2026
이동훈
기출문제집
- 고1 수학 (평가원/교사경 편)

문제집

2026 이동훈 기출문제집 구매

https://atom.ac/books/12829

위의 링크로 들어가시면 추가 할인된 세트 상품 구매가 가능합니다.

2026 이동훈 기출 10 타이틀 출시 !

2026 이동훈 기출 수학Ⅰ 평가원 편 (유형별 개념 포함)
2026 이동훈 기출 수학Ⅱ 평가원 편 (유형별 개념 포함)
2026 이동훈 기출 미적분 평가원 편 (유형별 개념 포함)
2026 이동훈 기출 확률과 통계 평가원/교사경 편 (유형별 개념 포함)
2026 이동훈 기출 기하 평가원/교사경 편 (유형별 개념 포함) e-book only
2026 이동훈 기출 수학Ⅰ+수학Ⅱ 교사경 편
2026 이동훈 기출 미적분 교사경 편

2026 이동훈 기출 노베(4/5/6등급용) 수학Ⅰ+수학Ⅱ+미적분 평가원/교사경 편 e-book only
2026 이동훈 기출 노베(4/5/6등급용) 수학Ⅰ+수학Ⅱ+확률과 통계 평가원/교사경 편 e-book only

2026 이동훈 기출 고1 수학 평가원/교사경 편 pdf(무료) only

저자소개:

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 컨텐츠 개발자
오르비(Orbi)에서 활동 중 (닉네임: 이동훈t)

목차

Q. 다항식의 덧셈과 뺄셈, 곱셈과 나눗셈

Q001

○
(1997-인문예체능1/자연1)

$(125^2-75^2)\div\{5+(30-50)\div(-4)\}$의 값은? [2점]

① 75 ② 125 ③ 900
④ 1000 ⑤ 1225

Q002

○
(2002-예체능4)

다항식 $(3x^2+2x+1)^2$을 전개하였을 때, x^2의 계수는? [2점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

Q003

○○
(1994(1차)-공통5)

두 다항식 $(1+x+x^2+x^3)^3$, $(1+x+x^2+x^3+x^4)^3$의 x^3의 계수를 각각 a, b라 할 때, $a-b$의 값은? [3점]

① 4^3-5^3 ② 3^3-3^4 ③ 0
④ 1 ⑤ -1

Q004

○○
(2002-인문13/예체능13)

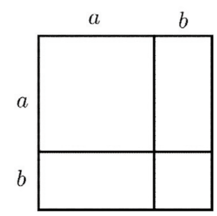
그림과 같이 넓이가 다른 세 종류의 직사각형 종이 네 장을 이용하여

$$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$$

임을 보일 수 있다. 이와 유사한 방법으로 부피가 다른 몇 종류의 직육면체 나무토막을 이용하여

$$(a+b)^3=a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

임을 보이고자 한다. 최소로 필요한 나무토막의 종류의 수와 전체의 개수를 순서대로 적은 것은? [2점]



① 3, 4 ② 3, 6 ③ 3, 8
④ 4, 6 ⑤ 4, 8

Q005

○○
(2003(9)-인문2/예체능2)

$x+y=5$이고 $x^3+y^3=35$일 때, xy의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

Q006

○
(1998-인문예체능3/자연3)

다항식 $2x^3+x^2+3x$를 x^2+1로 나눈 나머지는? [3점]

① $x-1$　② x　③ 1
④ $x+3$　⑤ $3x-1$

Q007

○
(1999-예체능26)

다음은 x에 대한 3차식을 1차식으로 나눈 과정을 나타낸 것이다. 다섯 개의 수 a, b, c, d, e의 합 $a+b+c+d+e$를 구하시오. [2점]

$$\begin{array}{r|l}
 & x^2 \qquad\quad + c \\ \hline
ax+1 & 2x^3 + x^2 + 4x + 4 \\
 & \underline{bx^3 + x^2 \qquad\qquad\quad} \\
 & \qquad\qquad\quad 4x + 4 \\
 & \qquad\qquad\quad \underline{dx + e} \\
 & \qquad\qquad\qquad\quad 2
\end{array}$$

Q. 항등식

Q008

○○
(1993(실험평가6차)-공통4)

임의의 실수 x에 대하여

$$P(x^2+1)=\{P(x)\}^2+1,\ P(0)=0$$

을 만족하는 2차 이하 다항식 $P(x)$의 개수는? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 없다.　⑤ 무수히 많다.

Q. 나머지정리

Q009

(1991(실험평가1차)-공통9)

다음은 나머지 정리의 증명 과정이다.

다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R이라고 하면 $P(x)=$ (가) $+R$ 이다. 위의 등식에 $x=a$를 대입하면 $P(a)=$ (나) 이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나) 각각에 알맞은 식은? [2점]

	(가)	(나)
①	$Q(x)$	$Q(a)$
②	$x-a$	R
③	$x-a$	aR
④	$\dfrac{Q(x)}{x-a}$	$Q(a)R$
⑤	$(x-a)Q(x)$	R

Q010

(1996-인문예체능2/자연2)

다항식 x^4-3x^2+ax+5를 $x+2$로 나누면 나머지가 3이다. a의 값은? [1점]

① 0 ② 2 ③ 3 ④ -2 ⑤ -3

Q011

(2001-예체능4)

다항식 x^3+3x^2+ax+b가 $x+1$로 나누어떨어질 때, $a-b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

Q012

(2004-인문5/예체능5)

다항식 $f(x)$를 $x+2$로 나눈 몫은 x^2+1이고 나머지가 2일 때, $f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지는? [2점]

① 20 ② 21 ③ 22 ④ 23 ⑤ 24

Q013

(2004(9)-예체능28)

다항식 $f(x)$에 대하여 $f(x)+2$가 $x+3$으로 나누어떨어질 때, $xf(x)+2$를 $x+3$으로 나눈 나머지를 구하시오. [3점]

Q014

○○
(2001-인문26/예체능26/자연26)

다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 나머지가 $4x+3$일 때, $f(2x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 구하시오. [2점]

Q015

○○
(1993(실험평가6차)-공통2)

다항식 $x^{49}+x^{25}+x^9+x$를 x^3-x로 나누었을 때의 나머지를 $R(x)$라 하면, $R(2)$는? [2점]

① 8 ② 10 ③ 14
④ 16 ⑤ 20

Q016

○○
(2003-인문27/예체능27/자연27)

다항식 $f(x)=x^3+x^2+2x+1$에 대하여 $f(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 나머지를 R_1, $f(x)$를 $x+a$로 나누었을 때의 나머지를 R_2라고 하자. $R_1+R_2=6$일 때, $f(x)$를 $x-a^2$으로 나눈 나머지를 구하시오. [3점]

Q017

○○
(2004(6)-인문26/예체능26)

다항식 $P(x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 3이고, $x+2$로 나눈 나머지는 -3이다. $P(x)$를 x^2+x-2로 나눈 나머지를 $R(x)$라고 할 때, $R(10)$의 값을 구하시오. [2점]

Q. 인수분해

Q018

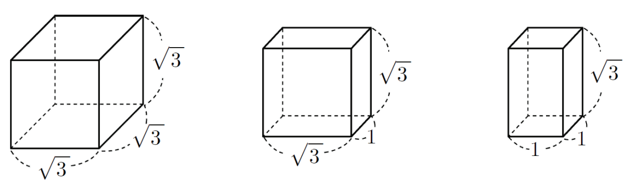
○
(2000-인문25/예체능25/자연25)

다항식 $x^3+5x^2+10x+6$이 $(x+a)(x^2+4x+b)$로 인수분해 될 때, $a+b$의 값을 구하시오. [2점]

Q019

○○
(2004(6)-인문21/예체능21/자연21)

각 모서리의 길이가 그림과 같은 직육면체 모양의 A, B, C 세 종류의 블록이 있다.



A블록　　B블록　　C블록

A블록 1개, B블록 5개, C블록 6개를 모두 사용하여 하나의 직육면체를 만들려고 한다. 다음 중 이 직육면체의 모서리의 길이가 될 수 있는 것은? [3점]

① 2　　② 3　　③ $2\sqrt{3}$

④ $\sqrt{3}+1$　　⑤ $\sqrt{3}+2$

R. 복소수와 그 연산

R001

○○ (1991(실험평가1차)-공통3)

$1=\sqrt{1}=\sqrt{(-1)(-1)}$

$=\sqrt{-1}\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2=-1$

에서 등호가 잘못 사용된 부분은? [2점]

① $1=\sqrt{1}$

② $\sqrt{1}=\sqrt{(-1)(-1)}$

③ $\sqrt{(-1)(-1)}=\sqrt{-1}\sqrt{-1}$

④ $\sqrt{-1}\sqrt{-1}=(\sqrt{-1})^2$

⑤ $(\sqrt{-1})^2=-1$

R002

○○ (1993(실험평가5차)-공통2)

$\sqrt{-x^2(x^2-1)^2}$ 이 실수가 되는 서로 다른 실수 x의 개수는? [3점]

① 0 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 무한히 많다.

R003

○ (2000-인문2/예체능2)

$(4+3i)^2-(4-3i)^2$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

① 0 ② 24 ③ 48
④ 24 ⑤ $48i$

R004

○ (2002-인문1/예체능1)

$(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

R005

○ (2004(6)-인문2/예체능2)

두 실수 a와 b에 대하여 $1+\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1+i}}=a+bi$일 때, $a+b$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

R006

○○ (1993(실험평가6차)-공통1)

$a=1992$, $b=4325$일 때, $\dfrac{a+bi}{b-ai}+\dfrac{b-ai}{a+bi}$의 값은?

(단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

① 0 ② 1 ③ -1
④ i ⑤ $-i$

R007

○ (2004(9)-인문3/예체능3)

복소수 z가 $z^3=1+i$를 만족시킬 때, $(\overline{z})^6$의 값은?

(단, $i=\sqrt{-1}$이고, $\overline{z}$는 z의 켤레복소수이다.) [2점]

① $2i$ ② $1+i$ ③ 2
④ $-2i$ ⑤ $1-i$

R008

○ (1997-인문예체능2/자연2)

$\alpha=-2+i$, $\beta=1-2i$일 때, $\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}$의 값은? (단, $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$는 α, β의 켤레복소수이고, $i=\sqrt{-1}$이다.) [2점]

① 1 ② 2 ③ 4
④ 10 ⑤ 20

R009

○○ (1998-인문예체능12/자연12)

$\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1998}$의 값은? (단, $i=\sqrt{-1}$이다.) [2점]

① -1 ② 1 ③ $-i$
④ i ⑤ 1998

R010

○○ (2004(9)-자연3)

$(\sqrt{3}+i)^{108}+(\sqrt{3}-i)^{108}$의 값은?

(단, $i=\sqrt{-1}$) [2점]

① 2^{108} ② 2^{109} ③ 2^{110}
④ 3^{54} ⑤ 3^{108}

R011

○○ (2004-예체능20)

이차방정식 $x^2-x+1=0$의 한 근을 ω라 할 때, $\omega^{10}+\omega^5+1=a\omega+b$를 만족시키는 a의 값은?

