에 대하여 $\sum_{k=1}^{n} a_k = 2|a_n|$이다.

① 224 ② 232 ③ 240 ④ 248 ⑤ 256

2025년 7월 교육청모의고사

12. 첫째항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} \frac{1}{2}a_n & \left(\frac{1}{2}a_n\text{이 자연수인 경우}\right) \\ (a_n-1)^2 & \left(\frac{1}{2}a_n\text{이 자연수가 아닌 경우}\right) \end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_7=1$이 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?

① 120 ② 125 ③ 130 ④ 135 ⑤ 140

13. 수열 $\{a_n\}$의 첫째항부터 제 n항까지의 합을 S_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 $a_{n+1}=1-4\times S_n$이고, $a_4=4$일 때, $a_1\times a_6$의 값은?

① 5 ② 10 ③ 15
④ 20 ⑤ 25

2024년 5월 교육청모의고사

14. 첫째 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases}\dfrac{a_n}{3} & (a_n\text{이 3의 배수인 경우})\\[2ex] \dfrac{{a_n}^2+5}{3} & (a_n\text{이 3의 배수가 아닌 경우})\end{cases}$$

를 만족시킬 때, $a_4+a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 합은?14.

① 63 ② 66 ③ 69
④ 72 ⑤ 75

15. 수열 $\{a_n\}$이 모든 자연수 n에 대하여

$$a_{n+1}=\begin{cases} a_n & (a_n > n) \\ 3n-2-a_n & (a_n \le n) \end{cases}$$

을 만족시킬 때, $a_5=5$가 되도록 하는 모든 a_1의 값의 곱은?

① 20 ② 30 ③ 40
④ 50 ⑤ 60

1. [정답] ⑤

[해설]
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a라 하자.
$a_n = a+(n-1)d$ (단, n은 자연수)
$a_5 = a+4d$는 자연수이다.
$S_8 = \frac{8(2a+7d)}{2} = 4(2a+7d) = \frac{68}{3}$
$2a+7d = \frac{17}{3}$
$2(a+4d)-d = 2a_5 - d = \frac{17}{3}$
$a_5 = \frac{1}{2}d + \frac{17}{6}$
$0 < d < 1$이므로 $\frac{17}{6} < a_5 < \frac{10}{3}$
$a_5 = 3,\ d = \frac{1}{3}$
$a_5 = a + 4\times\frac{1}{3} = 3,\ a = \frac{5}{3}$
$a_n = \frac{5}{3} + (n-1)\times\frac{1}{3}$
따라서 $a_{16} = \frac{5}{3} + 15\times\frac{1}{3} = \frac{20}{3}$

2. **정답** ①
$a_n - b_n$도 등차수열이므로 $a_n - b_n = \mathrm{A}n + \mathrm{B}$이라 할 때,
$a_1 - b_1 = 5$ 또는 -5 이므로 $\mathrm{A}+\mathrm{B} = 5$ 또는 $\mathrm{A}+\mathrm{B} = -5$
(ⅰ) $\mathrm{A}+\mathrm{B} = 5$일 때,
(가) 조건은 $a_m - b_m = \mathrm{A}m + \mathrm{B} = 0$이므로 $\mathrm{A}+\mathrm{B} = 5$와 양변을 빼면
$\mathrm{A}(m-1) = -5$에서 m은 $m \geq 3$인 자연수이므로 $\mathrm{A} = -1,\ m = 6$
$-1+\mathrm{B} = 5,\ \mathrm{B} = 6,\ \therefore\ a_n - b_n = -n+6,\ a_7 - b_7 = -1 < 0$
(ⅱ) $\mathrm{A}+\mathrm{B} = -5$일 때,
$\begin{cases} \mathrm{A}m+\mathrm{B} = 0 \\ \mathrm{A}+\mathrm{B} = -5 \end{cases}$에서 $\mathrm{A}(m-1) = 5,\ \mathrm{A} = 1,\ m = 6$
$a_n - b_n = n-6,\ a_7 - b_7 = 1$이므로 조건에 맞지 않는다.
$\therefore\ a_n - b_n = -n+6$
$\sum_{k=1}^{6}(a_k - b_k) = \sum_{k=1}^{6}(-k+6) = \frac{6(5+0)}{2} = 15$
$\therefore\ \sum_{k=1}^{6} b_k = \sum_{k=1}^{6} a_k - 15 = 9 - 15 = -6$