(단, a, b는 실수이다.) [3점]

① 1 ② $\dfrac{2}{3}$ ③ $-\dfrac{1}{2}$
④ -1 ⑤ -2

R. 이차방정식의 근과 판별식

R012

○
(2004-인문6/예체능6)

이차방정식 $x^2-4=a(x-2)$가 중근을 갖기 위한 상수 a의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ 4 ④ 5 ⑤ 6

R. 이차방정식의 근과 계수와의 관계

[10~11] x에 관한 방정식 $\dfrac{x^2-bx}{ax-c}=\dfrac{m-1}{m+1}$에 대하여 다음 물음에 답하라.

R013

○○
(1992(실험평가2차)-공통10)

위의 방정식의 두 근이 절댓값은 같고 부호만 다를 때, m의 값은? (단, $a\neq b$, $a\neq -b$) [3점]

① ab ② $\dfrac{a+b}{a-b}$ ③ $\dfrac{a-b}{a+b}$ ④ $a+b$ ⑤ $a-b$

R014

○○
(1992(실험평가2차)-공통11)

앞의 방정식의 두 근의 곱이 1일 때, m의 값은?
(단, $c\neq \pm 1$) [3점]

① $\dfrac{c-1}{c+1}$ ② $\dfrac{c+1}{c-1}$ ③ $c-1$ ④ $c+1$ ⑤ c

R015

○ (1999-인문25/예체능25)

방정식 $x^2-ax+b=0$의 한 근이 $1+2i$일 때, 두 실수 a, b의 곱 ab의 값을 구하시오. [3점]

R016

○○ (2004-인문27/예체능27/자연27)

이차방정식 $x^2+6x+a=0$의 한 근이 $b+\sqrt{3}i$일 때, $a+b$의 값을 구하시오.

(단, a, b는 실수이고 $i=\sqrt{-1}$이다.) [3점]

R017

○○ (2000-인문5/예체능5)

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근이 2, 3일 때, 이차방정식 $ax^2+bx+2=0$의 두 근의 합은? [2점]

① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{2}{5}$ ③ $\frac{3}{5}$
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{6}{5}$

R018

○○ (2001-인문2/예체능2/자연2)

이차방정식 $x^2+7x+1=0$의 두 근이 α, β일 때, $(\alpha^2+\beta^2)+7(\alpha+\beta)$의 값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 1 ⑤ 3

R019

○○ (1995-인문예체능1/자연1)

이차방정식 $2x^2-4x-1=0$의 두 근을 α, β라 할 때, $\alpha^3+\beta^3$의 값은? [1점]

① 1 ② 3 ③ 4
④ 8 ⑤ 11

R020

○○ (2003(9)-인문26/예체능26)

이차방정식 $x^2+5x+7=0$의 두 근을 α와 β라 하자. 두 근이 α^2과 β^2인 이차방정식을 $x^2+ax+b=0$으로 나타낼 때, $a+b$의 값을 구하시오. [2점]

R021

○○
(2003-인문2/예체능2/자연2)

이차방정식 $x^2-5x-2=0$의 두 근을 α와 β라 할 때, $\dfrac{1}{\alpha+1}+\dfrac{1}{\beta+1}$의 값은? [2점]

① 2 ② 3 ③ $\dfrac{3}{2}$

④ $\dfrac{7}{4}$ ⑤ $\dfrac{5}{2}$

R022

○○
(2004(6)-인문7/예체능7/자연7)

이차방정식 $(x+p)(x+q)-2=0$의 두 근이 α와 β일 때, 이차방정식 $(x-\alpha)(x-\beta)+2=0$의 두 근은? [2점]

① $2-p$, $2-q$ ② p, q ③ $-p$, $-q$

④ $2+p$, $2+q$ ⑤ $\dfrac{1}{p}$, $\dfrac{1}{q}$

R023

○○
(1998-인문예체능13)

방정식 $|x^2+(a-2)x-2|=1$의 모든 근의 합이 0일 때 상수 a의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3

④ 4 ⑤ 5

R024

○○○
(1994(2차)-공통12)

a와 b는 서로 다른 두 정수이고 다항식 $f(x)$는 다음 두 성질 (A)와 (B)를 갖는다.

> (A) $f(x)$의 모든 계수는 정수이다.
> (B) $f(a)f(b)=-(a-b)^2$

다음 증명은 위의 성질과 사실 (C)를 이용하여 $\dfrac{f(a)}{a-b}$가 정수임을 보인 것이다.

> (C) 정수 m, n에 대하여 이차방정식 $x^2+mx+n=0$의 근이 유리수이면 이 근은 정수이다.

> (증명)
> 자연수 n에 대하여 a^n-b^n은 $a-b$로 나누어떨어지므로
> ㉠ (A)에 의하여
> $f(a)-f(b)$는 $a-b$로 나누어떨어진다.
> 따라서 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$는 정수이다.
> $\dfrac{f(a)}{a-b}$와 $\dfrac{-f(b)}{a-b}$를 두 근으로 하는 이차방정식은 근과 계수와의 관계와
> ㉡ (B)에 의하여 $x^2-\left(\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}\right)x+1=0$이다.
> $\dfrac{f(a)}{a-b}$는
> ㉢ (A)에 의하여 유리수이고 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$는 정수이므로,
> ㉣ (C)에 의하여 $\dfrac{f(a)}{a-b}$는 정수이다.

위의 증명 과정에서 밑줄 친 부분 중 (A), (B), (C)를 잘못 이용한 곳은? [4점]

① ㉠ ② ㉡ ③ ㉢

④ ㉣ ⑤ 없다.

R. 이차방정식과 이차함수의 관계

R025

○○
(2004-인문7/예체능7)

이차함수 $f(x)=x^2-2x+a$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동시킨 그래프가 x축에 접할 때, 상수 a의 값은? [3점]

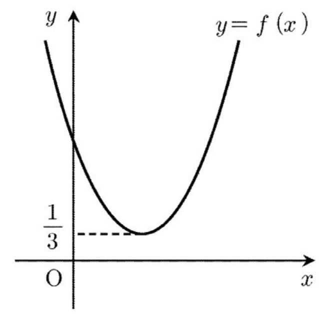
① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

R. 이차함수의 그래프와 직선의 위치 관계

R026

○○
(2003(9)-예체능21)

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 다음 방정식의 실근의 개수는? [3점]



$\{f(x)\}^2=4f(x)-3$

① 1 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

R027

○○
(2004-예체능14)

함수 $y=|x^2+2x-1|$의 그래프와 직선 $y=1$과의 교점의 개수는? [3점]

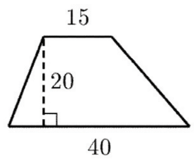
① 0 ② 1 ③ 2
④ 3 ⑤ 4

R. 이차함수의 최대최소

R028

○○
(1993(실험평가5차)–공통13)

아래 그림과 같은 사다리꼴 영역 안에 넣을 수 있는 직사각형의 최대 넓이는? [3점]



① 300 ② 310 ③ 320
④ 330 ⑤ 340

R029

○○
(2000–인문30/예체능30/자연30)

$-1 \le x \le 1$에서 부등식 $x+a \le x^2 \le 2x+b$가 항상 성립할 때, $b-a$의 최솟값을 소수점 아래 둘째 자리까지 구하시오. [3점]

R. 삼차방정식과 사차방정식

R030

○○
(1993(실험평가5차)–공통12)

$f(x)$는 x에 관한 3차 다항식이고,
$f(x)+1$은 x^2-3x+2로 나누어떨어지고,
$f(x)-1$은 x^2+3x+2로 나누어떨어진다.
$f(x)=0$의 세 근을 모두 더하면? [3점]

① 0 ② 1 ③ -1
④ 4 ⑤ -4

R031

○○
(1994(1차)–공통8)

삼차방정식 $x^3+ax^2+bx-3=0$의 한 근이 $1+\sqrt{2}i$일 때, 두 실수 a, b의 곱 ab는? (단, $i=\sqrt{-1}$) [3점]

① 10 ② 5 ③ 0
④ -15 ⑤ -10

R032

○○
(2003-인문28/자연28)

방정식 $x^3=1$의 한 허근을 ω라고 할 때, 자연수 n에 대하여 함수 $f(n)$을 다음과 같이 정의한다.

$$f(n)=\frac{\omega^{2n}}{\omega^n+1}$$

이때, $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$의 값을 구하시오. [3점]

R. 연립방정식 (이차방정식 포함)

R033

○○
(1993(실험평가7차)-공통7)

서로 다른 두 실수 x, y에 대하여, 큰 수를 $x \vee y$, 작은 수를 $x \wedge y$로 나타내기로 하자. 다음 두 조건

$$x \vee y = 2x^2+y^2$$
$$x \wedge y = x+y-1$$

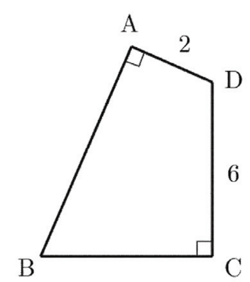
을 만족하는 실수 x, y의 합 $x+y$의 값은? [3점]

① -2　② -1　③ 0
④ 1　⑤ 2

R034

○○
(1997-자연27)

오른쪽 그림에서 □ABCD의 각 변의 길이는 정수이고 $\overline{AD}=2$, $\overline{CD}=6$, $\angle A=\angle C=90^\circ$이다.
이 사각형 둘레의 최대 길이를 구하라. [3점]



R. 일차부등식

R035

○○
(2004(9)–예체능8)

부등식 $|x+a| \le b$의 해가 $-1 \le x \le 2$일 때, a^2-b^2의 값은? [2점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

R. 이차부등식

R036

○
(2004–인문4/예체능4)

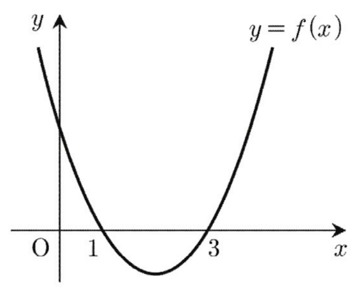
부등식 $(x-1)(x+3)<5$를 만족시키는 정수 x의 개수는? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

R037

○○
(2003(9)–인문5/예체능5)

이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, $f(x-1)<0$을 만족시키는 x값의 범위는? [2점]



① $0<x<2$ ② $1<x<3$
③ $2<x<4$ ④ $x<1$ 또는 $x>4$
⑤ $x<2$ 또는 $x>4$

R038

○
(1999–예체능4)

다음 연립부등식을 만족시키는 정수 x의 개수는? [3점]

$$\begin{cases} 2x<x+4 \\ x^2-4x-5<0 \end{cases}$$

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

R039

○
(2004(6)-인문3/예체능3/자연3)

연립부등식 $\begin{cases} x^2+2x-8 \le 0 \\ 2x^2-7x+3>0 \end{cases}$의 해가 $\alpha \le x < \beta$일 때, $\alpha\beta$의 값은? [2점]

① 3　② 1　③ -1
④ -2　⑤ -4

R040

○○
(2003-인문6/예체능6)

두 상수 a와 b에 대하여 부등식 $x^2+ax+b \le 0$의 해가 $-1 \le x \le 3$일 때, 부등식 $x^2-ax+b \le 0$의 해는? [2점]

① $-3 \le x \le -1$　② $-2 \le x \le 2$　③ $-3 \le x \le 1$
④ $-1 \le x \le 2$　⑤ $1 \le x \le 3$

R041

○○
(2004(9)-인문6/예체능6)

모든 실수 x에 대하여 이차부등식

$$ax^2-(a-1)x+a \ge 0$$

이 성립하도록 하는 a의 최솟값은? [2점]

① $\frac{3}{2}$　② 1　③ $\frac{3}{4}$
④ $\frac{2}{3}$　⑤ $\frac{1}{3}$

R042

○○
(2004(9)-인문9/예체능9/자연9)

이차함수 $f(x)=ax^2+2bx+c$가 주어져 있다.
$x \ge 0$인 모든 x에 대하여 $f(x)>0$일 때, 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $c>0$
ㄴ. $ab>0$
ㄷ. $b^2-ac<0$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

R043

○○○
(1993(실험평가7차)-공통4)

세 자연수 a, b, c가 다음 두 조건을 만족시킨다.

(Ⅰ) $a^2-b^2-c^2=abc$
(Ⅱ) $a^2=2(b+c)$

$a+b+c$의 값을 다음과 같이 구하려고 한다.

〈풀이〉
먼저 $abc>0$이므로 조건 (Ⅰ)로부터
$a>b$이고 (가) 이다.
따라서 $2a>b+c$이고, 조건 (Ⅱ)로부터
$4a>2(b+c)=a^2$이다.
이로부터 $0<a<4$를 얻는다.
그런데 a는 (나) 이어야 하므로
$a=$ (다) 이다.
따라서 $a+b+c=$ (라) 이다.

위 풀이 과정에서 (가), (나), (다), (라)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [4점]

① $a>c$, 짝수, 2, 4　② $a>c$, 홀수, 3, 5
③ $b>c$, 짝수, 2, 4　④ $b>c$, 홀수, 3, 5
⑤ $b=c$, 짝수, 2, 4

R044

★★★
(1994(2차)–공통16)

a, b, c가 양의 실수일 때, 다음 연립부등식

$$\begin{cases} ax^2-bx+c<0 \\ cx^2-bx+a<0 \end{cases}$$

의 해가 존재하기 위한 필요충분조건은? [4점]

① $a+c<\dfrac{b}{2}$ ② $a+c<b$ ③ $a+c<2b$

④ $a+c<1$ ⑤ $a+c<2$

S. 두 점 사이의 거리

S001

○○
(2003-예체능8)

a와 b가 실수일 때, $\left|\dfrac{a+b}{2}-a\right|+\left|\dfrac{a+b}{2}-b\right|$를 간단히 하면? [2점]

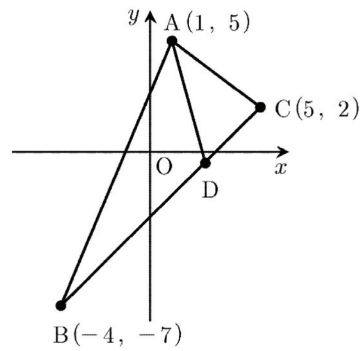
① 0 ② $\dfrac{|a+b|}{2}$ ③ $\dfrac{|a-b|}{2}$
④ $|a+b|$ ⑤ $|a-b|$

S. 선분의 내분점과 외분점

S002

○○
(1992(실험평가3차)-공통13)

아래 그림과 같이 세 점 A$(1,\ 5)$, B$(-4,\ -7)$, C$(5,\ 2)$를 꼭짓점으로 하는 △ABC가 있다.
∠A의 이등분선이 변 BC와 만나는 점을 D라 할 때, D의 좌표는? [3점]

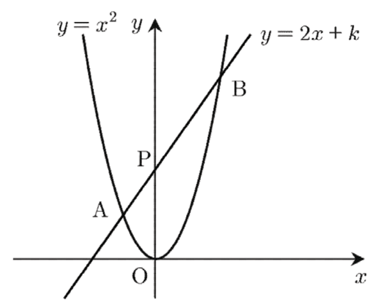


① $\left(\dfrac{5}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ ② $\left(\dfrac{9}{4},\ -\dfrac{3}{4}\right)$ ③ $(2,\ -1)$
④ $\left(\dfrac{7}{4},\ -\dfrac{5}{4}\right)$ ⑤ $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$

S003

○○
(2004(6)-예체능20)

직선 $y=2x+k(k>0)$가 곡선 $y=x^2$과 만나는 두 점을 각각 A와 B라 하고, y축과 만나는 점을 P라 하자.
$\overline{\mathrm{AP}}:\overline{\mathrm{BP}}=1:2$일 때, 상수 k의 값은? [3점]



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

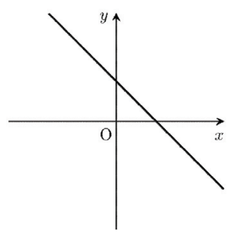
S004

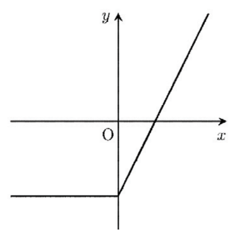
○○
(1992(실험평가4차)—공통16)

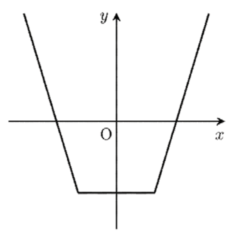
다음 중 임의의 실수 a, b에 대하여 부등식

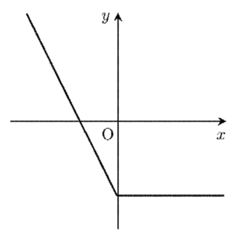
$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

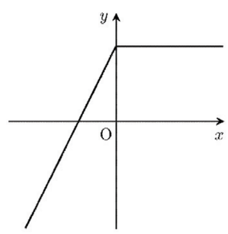
을 만족하는 함수 $y=f(x)$의 그래프가 될 수 없는 것은? [3점]

①


②


③


④


⑤


S005

○○
(1991(실험평가1차)—공통13)

좌표평면 위에 네 점 A$(0,\ 0)$, B$(4,\ 0)$, C$(4,\ 5)$, D$(0,\ 5)$가 주어져 있다. $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PC}}+\overline{\mathrm{PD}}$를 최소로 하는 점 P의 좌표는? [4점]

① $\left(2,\ \frac{5}{2}\right)$　② $(2,\ 0)$　③ $\left(0,\ \frac{5}{2}\right)$
④ $(4,\ 0)$　⑤ $(0,\ 5)$

S. 직선의 방정식

S006

○○
(1993(실험평가7차)-공통6)

좌표평면에 세 점 A$(1,\ 8)$, B$(0,\ -1)$, C$(1,\ 0)$을 꼭짓점으로 하는 △ABC가 있다. 직선 $y=a$가 △ABC의 면적을 이등분할 때, a의 값은? [3점]

① 1 ② $\frac{3}{2}$ ③ 2
④ $\frac{5}{2}$ ⑤ 3

S007

○○
(2000-인문27/예체능27/자연27)

직선 $y=x$에 대하여 대칭인 두 직선 $y=ax$, $y=bx$가 이루는 각이 30°일 때, $3(a^2+b^2)$의 값을 구하시오. [3점]

S008

○○
(2004-예체능19)

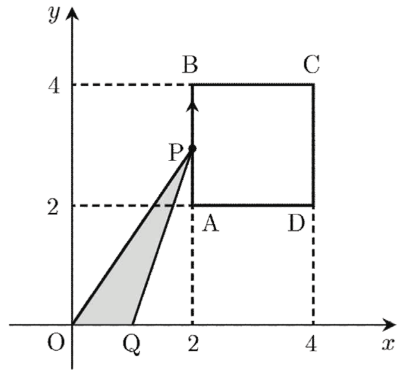
직선 $(k+1)^2x-ky-k^2-1=0$은 실수 k의 값에 관계없이 일정한 점을 지난다. 이 점을 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은? [3점]

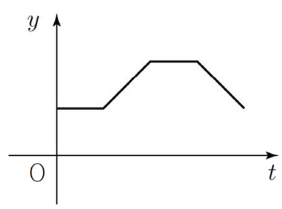
① $y=3x-3$ ② $y=3x-2$ ③ $y=3x-1$
④ $y=3x+1$ ⑤ $y=3x+2$

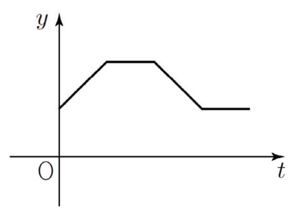
S009

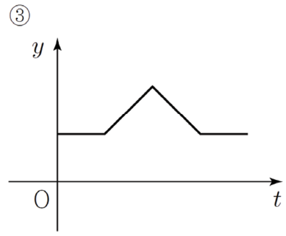
○○○
(2004(6)-예체능15)

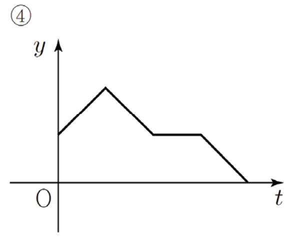
그림과 같이 점 P가 점 A$(2,\ 2)$에서 출발하여 정사각형 ABCD의 변 위를 시계방향으로 일정한 속력으로 한 바퀴 움직인다. 출발한 지 t초 후의 점 P와 원점 O, 점 Q$(1,\ 0)$이 이루는 삼각형 OPQ의 넓이를 $S(t)$라고 할 때, 다음 중 $y=S(t)$의 그래프의 개형은? [3점]

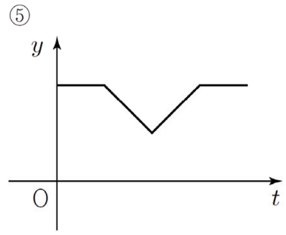


①


②


③


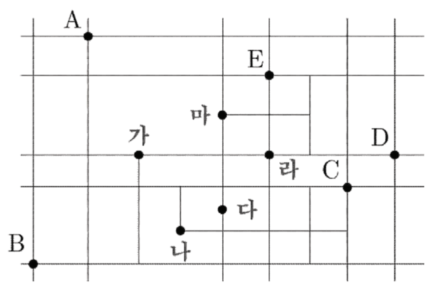
④


⑤


S010

●●●
(1993(실험평가6차)−공통20)

다음 그림은 어느 도시의 주요 도로망과 소매상점 A, B, C, D, E의 위치를 나타낸 것이다. 이들 상점에 물건을 공급할 도매상점을 '가', '나', '다', '라', '마' 중의 한 곳에 정하려 한다. 각 소매상점에서 도매상점까지 도로를 따라 다녀오는 왕복거리를 각각 $|A|$, $|B|$, $|C|$, $|D|$, $|E|$라 할 때, $|A|+|B|+|C|+|D|+|E|$가 최소가 되는 도매상점의 위치는? (단, 모든 도로는 수직으로 교차한다.) [4점]



① 가 ② 나 ③ 다
④ 라 ⑤ 마

S. 두 직선의 평행과 수직 (위치 관계)

S011

○○
(2004(9)−예체능5)

두 직선 $ax+y=1$, $3x+(a-3)y=1$이 서로 수직으로 만날 때, 실수 a의 값은? [2점]

① $\frac{4}{3}$ ② $\frac{6}{5}$ ③ 1
④ $\frac{4}{5}$ ⑤ $\frac{3}{4}$

S012

○○○
(1991(실험평가1차)−공통10)

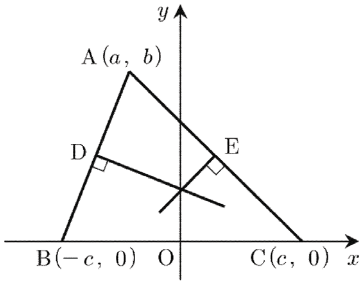
점 $(2,\ 1)$을 지나는 직선이 포물선 $y^2=x$와 원점 O가 아닌 두 점 P, Q에서 만나고 $\angle$POQ가 직각일 때, 직선 PQ의 방정식은? [3점]

① $y=-x+3$ ② $y=2x-3$ ③ $y=-x-1$
④ $y=x-1$ ⑤ $y=2x+3$

S013

○○○
(2000−인문17/예체능17/자연17)

다음은 △ABC의 세 변의 수직이등분선이 한 점에서 만남을 증명한 것이다.