3. [정답] ②

[해설]
등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d $(d<0)$이라 하자.
a_6, d가 모두 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.
$d = a_6 - a_5 = -2 - a_5$이고 $d < 0$이므로 $a_5 > -2$
즉, $a_5 = -1$ 또는 a_5는 음이 아닌 정수이다.
(ⅰ) $a_5 = -1$일 때
$d = -2 - a_5 = -1$이므로 $a_n = -n+4$
$\sum_{k=1}^{8} a_k = -4,\ \sum_{k=1}^{8}|a_k| = 16$이므로
$\sum_{k=1}^{8}|a_k| = \sum_{k=1}^{8} a_k + 42$ …… ㉠
이 성립하지 않는다.
(ⅱ) a_5는 음이 아닌 정수일 때
$n \leq 5$일 때 $a_n \geq 0$이고 $|a_n| = a_n$
$n \geq 6$일 때 $a_n < 0$이고 $|a_n| = -a_n$
㉠에서 $-a_6 - a_7 - a_8 = a_6 + a_7 + a_8 + 42$
$a_6 + a_7 + a_8 = -21$
$a_6 + (a_6 + d) + (a_6 + 2d) = -21,\ a_6 + d = -7$
$a_6 = -2$이므로 $d = -5$
(ⅰ), (ⅱ)에서 $d = -5$이고 $a_1 = a_6 - 5d = -2 + 25 = 23$이다.
따라서 $\sum_{k=1}^{8} a_k = \frac{8\times\{2\times23 + 7\times(-5)\}}{2} = 44$

4. [정답] ②

[해설]
$b_2 = -2$에서 $a_1 - a_2 = -2$ …… ㉠
$b_3 + b_7 = 0$에서
$(a_1 - a_2 + a_3) + (a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7) = 0$ …… ㉡
등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항을 a, 공차를 d라 하면
㉠에서 $-d = -2$이므로 $d = 2$
㉡에서 $(a+d) + (a+3d) = 0$
$\therefore\ a = -4$
$b_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$에서
$b_1 = a_1 = a$
$b_2 = a_1 - a_2 = -d$
$b_3 = a_1 - a_2 + a_3 = a + d$
$\vdots$
$b_9 = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + a_7 - a_8 + a_9$
$= a + 4d$
$b_2 + b_3 = b_4 + b_5 = b_6 + b_7 = b_8 + b_9 = a$ 이므로
$\sum_{k=1}^{9} b_k = 5a = -20$

5. [정답] 25

6. [정답] ③

[해설]
첫째항과 공차가 정수인 등차수열 $\{a_n\}$은 모든 항이 정수이므로

$\sin(\pi a_n)=0$이고 $\cos(\pi a_n)$ 은 a_n이 홀수일 때 -1, 짝수일 때 1이므로

$$b_n=\begin{cases}-n+1 & (n\text{이 홀수})\\ n+1 & (n\text{이 짝수})\end{cases}$$

이때 $\sum_{n=1}^{7} b_n = 3$이므로 수열 $\{a_n\}$의 첫째항과 공차가 모두 홀수일 때

$$\sum_{n=1}^{7} b_n = 0+3-2+5-4+7-6=3$$

을 만족한다.

b_{48}, b_{50}은 짝수, b_{49}는 홀수이므로

$$b_{48}+b_{49}+b_{50}=49-48+51=52$$

7. [정답] 231

[출처]	2024년(2025학년도) 평가원 고3공통 06월 공통범위 22 [4.00점]

[해설]

$a_1=-\alpha$, $a_2=\alpha$라 하면

$$a_3=\alpha+1,\ a_4=\alpha+2$$

(ⅰ) $a_4 \le 0$, $a_9 \le 0$인 경우

$a_4=\alpha+2$ $(\alpha\le -2)$이므로 $a_9=\alpha+7$ $(\alpha\le -7)$

$a_{15}=\alpha+13$

$a_{15}=1$이므로 $\alpha+13=1$

$\alpha=-12$이므로 $a_1=12$

(ⅱ) $a_4 \le 0$, $a_9>0$인 경우

$a_4=\alpha+2$ $(\alpha\le -2)$이므로 $a_9=\alpha+7$

$a_9>0$이므로 $\alpha>-7$

$a_{10}=a_9-3a_3=\alpha+7-3(\alpha+1)=-2\alpha+4$

$\therefore\ a_{15}=-2\alpha+9$

$a_{15}=1$이므로 $-2\alpha+9=1$

$\therefore\ \alpha=4$

그런데 $\alpha\le -2$이므로 모순이다.

(ⅲ) $a_4>0$, $a_9\le 0$인 경우

$a_4=\alpha+2$이므로 $\alpha>-2$

$a_5=a_4-2a_2=\alpha+2-2\alpha=-\alpha+2$

$a_9=-\alpha+6$이므로 $\alpha\ge 6$

$\therefore\ a_{15}=-\alpha+12$

$a_{15}=1$이므로 $-\alpha+12=1$

$\therefore\ \alpha=11$

$\therefore\ a_1=-11$

(ⅳ) $a_4>0$, $a_9>0$인 경우

$a_4=\alpha+2$에서 $\alpha>-2$

$a_5=a_4-2a_2=\alpha+2-2\alpha=-\alpha+2$

$a_9=-\alpha+6$이므로 $\alpha<6$

$a_{10}=a_9-3a_3=-\alpha+6-3(\alpha+1)=-4\alpha+3$

$\therefore\ a_{15}=-4\alpha+8$

$a_{15}=1$이므로 $-4\alpha+8=1$

$\therefore\ \alpha=\frac{7}{4}$

$\therefore\ a_1=-\frac{7}{4}$

이상에서 만족시키는 a_1은 12, -11, $-\frac{7}{4}$이므로 모든 a_1의 값의 곱은

$$12\times(-11)\times\left(-\frac{7}{4}\right)=231$$

8. [정답] 8

[해설]

조건 (나)에서 모든 자연수 n에 대하여

$$\left(a_{n+1}-a_n+\frac{2}{3}k\right)(a_{n+1}+ka_n)=0$$

이므로

$$a_{n+1}-a_n=-\frac{2}{3}k \text{ 또는 } a_{n+1}=-ka_n$$

$a_1=k$이고 $a_2\times a_3<0$이므로 $a_2=-k^2$이면 $a_3=k^3$이어야 하고, $a_2=\frac{k}{3}$이면 $a_3=-\frac{k^2}{3}$ 또는 $a_3=-\frac{k}{3}$이다. 따라서 이를 표로 나타내면 다음과 같다.

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5
k	$-k^2$	k^3	$-k^4$	0
k	$-k^2$	k^3	$k^3-\frac{2}{3}k$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k^2}{3}$	$\frac{k^3}{3}$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k^2}{3}$	$-\frac{k^2}{3}-\frac{2}{3}k$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k}{3}$	$\frac{k^2}{3}$	0
k	$\frac{k}{3}$	$-\frac{k}{3}$	$-k$	0

(ⅰ) $a_4=-k^4$일 때

$a_5=k^5$ 또는 $a_5=-k^4-\frac{2}{3}k$이므로 $a_5=0$을 만족시키는 k는 존재하지 않는다.

(ⅱ) $a_4=k^3-\frac{2}{3}k$일 때

(a) $a_5=\left(k^3-\frac{2}{3}k\right)\times(-k)$인 경우

$$-k^2\left(k^2-\frac{2}{3}\right)=0 \qquad \therefore\ k^2=\frac{2}{3}$$

(b) $a_5=\left(k^3-\frac{2}{3}k\right)-\frac{2}{3}k$인 경우

$$k^3-\frac{4}{3}k=0 \qquad \therefore\ k^2=\frac{4}{3}$$

(ⅲ) $a_4=\frac{k^3}{3}$일 때

$$\frac{k^3}{3}-\frac{2}{3}k=0 \qquad \therefore\ k^2=2$$

(iv) $a_4 = -\dfrac{k^2}{3} - \dfrac{2}{3}k$ 일 때

$a_5 = 0$ 을 만족시키는 k 는 존재하지 않는다.