〈증명〉

직선 BC를 x축, BC변의 수직 이등분선을 y축으로 잡고, $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(-c,\ 0)$, $\mathrm{C}(c,\ 0)$라고 하자.

(단, $b \neq 0$, $c > 0$)

(1) $a \neq c$이고 $a \neq -c$일 때,

직선 AC의 기울기는 $\dfrac{b}{a-c}$이므로, 변 AC의 중점 E를 지나고 변 AC에 수직인 직선의 방정식은

$$y = \boxed{\text{(가)}}\left(x - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{b}{2}$$

$$= \boxed{\text{(가)}}\,x + \boxed{\text{(나)}} \qquad \cdots ㉠$$

같은 방법으로, 변 AB의 중점 D를 지나고 변 AB에 수직인 직선의 방정식은

$$y = -\frac{a+c}{b}x + \boxed{\text{(나)}} \qquad \cdots ㉡$$

두 직선 ㉠, ㉡의 y절편이 같으므로 세 변의 수직 이등분선은 y축 위의 점 $\left(0,\ \boxed{\text{(나)}}\right)$에서 만난다.

따라서 △ABC의 세 변의 수직 이등분선은 한 점에서 만난다.

(2) $a = c$ 또는 $a = -c$일 때,

△ABC는 $\boxed{\text{(다)}}$이므로, 세 변의 수직 이등분선은 D 또는 E에서 만난다.

따라서 △ABC의 세 변의 수직 이등분선은 한 점에서 만난다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [3점]

① $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

② $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 정삼각형

③ $-\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

④ $\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$, 이등변삼각형

⑤ $\dfrac{a-c}{b}$, $\dfrac{-a^2+b^2-c^2}{2b}$, 직각삼각형

S. 점과 직선 사이의 거리

S014

○○
(2001-예체능10)

좌표평면에서 두 점 $(1,\ 3)$, $(3,\ 1)$을 지나는 직선과 원점 사이의 거리는? [3점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ $2\sqrt{2}$
④ 4　⑤ $3\sqrt{2}$

S015

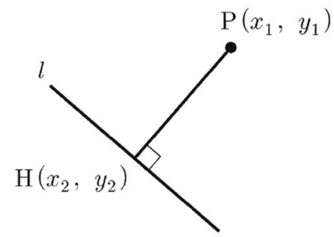
○○
(2003(9)-예체능29)

좌표평면 위의 두 직선 $x+\sqrt{3}y-1=0$과 $x+\sqrt{3}y-35=0$ 사이의 거리를 구하시오. [3점]

S016

○○
(1998-인문예체능18)

좌표평면에서 각 좌표축에 평행하지 않은 직선 l이 있다. l 밖의 한 점 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$에서 l에 내린 수선의 발을 $\mathrm{H}(x_2,\ y_2)$라 할 때, 선분 PH의 길이를 구하는 과정은 다음과 같다.



직선 l의 방정식을 $ax+by+c=0$ …㉠
이라 하면 가정에서 $a\neq0$이고 $b\neq0$이다.
l의 기울기가 $-\dfrac{a}{b}$이므로 직선 PH의 방정식은
$y-y_1=\boxed{\quad(가)\quad}$ …㉡
이다. ㉠과 ㉡을 이용하면
$$x_2-x_1=\frac{-a(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$
$$y_2-y_1=\frac{-b(ax_1+by_1+c)}{a^2+b^2}$$
이다. 따라서 구하는 선분 PH의 길이는
$$\overline{\mathrm{PH}}=\boxed{\quad(나)\quad}=\frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$
이다.

위의 과정에서 (가), (나)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [3점]

① $\dfrac{a}{b}(x-x_1)$, $|x_2-x_1|+|y_2+y_1|$

② $\dfrac{b}{a}(x-x_1)$, $(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2$

③ $-\dfrac{b}{a}(x-x_1)$, $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

④ $\dfrac{b}{a}(x-x_1)$, $\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

⑤ $-\dfrac{a}{b}(x-x_1)$, $|x_2+x_1|+|y_2-y_1|$

S. 원의 방정식

S017

○
(2002-예체능25)

원 $x^2+y^2-10x-2y+1=0$의 중심의 좌표를 $(a,\ b)$, 반지름을 r이라 할 때, $a+b+r$의 값을 구하시오. [3점]

S018

○○○
(2001-인문13/예체능13/자연13)

다음은 좌표평면 위의 서로 다른 네 점 A, B, C, D에 대한 설명이다.

(가) 점 A와 점 B는 x축 위에 있다.
(나) 점 B와 x좌표는 점 A의 x좌표보다 크다.
(다) $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{CD}}$

점 A, B, C, D의 x좌표를 각각 $a,\ b,\ c,\ d$라 할 때, 옳은 것은? [3점]

① $a<d<c<b$　② $c<a<d<b$
③ $c<d<a<b$　④ $d<a<c<b$
⑤ $d<c<a<b$

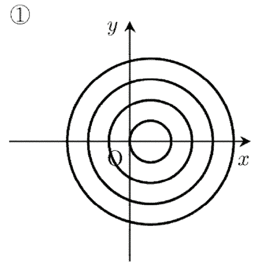
S019

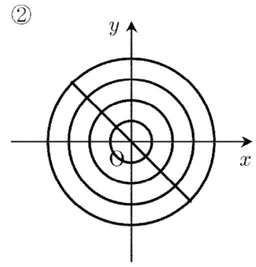
○○○
(1993(실험평가6차)-공통9)

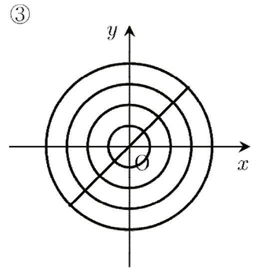
좌표평면 위의 점 $(x,\ y)$에서의 높이가 x^2+y^2-x인 입체가 있다. 좌표평면 위의 집합

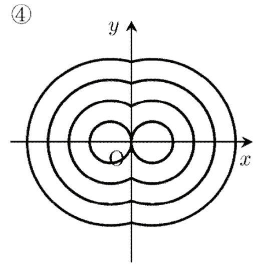
$$\{(x,\ y)\mid x^2+y^2-x=n\}$$

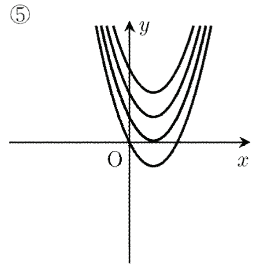
을 이 입체에 대한 높이 n에서의 등고선이라 하자. 이때, 높이 0, 1, 2, 3에서의 등고선을 나타낸 것은? [4점]

①


②


③


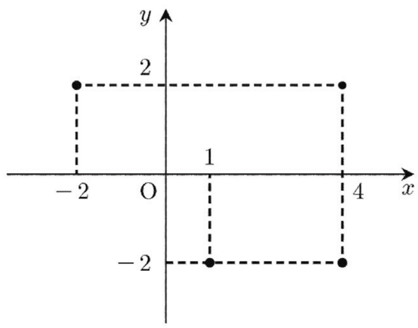
④


⑤


S020

★★★ (2001-인문23/예체능23/자연23)

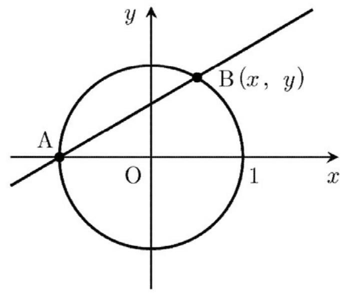
좌표평면 위의 네 점 $(-2,\ 2)$, $(4,\ 2)$, $(1,\ -2)$, $(4,\ -2)$에 있는 나사를 모두 조이는 작업을 반복하는 로봇 팔의 한쪽 끝을 점 P에 고정시키려 한다. 로봇 팔을 점 P를 중심으로 360° 회전 가능하고, 점 P로부터의 거리가 로봇 팔의 길이 이하인 모든 곳의 나사를 조일 수 있다. 로봇 팔의 길이를 최소로 할 수 있는 점 P의 좌표는? [3점]



① $(0,\ 0)$ ② $(0,\ 1)$ ③ $(0,\ -1)$
④ $(1,\ 0)$ ⑤ $(1,\ 1)$

S. 원과 직선의 위치 관계

[12~13] 원 $x^2+y^2=1$ 위의 서로 다른 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(x,\ y)$를 지나는 직선의 기울기를 t라고 할 때, 다음 물음에 답하라.



S021

○○ (1992(실험평가2차)-공통12)

t를 x, y에 관한 식으로 나타내면? [3점]

① $t=\dfrac{y}{x+1}$ ② $t=\dfrac{y}{x-1}$ ③ $t=\dfrac{y}{x}$
④ $t=\dfrac{-y}{x+1}$ ⑤ $t=\dfrac{y}{1-x}$

S022

○○ (1992(실험평가2차)-공통13)

x를 t에 관한 식으로 나타내면? [3점]

① $x=\dfrac{2t}{1+t^2}$ ② $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ ③ $x=\dfrac{1+t^2}{2t}$
④ $x=\dfrac{1+t^2}{1-t^2}$ ⑤ $x=\dfrac{2t}{1-t^2}$

S023

(1992(실험평가3차)-공통2)

제곱의 합이 일정한 두 실수 a, b에 대하여 $a+2b$가 최대일 때 a와 b의 관계는? [3점]

① $b=2a$ ② $a=2b$ ③ $a=b$
④ $a^2=b$ ⑤ $b^2=a$

S024

(1992(실험평가3차)-공통14)

좌표평면에서 중심의 좌표가 $(1,\ 4)$이고,

직선 $y=\dfrac{3}{4}x-\dfrac{1}{2}$에 접하는 원의 반지름의 길이는? [3점]

① 3 ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{15}$
④ $\sqrt{17}$ ⑤ 5

S025

(1994(1차)-공통13)

좌표평면 위에 원 $(x-1)^2+(y-2)^2=r^2$과 원 밖의 점 $\mathrm{A}(5,\ 4)$가 있다. 점 A에서 원에 그은 두 접선이 서로 수직일 때, 반지름의 길이 r의 값은? [3점]

① $\sqrt{10}$ ② $\sqrt{11}$ ③ $\sqrt{12}$
④ $\sqrt{13}$ ⑤ $\sqrt{14}$

S026

(1999-인문16/예체능16/자연16)

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(1,\ 2)$에서의 접선의 방정식은? [2점]

① $x+y=3$ ② $2x-y=0$ ③ $x-2y=-3$
④ $2x+y=4$ ⑤ $x+2y=5$

S027

(1999-예체능12)

좌표평면에서 원 $(x-1)^2+(y-1)^2=10$과 y축이 만나는 두 교점 사이의 거리는? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

S028

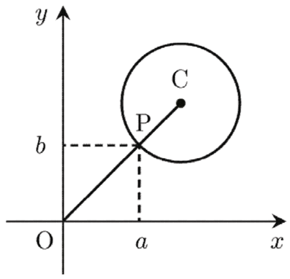
(1999-예체능29)

좌표평면에서 중심이 $(1,\ 2)$이고, 직선 $3x+4y=1$에 접하는 원의 반지름의 길이를 구하시오. [3점]

S029

○○ (2000-예체능13)

반지름의 길이가 2이고 중심이 C(4, 4)인 원이 있다. 원점 O와 중심 C를 잇는 선분이 원과 만나는 점을 P$(a,\ b)$라 할 때, a의 값은? [3점]

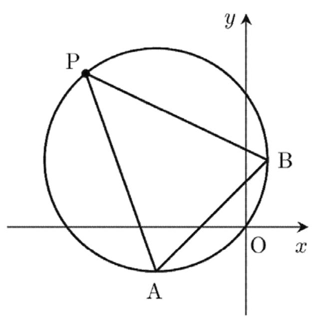


① $1+\sqrt{2}$ ② $3-\sqrt{2}$ ③ $2+\sqrt{2}$
④ $4-\sqrt{2}$ ⑤ $3+\sqrt{2}$

S030

○○ (2002-인문9/예체능9)

원 $(x+8)^2+(y-6)^2=10^2$ 위에 두 점 A$(-8,\ -4)$, B$(2,\ 6)$가 있다. △PAB의 넓이가 최대가 되도록 하는 원 위의 한 점 P와 원의 중심을 지나는 직선의 방정식을 $y=ax+b$라고 할 때 $a+b$의 값은? [3점]

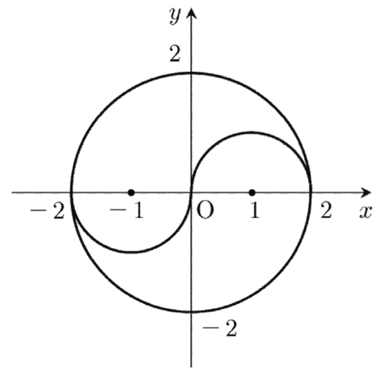


① 1 ② 0 ③ -1
④ -2 ⑤ -3

S031

○○ (2002-인문20/예체능20/자연20)

그림과 같이 좌표평면 위에 원과 반원으로 이루어진 태극문양이 있다. 태극문양과 직선 $y=a(x-1)$이 서로 다른 다섯 점에서 만나게 되는 a의 범위는? [3점]

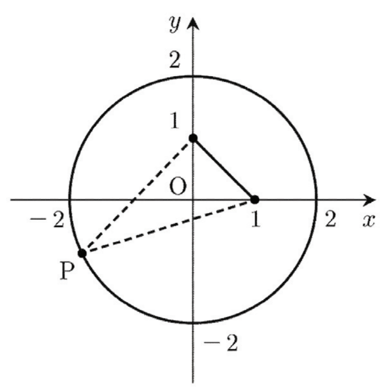


① $0<a<\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ② $0<a<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ ③ $0<a<\dfrac{2}{3}$
④ $0<a<\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ ⑤ $0<a<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

S032

○○ (2002-예체능7)

원 $x^2+y^2=4$ 내부의 두 점 $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$과 원 위의 한 점 P가 만드는 삼각형의 넓이가 1이 되는 점 P의 개수는? [3점]



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

S033

○○
(2003-예체능29)

두 실수 x와 y가 방정식 $x-y+4=0$을 만족시킬 때, x^2+y^2의 최솟값을 구하시오. [3점]

S034

○○○
(2003-인문21/예체능21/자연21)

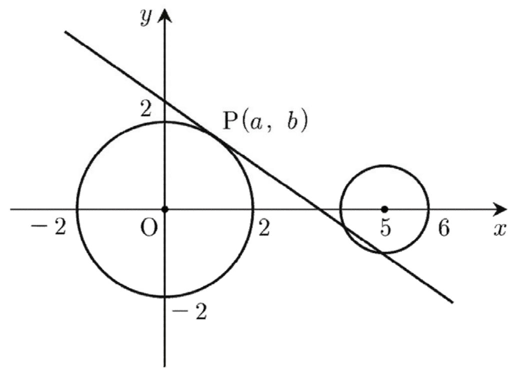
좌표평면에서 중심이 $(a,\ b)$이고 x축에 접하는 원이 두 점 $\mathrm{A}(0,\ 5)$와 $\mathrm{B}(8,\ 1)$을 지난다. 이때, 원의 중심 $(a,\ b)$와 직선 AB 사이의 거리는? (단, $0 \le a \le 8$) [3점]

① $\sqrt{3}$ ② $\sqrt{5}$ ③ $\sqrt{6}$
④ $\sqrt{7}$ ⑤ $2\sqrt{2}$

S035

○○○
(2004(6)-인문19/예체능19)

그림과 같이 중심이 원점이고 반지름의 길이가 2인 원 위에 점 P가 있다. 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서의 접선과 중심이 점 $(5,\ 0)$이고 반지름의 길이가 1인 원이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 a의 값의 범위는? [3점]



① $0<a<\frac{4}{5}$ ② $\frac{1}{5}<a<1$ ③ $\frac{2}{5}<a<\frac{6}{5}$
④ $\frac{3}{5}<a<\frac{7}{5}$ ⑤ $\frac{4}{5}<a<\frac{8}{5}$

S036

○○
(2004(9)-인문12/예체능12)

원 $x^2+y^2=5$ 위의 점 $(a,\ b)$에서의 접선과 x축, y축으로 둘러싸인 삼각형의 넓이가 5일 때, $a+b$의 값은? (단, 점 $(a,\ b)$는 제1사분면 위의 점이다.) [3점]

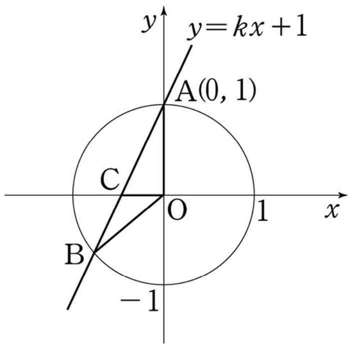
① 10 ② $3\sqrt{5}$ ③ $2\sqrt{10}$
④ $2\sqrt{5}$ ⑤ $\sqrt{10}$

S037

○○ (2004(9)−인문27/예체능27/자연27)

원 $x^2+y^2=1$과 직선 $y=kx+1$(단, $k>1$)이 만나는 두 점을 $\mathrm{A}(0,\ 1)$과 B라 하고, 이 직선이 x축과 만나는 점을 C, 원점을 O라 하자.

$\triangle\mathrm{AOC}:\triangle\mathrm{BOC}=5:4$일 때, k의 값을 구하시오. [3점]



S038

○○ (2004−인문29/예체능29/자연29)

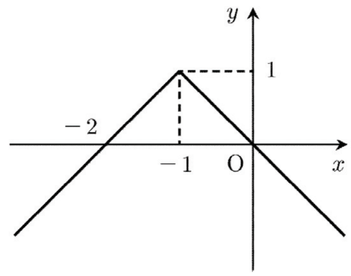
x축에 접하는 서로 다른 두 원이 점 $\mathrm{A}(2,\ 5)$와 점 $\mathrm{B}(4,\ 1)$에서 만날 때, 두 원의 중심을 지나는 직선과 공통외접선과의 교점의 x좌표를 구하시오. [3점]

S. 평행이동, 대칭이동

S039

○○ (1993(실험평가5차)−공통4)

그래프가 아래 그림과 같은 함수 $y=f(x)$를 나타내는 식은? [3점]

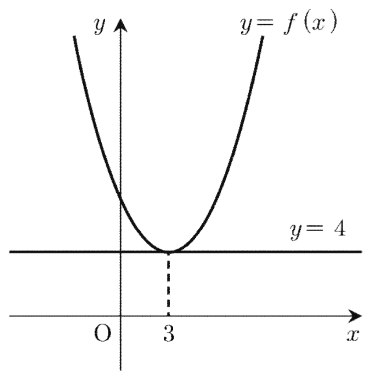


① $|x-1|-|y|=1$　② $|x+1|-y=1$
③ $|x-1|+|y|=1$　④ $|x+1|+y=1$
⑤ $|x+1|+|y|=1$

S040

○○ (2003(9)−예체능14)

이차함수 $f(x)=x^2-6x+13$의 그래프를 직선 $y=4$에 대하여 대칭이동 한 그래프를 나타내는 함수를 $y=g(x)$라 할 때, $g(-1)$의 값은? [3점]

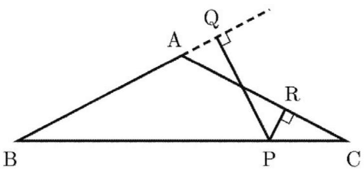


① -12　② -6　③ 0
④ 6　⑤ 12

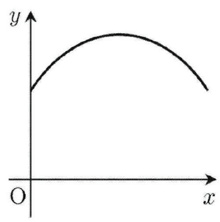
S041

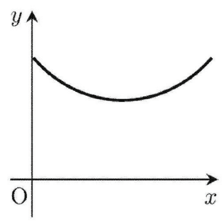
○○○
(2003-인문20/예체능20/자연20)

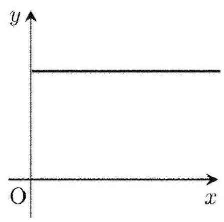
그림과 같이 $\overline{AB}=\overline{AC}$인 이등변삼각형 ABC의 변 BC 위를 움직이는 점 P가 있다. 점 P에서 변 AB 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 Q, 변 AC 또는 그 연장선에 내린 수선의 발을 R라고 하자.

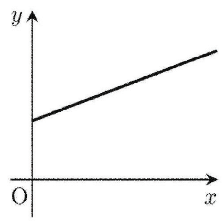


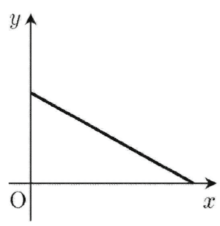
$\overline{BP}=x$와 $\overline{PQ}+\overline{PR}=y$에 대하여 y를 x의 함수로 나타낼 때, 그 그래프의 개형은? [3점]

①


②


③


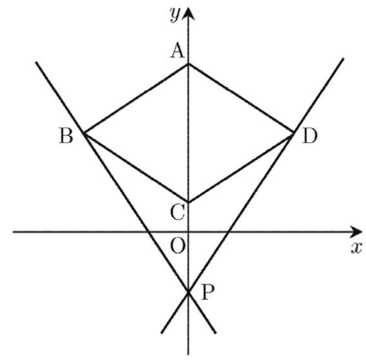
④


⑤


S042

○○
(2004(6)-예체능16)

그림과 같이 마름모 ABCD의 두 꼭짓점 A와 C가 y축 위에 있다. y축 위의 한 점 P에 대하여 직선 PD의 방정식이 $3x-2y=1$일 때, 직선 PB의 방정식은 $ax+by=1$이다. 이때, $a+b$의 값은? [3점]



① -5　② -3　③ -1　④ 2　⑤ 5

T. 집합 사이의 포함 관계

T001
○
(2019(6)−나형3)

두 집합

$A=\{1,\ 7\},\ B=\{1,\ 2,\ a\}$

에 대하여 $A\subset B$일 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

T002
○
(2018−나형2)

두 집합 $A=\{2,\ a+1,\ 5\},\ B=\{2,\ 3,\ b\}$가 $A=B$를 만족시킬 때, $a+b$의 값은? (단, $a,\ b$는 실수이다.) [2점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

T003
○○
(2004(9)−예체능21)

x에 대한 부등식 $x^2-2kx+k^2-1\le 0$의 해집합이 집합 $\{x\,|\,4\le x\le 8\}$의 부분집합이 되도록 하는 k값의 범위는? [3점]

① $-2\le k\le 1$ ② $3\le k\le 5$ ③ $4\le k\le 6$
④ $5\le k\le 7$ ⑤ $8\le k\le 11$

T. 집합의 연산(합집합과 교집합)

T004
○
(2017(9)−나형2)

두 집합

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\},$
$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

에 대하여 $n(A\cap B)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

T005
○
(2018(6)−나형2)

두 집합

$A=\{1,\ 2\},\ B=\{1,\ 2,\ 4\}$

에 대하여 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은? [2점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

T006
○○
(2003(9)−인문19/예체능19)

두 집합 A와 B는 다음과 같다.