(v) $a_4 = \dfrac{k^2}{3}$ 일 때

$$\frac{k^2}{3} - \frac{2}{3}k = 0 \qquad \therefore \quad k^2 = 4$$

(vi) $a_4 = -k$ 인 경우

$a_5 = 0$ 을 만족시키는 k 는 존재하지 않는다.

이상에서 조건을 만족시키는 모든 양수 k 에 대하여 k^2 의 값의 합은

$$\frac{2}{3} + \frac{4}{3} + 2 + 4 = 8$$

9. [정답] 34

[해설]

모든 항이 자연수인 수열 $\{a_n\}$ 에 대하여 조건 (가)에 의하여 다음이 성립한다.

$$a_n = \begin{cases} 2a_{n+1} & (a_{n+1}\text{이 홀수}) \\ 2a_{n+1} \text{ 또는 } a_{n+1} - 1 & (a_{n+1}\text{이 짝수}) \end{cases}$$

…… ㉠

$a_5 = 1$ 이므로 ㉠에 의하여 차례로 a_4, a_3, a_2, a_1 을 구하면 다음과 같다.

$a_4 = 2$

$a_3 = 1$ 또는 $a_3 = 4$

(ⅰ) $a_3 = 1$ 일 때

$a_2 = 2$ 이므로 　 $a_1 = 1$ 또는 $a_1 = 4$

(ⅱ) $a_3 = 4$ 일 때

$a_2 = 3$ 또는 $a_2 = 8$

$a_2 = 3$ 이면 $a_1 = 6$ 이고 $a_2 = 8$ 이면 $a_1 = 7$ 또는 $a_1 = 16$

(ⅰ), (ⅱ)에서 a_1 의 값은 1, 4, 6, 7, 16 이므로 모든 a_1 의 값의 합은

$$1 + 4 + 6 + 7 + 16 = 34$$

10. [정답] ④

[해설]

$S_n = 2a_n - pn$ 에서

$$S_1 = a_1 = 2a_1 - p \qquad \therefore \quad a_1 = p$$

$$S_n - S_{n-1} = 2(a_n - a_{n-1}) - pn + p(n-1) \ (n \geq 2)$$

$$\therefore \quad a_n = 2a_{n-1} + p \ (n \geq 2)$$

$a_n = 2a_{n-1} + p$ 에서 $a_n + p = 2(a_{n-1} + p)$ 이므로

$$a_n + p = (a_1 + p) \times 2^{n-1}$$

$$= 2p \times 2^{n-1}$$

$$\therefore \quad a_n = p(2^n - 1) \ (n \geq 2)$$

$S_1 = a_1$ 이므로

$$a_n = p(2^n - 1) \ (n \geq 1)$$

$$\sum_{k=1}^{6} \frac{p + a_k}{a_k a_{k+1}} = \sum_{k=1}^{6} \frac{p + a_k}{a_k(2a_k + p)}$$

$$= \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{2a_k + p} \right)$$

$$= \sum_{k=1}^{6} \left(\frac{1}{a_k} - \frac{1}{a_{k+1}} \right)$$

$$= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2} \right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{a_6} - \frac{1}{a_7} \right)$$

$$= \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_7}$$

$$= \frac{1}{p} - \frac{1}{127p}$$

$$= \frac{126}{127p}$$

따라서 $\dfrac{126}{127p} = 3$ 이므로 　 $p = \dfrac{42}{127}$

11. [정답] ①

12. [정답] ②

[해설]

a_1 이 자연수이고 모든 자연수 n 에 대하여 $a_{n+1} = \dfrac{1}{2}a_n$ 또는 $a_{n+1} = (a_n - 1)^2$ 이므로 수열 $\{a_n\}$ 의 모든 항은 음이 아닌 정수이다.

a_{n+1} 의 값에 따라 가능한 a_n 의 값은 다음과 같다.