$A=\{1,\ 5,\ a^2-a-b\}$
$B=\{2,\ b-3,\ a^2+4a+7\}$

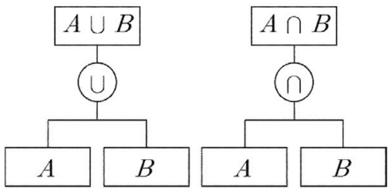
$A\cap B=\{4,\ 5\}$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

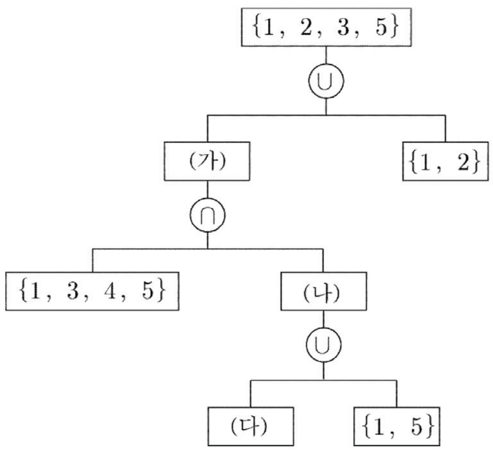
T007

○○ (1999-인문10/예체능10/자연10)

두 집합 A, B의 합집합과 교집합을 다음 그림과 같이 나타내었다.



아래 그림에서 (가)에 알맞은 것은? [3점]



① $\{1, 2, 3, 4\}$ ② $\{1, 2, 3, 5\}$ ③ $\{2, 3, 5\}$
④ $\{1, 3, 5\}$ ⑤ $\{3, 5\}$

T008

○○ (1991(실험평가1차)-공통5)

좌표평면에서 두 집합

$A=\{(x, y) \mid (x+y-1)(x-y-1)=0\}$,

$B=\{(x, y) \mid x^2-y^2=0\}$

의 교집합 $A \cap B$에 속해 있는 원소의 개수는? [3점]

① 무한히 많다. ② 0 ③ 4
④ 1 ⑤ 2

T009

○○ (1999-인문8/예체능8/자연8)

자연수 n에 대하여 집합 A_n을

$$A_n = \{x \mid x\text{는 } n\text{과 서로소인 자연수}\}$$

라고 할 때, 〈보기〉중 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $A_2 = A_4$
ㄴ. $A_3 = A_6$
ㄷ. $A_6 = A_3 \cap A_4$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T. 집합의 연산(여집합과 차집합)

T010
(2018-나형24)

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 두 부분집합

$$A=\{1,\ 2,\ 3\},\ B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$$

에 대하여 $n(A\cup B^C)$의 값을 구하시오. [3점]

T011
(2019(9)-나형2)

두 집합

$A=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\},\ B=\{1,\ 5\}$

에 대하여 집합 $A-B$의 모든 원소의 합은? [2점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

T012
(2017(6)-나형7)

전체집합 $U=\{x|x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\},\ B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$

에 대하여 집합 B^C-A^C의 모든 원소의 합은? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

T013
(2017-나형24)

전체집합 $U=\{x|x$는 9 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$$A=\{3,\ 6,\ 7\},\ B=\{a-4,\ 8,\ 9\}$$

에 대하여

$$A\cap B^C=\{6,\ 7\}$$

이다. 자연수 a의 값을 구하시오. [3점]

T014
(2000-예체능26)

전체집합이 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 100\}$이고

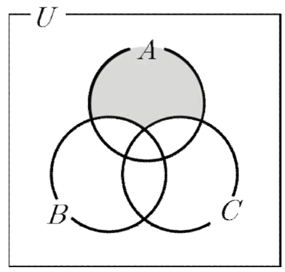
$A=\{x\in U\mid x$는 홀수$\}$,

$B=\{x\in U\mid x$는 3의 배수$\}$

일 때, 집합 $A^C\cap B$의 원소의 개수를 구하시오. [3점]

T015
(1998-인문예체능5)

다음 벤 다이어그램에서 어두운 부분을 나타내는 집합은? (단, U는 전체집합, X^C는 X의 여집합을 나타낸다.) [2점]

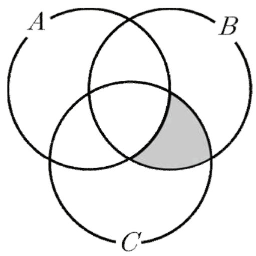


① $A\cap(B\cap C)^C$ ② $A\cap(B\cup C)^C$
③ $A\cap(B^C\cap C)^C$ ④ $A\cap(B^C\cap C^C)^C$
⑤ $A\cap(B^C\cup C^C)^C$

T016

○
(2002－예체능6)

다음 벤 다이어그램에서 어두운 부분을 나타내는 집합은? [3점]



① $(B\cap C)-(A-(A\cap B))$
② $(B\cap C)-(B-(A\cap B))$
③ $(B\cap C)-(C-(A\cap B))$
④ $(B\cap C)-(A\cap B\cap C)$
⑤ $(B\cap C)-((A\cap B)-(A\cap B\cap C))$

T017

○
(2004(6)－예체능25)

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 세 부분집합 A, B, C가 다음과 같다.

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$
$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$
$C=\{5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

이때, 집합 $(A\cup B^C)-C$에 속하는 모든 원소의 합을 구하시오. [2점]

T018

○
(2003(9)－인문25/예체능25/자연25)

전체집합 $U=\{x\mid x$는 20이하의 자연수$\}$의 세 부분집합 A, B, C는 다음과 같다.

$A=\{x\mid x$는 소수$\}$
$B=\{x\mid x$는 3의 배수$\}$
$C=\{x\mid x$는 5의 배수$\}$

이때, $(B\cup C)\cap A^C$의 원소의 개수를 구하시오.
(단, A^C은 A의 여집합이다.) [2점]

T019

○○
(1995－인문예체능5/자연5)

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\subset B$일 때, 다음 중 항상 성립한다고 할 수 없는 것은?
(단, $U\neq\varnothing$) [1점]

① $A\cup B=B$ ② $A\cap B=A$ ③ $(A\cap B)^C=B^C$
④ $B^C\subset A^C$ ⑤ $A-B=\varnothing$

T020

○○
(2004(6)−인문5/예체능5/자연5)

전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C가 다음을 만족한다.

$$A \cup (A^C \cap C) = A,\ B \cap C^C = \varnothing$$

이때, 세 집합 A, B, C의 포함 관계로 옳은 것은? [2점]

① $A \subset B \subset C$ ② $A \subset C \subset B$ ③ $B \subset C \subset A$
④ $C \subset A \subset B$ ⑤ $C \subset B \subset A$

T021

○○
(1997−인문예체능5/자연5)

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$A * B = (A \cap B) \cup (A \cup B)^C$$

라고 정의할 때, 항상 성립한다고 할 수 없는 것은?
(단, $U \neq \varnothing$) [2점]

① $A * U = U$ ② $A * B = B * A$
③ $A * \varnothing = A^C$ ④ $A * B = A^C * B^C$
⑤ $A * A^C = \varnothing$

T022

○○
(2001−인문16/예체능16/자연16)

전체집합 $U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 서로 다른 두 부분집합 X, Y에 대하여 $(X \cup Y) - (X \cap Y)$의 가장 작은 원소가 X에 속할 때, $X \Rightarrow Y$라 하자. U의 부분집합
$A = \{2,\ 3,\ 4\}$, $B = \{1,\ 2,\ 5\}$, $C = \{2,\ 4,\ 5\}$
에 대하여 옳은 것은? [3점]

① $A \Rightarrow B \Rightarrow C$ ② $A \Rightarrow C \Rightarrow B$ ③ $B \Rightarrow A \Rightarrow C$
④ $B \Rightarrow C \Rightarrow A$ ⑤ $C \Rightarrow A \Rightarrow B$

T023

○○
(2003−인문25/예체능25/자연25)

전체집합 U의 두 부분집합 A와 B에 대하여

$$A \cap B^C = A,\ n(A) = 9,\ n(B) = 14$$

일 때, $n(A \cup B)$의 값을 구하시오.
(단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [2점]

T024

○○
(2017(9)-나형27)

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 두 부분집합
$A=\{1,\ 2\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5\}$에 대하여

$$X \cup A = X,\ X \cap B^C = X$$

를 만족시키는 U의 모든 부분집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

T025

○○
(2004-인문28/예체능28/자연28)

세 집합 A, B, C에 대하여
$n(A)=14$, $n(B)=16$, $n(C)=19$,
$n(A \cap B)=10$, $n(A \cap B \cap C)=5$
일 때, $n(C-(A \cup B))$의 최솟값을 구하시오. (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [3점]

T026

○○
(2018(6)-나형24)

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$의 부분집합 A에 대하여

$$\{1,\ 2,\ 3\} \cap A = \varnothing$$

을 만족시키는 모든 집합 A의 개수를 구하시오. [3점]

T027

○○
(2002-인문27/예체능27/자연27)

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$일 때, $\{2,\ 3\} \cap A \neq \varnothing$를 만족시키는 U의 부분집합 A의 개수를 구하시오. [3점]

T028

○○
(2019(6)−나형27)

다음 조건을 만족시키는 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $n(B-A)$의 최댓값을 구하시오. [4점]

(가) $n(U)=25$
(나) $A\cap(A^C\cup B)\neq\varnothing$
(다) $n(A-B)=11$

T029

○○
(2020(6)−나형26)

자연수 전체의 집합 U의 두 부분집합

$A=\{1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16\}$, $B=\{x\,|\,x^2-4x+3=0\}$

에 대하여

$n(X)=2$, $X-(A-B)=\varnothing$

을 만족시키는 U의 모든 부분집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

T030

○○
(2002−인문29/예체능29/자연29)

어떤 행사에서 20종류의 스티커를 모으면 경품을 받을 수 있다고 한다. 갑은 네 종류, 을과 병은 각각 다섯 종류의 스티커를 모았다. 두 사람씩 비교하였을 때 각각 세 종류의 스티커가 공통으로 있었고, 세 사람을 함께 비교하였을 때는 두 종류의 스티커가 공통으로 있었다. 갑, 을, 병의 스티커를 모아서 경품을 받으려고 할 때, 최소로 더 필요한 스티커의 종류의 수를 구하시오. [3점]

T031

○○○
(2004(6)−인문29/예체능29)