(ⅰ) $a_{n+1} = (2k)^2$ 인 자연수 k 가 존재하는 경우 $a_n = \sqrt{a_{n+1}} + 1$ 또는 $a_n = 2a_{n+1}$

(ⅱ) $a_{n+1} = 1$ 인 경우, $a_n = 0$ 또는 $a_n = 2$

(ⅲ) $a_{n+1} = 0$ 인 경우, $a_n = 1$

(ⅳ) 그 외의 경우, $a_n = 2a_{n+1}$

(ⅰ)~ (ⅳ)에 의하여 $a_7 = 1$ 이므로 $a_6 = 0$ 또는 $a_6 = 2$

(ⅰ) $a_6 = 0$ 인 경우

$a_5 = 1$ 이고 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1) 은 $(0, 1, 0, 1)$ 또는 $(0, 1, 2, 4)$ 또는 $(2, 4, 3, 6)$ 또는 $(2, 4, 8, 16)$ 이므로 $a_1 = 1$ 또는 $a_1 = 4$ 또는 $a_1 = 6$ 또는 $a_1 = 16$

(ⅱ) $a_6 = 2$ 인 경우

$a_5 = 4$ 이고 순서쌍 (a_4, a_3, a_2, a_1) 은 $(3, 6, 12, 24)$ 또는 $(8, 16, 5, 10)$ 또는 $(8, 16, 32, 64)$ 이므로

$a_1 = 24$ 또는 $a_1 = 10$ 또는 $a_1 = 64$

따라서 (ⅰ), (ⅱ)에 의하여

모든 a_1 의 값의 합은

$1 + 4 + 16 + 6 + 24 + 10 + 64 = 125$

13. **정답** ①

$a_{n+1} = 1 - 4S_n$, $a_n = 1 - 4S_{n-1}$ 의 양변을 빼면

$a_{n+1} - a_n = -4(S_n - S_{n-1}) = -4a_n$, $a_{n+1} = -3a_n$,

$a_n = a(-3)^{n-1} (n \geq 2)$, $a_4 = 4$ 이므로 $4 = -27a$, $a = -\dfrac{4}{27}$

$\therefore \ a_n = \left(-\dfrac{4}{27} \right) (-3)^{n-1} \ (n \geq 2)$,

$a_1=S_1=\frac{a_2-1}{-4}=\frac{\frac{4}{9}-1}{-4}=\frac{5}{36}$

$\therefore\ a_1\times a_6=\frac{5}{36}\times\left(-\frac{4}{27}\right)\times(-3)^5=5$

14. **정답** ④

(i) $a_4=x$, x가 3의 배수일 때,

$a_5=\frac{x}{3}$, $a_4+a_5=x+\frac{x}{3}=\frac{4}{3}x=5$, $x=\frac{15}{4}$

3의 배수가 아니므로 조건에 맞지 않는다.

(ii) $a_4=x$, x가 3의 배수가 아닐 때,

$a_5=\frac{{a_4}^2+5}{3}=\frac{x^2+5}{3}$,

$a_4+a_5=x+\frac{x^2+5}{3}=5$, $3x+x^2+5=15$

$x^2+3x-10=(x+5)(x-2)=0$

$a_4=2$ 또는 -5

이제부터 a_3, a_2, a_1순으로 a, b, c라 하고, 각각의 경우에 3의 배수와 3의 배수가 아닐 때로 경우를 나눠 값을 구한다.

(㉠) $a_4=2$일 때,

a_3이 3의 배수일 때, $\frac{a_3}{3}=2$, $a_3=6$,

a_3이 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_3}^2+5}{3}=2$, ${a_3}^2=1$, $a_3=1$, -1

(㉡) $a_4=-5$일 때,

a_3이 3의 배수일 때, $\frac{a_3}{3}=-5$, $a_3=-15$,

a_3이 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_3}^2+5}{3}=-5$, ${a_3}^2=-20$

$\therefore$ 가능한 a_3의 값은 6, 1, -1, -15,

(a) $a_3=6$일 때,

a_2가 3의 배수일 때, $\frac{a_2}{3}=6$, $a_2=18$

a_2가 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_2}^2+5}{3}=6$, ${a_2}^2=13$, $a_2=\pm\sqrt{13}$

(b) $a_3=1$일 때,

a_2가 3의 배수일 때, $\frac{a_2}{3}=1$, $a_2=3$

a_2가 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_2}^2+5}{3}=1$, ${a_2}^2=-2$

조건에 맞지 않는다.