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 30\}$의 부분집합 중에는 어떤 두 원소의 곱도 6의 배수가 아닌 수들로만 이루어진 것이 있다. 예를 들면, $\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 20\}$, $\{3,\ 5,\ 9,\ 15\}$이다. 이와 같은 부분집합 중에서 원소의 개수가 최대인 집합을 M이라고 할 때, 집합 M의 원소의 개수를 구하시오. [3점]

T032

○○○
(2000-인문9/예체능9/자연9)

전체집합 $U=\{1, 2, 3, \cdots, 100\}$의 부분집합 A에 대하여 $f(A)$를 A에 속하는 모든 원소의 합이라고 하자.
U의 두 부분집합 A, B에 대하여, 〈보기〉중 항상 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, $f(\varnothing)=0$) [3점]

ㄱ. $f(A^C)=f(U)-f(A)$
ㄴ. $A\subset B$이면, $f(A)\leq f(B)$이다.
ㄷ. $f(A\cup B)=f(A)+f(B)$

① ㄴ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T033

●●●
(2004(9)-인문13/예체능13/자연13)

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여
$(A-B)^C\subset B$가 성립할 때, 〈보기〉에서 항상 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $A\cap B=\varnothing$
ㄴ. $A\cup B^C=A$
ㄷ. $A\cup B=U$

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄷ
④ ㄱ, ㄴ　⑤ ㄴ, ㄷ

T034

★★★
(1997-인문예체능29/자연29)

두 방정식 $P(x)=0$, $Q(x)=0$의 서로 다른 실근의 개수는 7개, 9개이고,
집합 $A=\{(x, y)\mid P(x)Q(y)=0$이고
$Q(x)P(y)=0$, x와 y는 실수$\}$는 무한집합이다.
집합 A의 부분집합
$B=\{(x, y)\mid (x, y)\in A$이고 $x=y\}$
의 원소의 개수를 $n(B)$라고 하면 이것은 $P(x)$, $Q(x)$에 따라 변한다. $n(B)$의 최댓값을 구하라. [4점]

T. 명제와 조건

T035
○
(2017(9)−나형12)

정수 x에 대한 조건

p: $x(x-11) \geq 0$

에 대하여 조건 $\sim p$의 진리집합의 원소의 개수는? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

T036
○
(2018(9)−나형9)

실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

p: $(x+2)(x-4) \neq 0$,

q: $-2 \leq x \leq 4$

다음 중 참인 명제는? [3점]

① $p \to q$ ② $\sim p \to \sim q$ ③ $q \to \sim p$
④ $q \to p$ ⑤ $\sim p \to q$

T037
○
(2019(6)−나형5)

실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

p: $x = a$,

q: $x^2 - 3x - 4 \leq 0$

명제 $p \to q$가 참이 되도록 하는 실수 a의 최댓값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

T038
○
(2017(6)−나형16)

실수 x에 대한 세 조건

p: $|x| > 4$,

q: $x^2 - 9 \leq 0$,

r: $x \leq 3$

에 대하여 보기에서 참인 명제만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $q \to r$
ㄴ. $p \to \sim q$
ㄷ. $r \to \sim p$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T039
○○
(2003−인문5/예체능5)

전체집합 U의 세 부분집합 P, Q, R가 각각 세 조건 p, q, r의 진리집합이고, 두 명제 $p \to q$와 $q \to r$가 모두 참일 때, 〈보기〉 중 옳은 것을 모두 고르면? [2점]

ㄱ. $P \subset R$
ㄴ. $(P \cup Q) \subset R^C$
ㄷ. $(P^C \cap R^C) \subset Q^C$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T040

○○
(2017(6)-나형13)

자연수 a에 대한 조건

'모든 양의 실수 x에 대하여 $x-a+4>0$이다.'

가 참인 명제가 되도록 하는 a의 개수는? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

T. 명제의 역과 대우

T041

○○
(1993(실험평가5차)-공통5)

한 쪽 면에는 숫자, 다른 쪽 면에는 영어 문자가 쓰여 있는 카드가 있다. 카드의 한 쪽 면에 홀수가 쓰여 있으면 다른 쪽 면에 자음이 쓰여 있다고 한다. 한 면에 ②, ⑦, Ⓚ, Ⓤ가 각각 쓰여 있는 카드를 차례로 보여줄 때, 위의 규칙에 맞는 카드인지 알기 위해 다른 쪽 면에 무엇이 쓰여 있는지 확인할 필요가 있는 카드는 어느 것인가? [3점]

① ⑦, Ⓤ ② ⑦, Ⓚ ③ ②, Ⓤ
④ ②, Ⓚ ⑤ ②, ⑦, Ⓚ, Ⓤ

T042

○
(2018(6)-나형12)

실수 a에 대하여 명제

'$a \geq \sqrt{3}$이면 $a^2 \geq 3$이다.'

의 대우는? [3점]

① $a^2 < 3$이면 $a > \sqrt{3}$이다.
② $a^2 < 3$이면 $a < \sqrt{3}$이다.
③ $a^2 \leq 3$이면 $a \leq \sqrt{3}$이다.
④ $a > \sqrt{3}$이면 $a^2 \leq 3$이다.
⑤ $a \geq \sqrt{3}$이면 $a^2 < 3$이다.

T. 필요조건과 충분조건

T043

○
(2019(9)-나형7)

실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

p: $x-\dfrac{a}{2}=1$,

q: $2\le 2x-1\le 12$

p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 개수는? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

T044

○
(2019-나형11)

실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

p: $x^2-4x+3>0$,

q: $x\le a$

$\sim p$가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a의 최솟값은? [3점]

① 5 ② 4 ③ 3
④ 2 ⑤ 1

T045

○
(2020(9)-나형4)

실수 x에 대한 두 조건 p, q가 다음과 같다.

p: $|x-a|\le 1$,

q: $x<10$

p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 정수 a의 최댓값은? [3점]

① 0 ② 2 ③ 4
④ 6 ⑤ 8

T046

○
(2020-나형6)

실수 x에 대한 두 조건

p: $x=a$,

q: $3x^2-ax-32=0$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 양수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

T047

○○
(1991(실험평가1차)-공통2)

a, b가 실수일 때, 부등식 $|a|<|b|$가 성립할 필요충분조건은? [3점]

① $a<b$ ② $a^2<b^2$ ③ $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$
④ $|a|<b$ ⑤ $a<|b|$

T048

○○
(2003-인문13/예체능13)

양의 실수 a와 b에 대하여 집합 A와 B를 다음과 같이 정의한다.

$A=\{x\,|\,(x-a)(x+a)\le 0\}$

$B=\{x\,|\,|x-1|\le b\}$

이때, $A\cap B=\varnothing$이기 위한 필요충분조건은? [3점]

① $a-b<1$ ② $a-b>1$ ③ $a+b=1$
④ $a+b<1$ ⑤ $a+b>1$

T049

○○ (2004(9)−인문26/예체능26/자연26)

두 조건 p와 q가 다음과 같다.

p : $x^2-8x+15 \le 0$

q : $(x-2)(x-a)>0$(단, a는 상수)

p가 $\sim q$이기 위한 충분조건일 때, a의 최솟값을 구하시오. [2점]

T050

○○ (2017−나형7)

실수 x에 대한 두 조건

p: $|x-1| \le 3$,

q: $|x| \le a$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 최솟값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

T051

○○ (2018(6)−나형6)

실수 x에 대한 두 조건

p: $x^2+2x-a=0$, q: $x-3=0$

에 대하여 p가 q이기 위한 필요조건이 되도록 하는 상수 a의 값은? [3점]

① 15 ② 12 ③ 9
④ 6 ⑤ 3

T052

○○ (2018−나형6)

실수 x에 대한 두 조건

p: $(x-1)(x-4)=0$,

q: $1<2x \le a$

에 대하여 p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 자연수 a의 최솟값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

T. 여러 가지 증명법(대우명제, 귀류법)

T053

○
(1993(실험평가5차)-공통10)

다음은 $\sqrt{2}$가 무리수임을 증명한 것이다.

(증명)
$\sqrt{2}$가 유리수라고 가정하면,
$\boxed{\quad (가) \quad}$인 자연수 m, n에 대하여
$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$ 꼴로 나타낼 수 있다.
양변을 제곱하면 $2=\dfrac{n^2}{m^2}$이므로, $n^2=2m^2$이다.
따라서 $\boxed{\quad (나) \quad}$은 2의 배수이다.
$\boxed{\quad (나) \quad}=2k$라 놓으면 $n^2=2m^2$에서
$(\boxed{\quad (다) \quad})^2=2k^2$이 된다.
따라서 $\boxed{\quad (다) \quad}$도 2의 배수이다.
이는 m, n이 $\boxed{\quad (가) \quad}$라는 가정에 모순된다.
그러므로 $\sqrt{2}$는 유리수가 될 수 없고, 무리수이다.

위의 증명과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적으면? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	홀수	m	n
②	서로소	m	n
③	$m\neq n$	m	n
④	홀수	n	m
⑤	서로소	n	m

T054

○○
(1998-인문예체능17/자연17)

다음은 명제 『$3m^2-n^2=1$을 만족하는 $\boxed{\quad (가) \quad}$』에 대한 증명에서 중간 부분을 적은 것이다.

…(생략)…
m, n이 정수이고 $3m^2=n^2+1$이므로,
n^2+1은 3의 배수이다.
한편, 정수 n이 어떤 정수 k에 대하여,
$n=3k$이면 $n^2=(3k)^2=9k^2=3(3k^2)$,
$n=3k+1$이면
$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$,
$n=3k+2$이면
$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$
이므로, n^2을 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1이다.
따라서 n^2+1을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다.
…(생략)…

다음 중 위의 $\boxed{\quad (가) \quad}$에 가장 알맞은 것은? [2점]

① m, n 중 적어도 하나는 정수이다.
② m, n 중 어느 것도 정수가 아니다.
③ m, n이 모두 정수인 해가 적어도 하나 있다.
④ m, n이 모두 정수인 해가 오직 하나 있다.
⑤ m, n이 모두 정수인 해는 없다.