(c) $a_3=-1$일 때,

a_2가 3의 배수일 때, $\frac{a_2}{3}=-1$, $a_2=-3$

a_2가 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_2}^2+5}{3}=-1$, ${a_2}^2=-8$,

조건에 맞지 않는다.

(d) $a_3=-15$일 때,

a_2가 3의 배수일 때, $\frac{a_2}{3}=-15$, $a_2=-45$

a_2가 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_2}^2+5}{3}=-15$, ${a_2}^2=-50$

조건에 맞지 않는다.

$\therefore$ 가능한 a_2의 값은 18, $\pm\sqrt{13}$, 3, -3, -45

① $a_2=18$일 때,

a_1이 3의 배수일 때, $\frac{a_1}{3}=18$, $a_1=54$

a_1이 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_1}^2+5}{3}=18$, $a_1=49$, $a_1=\pm 7$

a_1은 자연수이므로 $a_1=7$

② $a_2=\pm\sqrt{13}$일 때,

a_1이 3의 배수일 때, $\frac{a_1}{3}=\pm\sqrt{13}$, $a_1=\pm 3\sqrt{13}$

자연수가 아니므로 만족하지 않는다.

a_1이 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_1}^2+5}{3}=\pm\sqrt{13}$

자연수가 아니므로 만족하지 않는다.

③ $a_2=3$

a_1이 3의 배수일 때, $\frac{a_1}{3}=3$, $a_1=9$

a_1이 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_1}^2+5}{3}=3$, ${a_1}^2=4$, $a_1=\pm 2$

a_1은 자연수이므로 $a_1=2$

④ $a_2=-3$일 때,

a_1이 3의 배수일 때, $\frac{a_1}{3}=-3$, $a_1=-9$

자연수가 아니므로 만족하지 않는다.

a_1이 3의 배수가 아닐 때, $\frac{{a_1}^2+5}{3}=-3$, ${a_1}^2=-14$

자연수가 아니므로 만족하지 않는다.

⑤ $a_2=-45$

자연수가 아니므로 만족하지 않는다.

$\therefore$ 54, 7, 9, 2, $54+7+9+2=72$

15. [정답] ③

[해설]

$a_4\le 4$이면 $a_5=10-a_4=5$에서 $a_4=5$이므로 $a_4\le 4$를 만족시키지 않는다. 그러므로 $a_4>4$이고 $a_4=a_5$에서 $a_4=5$이다.

$a_3>3$일 때, $a_3=a_4$에서 $a_3=5$이고

$a_3\le 3$일 때, $a_4=7-a_3=5$에서 $a_3=2$이다.

(i) $a_3=5$인 경우

① $a_2>2$이면 $a_2=a_3$에서 $a_2=5$이다.

$a_1>1$일 때, $a_1=a_2$에서 $a_1=5$이고

$a_1\le 1$일 때, $a_2=1-a_1=5$에서 $a_1=-4$이다.

② $a_2 \leq 2$이면 $a_3 = 4 - a_2 = 5$에서 $a_2 = -1$이다.

$a_1 > 1$일 때, $a_1 = a_2 = -1$이므로 $a_1 > 1$을 만족시키지 않는다.

$a_1 \leq 1$일 때, $a_2 = 1 - a_1 = -1$에서 $a_1 = 2$이므로 $a_1 \leq 1$을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_3 = 2$인 경우

① $a_2 > 2$이면 $a_2 = a_3$에서 $a_2 = 2$이므로 $a_2 > 2$를 만족시키지 않는다.

② $a_2 \leq 2$이면 $a_3 = 4 - a_2 = 2$에서 $a_2 = 2$이다.

$a_1 > 1$일 때, $a_1 = a_2$에서 $a_1 = 2$이고

$a_1 \leq 1$일 때, $a_2 = 1 - a_1 = 2$에서 $a_1 = -1$이다.

(ⅰ), (ⅱ)에서 $a_1 = 5$ 또는 $a_1 = -4$ 또는 $a_1 = 2$ 또는 $a_1 = -1$이다. 따라서 구하는 모든 a_1의 값의 곱은

$5 \times (-4) \times 2 \times (-1) = 40$

김지형
대치예섭