T. 절대부등식

T055

○
(1992(실험평가3차)-공통6)

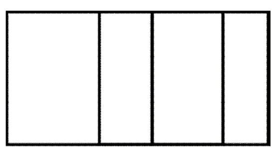
x, y가 0보다 큰 실수일 때 $(2x+y)\left(\dfrac{8}{x}+\dfrac{1}{y}\right)$의 최솟값은? [3점]

① 16 ② 18 ③ 19
④ 25 ⑤ 27

T056

○○
(1992(실험평가4차)-공통6)

어떤 농부가 일정한 길이의 철망을 가지고 아래의 그림과 같이 네 개의 작은 직사각형으로 이루어진 직사각형 모양의 우리를 만들려고 한다. 바깥쪽 직사각형의 가로, 세로의 길이 중 짧은 것이 70m 일 때, 우리 전체의 넓이가 최대라고 한다. 농부가 사용한 철망의 길이는? [3점]



① 350m ② 600m ③ 700m
④ 850m ⑤ 900m

T057

○○
(2003-인문19/예체능19/자연19)

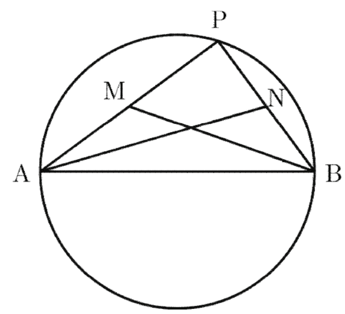
그림과 같이 길이가 a인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위를 움직이는 점 P가 있다. 선분 PA와 선분 PB의 중점을 각각 M과 N이라고 하면,

$\overline{\text{PA}}^2+\overline{\text{PB}}^2=$ (가)

이다. 따라서

$\overline{\text{AN}}^2+\overline{\text{BM}}^2=$ (나)

이므로 $\overline{\text{AN}}\cdot\overline{\text{BM}}$의 최댓값은 (다) 이다.
위의 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]



	(가)	(나)	(다)
①	a^2	$\dfrac{5}{4}a^2$	$\dfrac{\sqrt{5}}{2}a^2$
②	a^2	$\dfrac{5}{4}a^2$	$\dfrac{5}{8}a^2$
③	a^2	$\dfrac{3}{2}a^2$	$\dfrac{3}{4}a^2$
④	$2a^2$	$\dfrac{3}{2}a^2$	$\dfrac{\sqrt{5}}{2}a^2$
⑤	$2a^2$	$\dfrac{5}{4}a^2$	$\dfrac{5}{8}a^2$

T058

○○○
(2003(9)-인문6/예체능6)

집합 A와 B는 다음과 같다.

$$A=\{x \mid x^2-3x+2 \le 0\}$$
$$B=\{x \mid ax^2-(a^2+a+1)x+a^2+1 \le 0\}$$

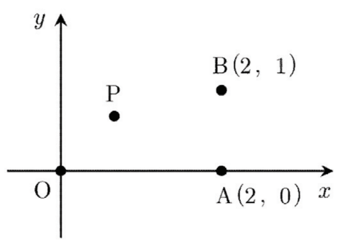
이때, 항상 성립하는 것은? (단, $a>0$) [3점]

① $A \subset B$ ② $B \subset A$ ③ $A=B$
④ $A \cap B = \varnothing$ ⑤ $B=\varnothing$

T059

○○○
(1992(실험평가4차)-공통11)

평면 위에서 질량이 같은 질점들을 한 점을 중심으로 가장 쉽게 회전시키려면 각 점으로부터 회전중심까지의 거리의 제곱의 합이 가장 작아야 한다. 평면 위의 점 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(2,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 1)$에 각각 질량이 같은 질점이 놓여 있을 때 이들 세 질점을 가장 쉽게 회전시키는 회전중심 P의 좌표는? [4점]

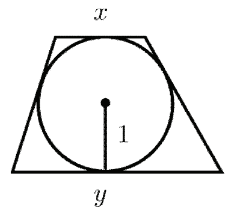


① $\mathrm{P}\left(\frac{2}{3},\ \frac{2}{3}\right)$ ② $\mathrm{P}\left(\frac{4}{3},\ \frac{1}{3}\right)$ ③ $\mathrm{P}\left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$
④ $\mathrm{P}\left(1,\ \frac{1}{2}\right)$ ⑤ $\mathrm{P}\left(2,\ \frac{1}{2}\right)$

T060

●●●
(1993(실험평가5차)-공통15)

단위원에 외접하는 사다리꼴에서, 평행인 두 변의 길이를 x, y라 할 때, 다음 보기에 있는 명제들 중 참인 것을 모두 고르면? [4점]



ㄱ. $x+y \ge 4$이다.
ㄴ. $x+y=4$이면, 사다리꼴은 정사각형이다.
ㄷ. $xy \ge 4$이다.
ㄹ. $xy=4$이면, 사다리꼴은 정사각형이다.

① ㄱ, ㄴ ② ㄷ, ㄹ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄱ, ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ, ㄹ

U. 함수

U001

(1991(실험평가1차)-공통21)

[주관식1] 두 실수 a, b에 대하여 $a*b$를

$a^2 \le 2b$이면 $a*b=2b$,

$a^2 > 2b$이면 $a*b=a^2$

으로 정의하자. [3점]

1) $\frac{2}{3}*\frac{2}{3}$의 값을 구하시오.

2) 함수 $f(x)=x*x$의 그래프를 그리시오.

U002

(1991(실험평가1차)-공통22)

[주관식2] 좌표평면 위에 세 점 $\mathrm{A}(0,\ 2)$, $\mathrm{B}(-2,\ 0)$, $\mathrm{C}(2,\ 0)$을 꼭짓점으로 가지는 삼각형 ABC가 있다. 밑변 $\overline{\mathrm{BC}}$ 위의 한 점 $\mathrm{P}(x,\ 0)$을 지나 $\overline{\mathrm{BC}}$에 수직인 직선으로 이 삼각형을 두 부분으로 나눌 때, 꼭짓점 B 쪽의 도형의 면적 y를 x의 함수로 나타내시오. (단, $-2<x<2$) [3점]

U003

(2003-인문12/예체능12/자연12)

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)$와 $g(x)$에 대하여 함수 $h(x)$를 다음과 같이 정의한다.

$$h(x)=\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}g(x)$$

〈보기〉중 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 어떤 점에서 만나면 $y=h(x)$의 그래프는 그 교점을 지난다.
ㄴ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 모두 y축에 대하여 대칭이면 $y=h(x)$의 그래프도 y축에 대하여 대칭이다.
ㄷ. $y=f(x)$와 $y=g(x)$가 모두 일대일대응이면 $y=h(x)$도 일대일대응이다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

U. 합성함수

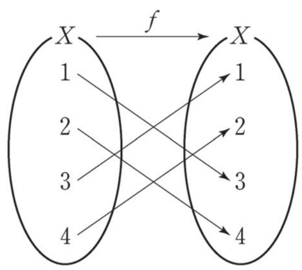
U004
(1999－예체능3)

두 함수 $f(x)=2x+1$, $g(x)=3x^2-1$에서
$g(f(0))$의 값은? [2점]

① -1　② 0　③ 1
④ 2　⑤ 3

U005
(2017(6)－나형5)

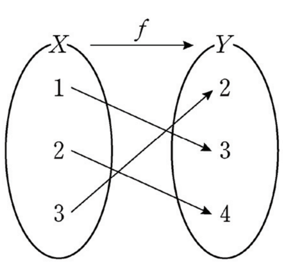
그림은 함수 $f: X \to X$를 나타낸 것이다.
$f(2)+(f \circ f)(3)$의 값은? [3점]

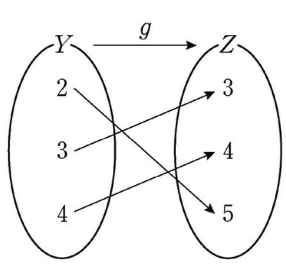


① 3　② 4　③ 5
④ 6　⑤ 7

U006
(2017(9)－나형5)

그림은 두 함수 $f: X \to Y$, $g: Y \to Z$를 나타낸 것이다.





$(g \circ f)(3)$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

[세트문제] 아래의 두 문제는 한 세트입니다.
함수 $f: R \to R$을 x가 유리수일 때 $f(x)=1$, x가 무리수일 때 $f(x)=0$으로 정의하자. (단, R은 실수 전체의 집합이다.)

U007
(1991(실험평가1차)－공통6)

다음 중 옳은 것은? [2점]

① $f\left(\frac{2}{3}\right)=1$, $f(\sqrt{2})=1$　② $f\left(\frac{2}{3}\right)=1$, $f(\sqrt{2})=0$
③ $f\left(\frac{2}{3}\right)=0$, $f(\sqrt{2})=1$　④ $f\left(\frac{2}{3}\right)=0$, $f(\sqrt{2})=0$
⑤ $f(0)=0$, $f(1)=1$

U008
(1991(실험평가1차)－공통7)

합성함수 $f \circ f$의 치역은? [3점]

① 무리수 전체의 집합　② 유리수 전체의 집합
③ $\{0, 1\}$　④ $\{0\}$　⑤ $\{1\}$

U009
(1992(실험평가2차)－공통14)

함수 $f(x)=2x+6$, $g(x)=ax-1$에 대하여
$f \circ g=g \circ f$일 때, a의 값은? [2점]

① $\frac{1}{6}$　② $\frac{5}{6}$　③ 1
④ 2　⑤ 6

U010

(1996-인문예체능13)

다항식 $g(x)$가 모든 실수 x에 대하여 $g(g(x))=x$이고 $g(0)=1$일 때, $g(-1)$의 값은? [1.5점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

U011

(1992(실험평가3차)-공통11)

$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$이고 함수 $f:X\to X$는 다음과 같이 정의한다.

$$f(x)=\begin{cases} x+1 & (x\leq 3) \\ 1 & (x=4) \end{cases}$$

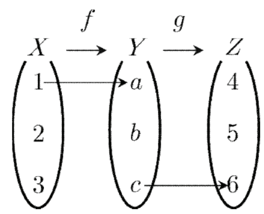
이때, 함수 $g:X\to X$가 $g(1)=3$이고 $f\circ g=g\circ f$라면 다음 중 옳은 것은? (단, $(f\circ g)(x)=(f(g(x))$이다.) [3점]

① $g(2)=4,\ g(3)=2$ ② $g(2)=4,\ g(3)=1$
③ $g(2)=1,\ g(3)=2$ ④ $g(2)=1,\ g(3)=4$
⑤ $g(2)=2,\ g(3)=4$

U012

(2000-인문14/예체능14)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{a,\ b,\ c\}$, $Z=\{4,\ 5,\ 6\}$에 대하여, 일대일대응인 함수 $f:X\to Y$와 함수 $g:Y\to Z$가 $f(1)=a$, $g(c)=6$, $(g\circ f)(2)=4$를 만족시킬 때, $f(3)$의 값은? [2점]



① a ② b
③ c ④ b, c 모두 가능하다.
⑤ a, b, c 모두 가능하다.

U013

(2004(6)-인문10/예체능10/자연10)

음이 아닌 정수 n에 대하여 2^n+1을 3으로 나눈 나머지를 $f(n)$이라 하자. 〈보기〉 중 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

ㄱ. $f(4)=2$
ㄴ. n이 홀수이면 $f(n)=0$
ㄷ. n이 짝수이면 $f(f(n))=2$

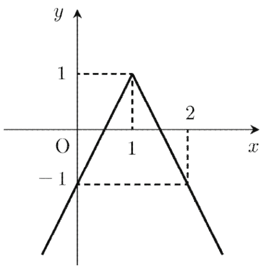
① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

U014

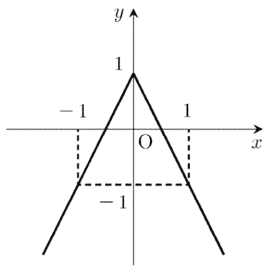
○○
(2004(6)−인문8/예체능8)

실수 전체의 집합에서 정의된 두 함수 $f(x)=|x|$, $g(x)=-2x+1$에 대하여 합성함수 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프는? [3점]

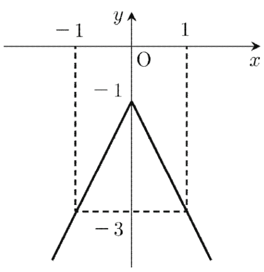
①



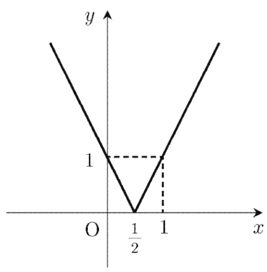
②



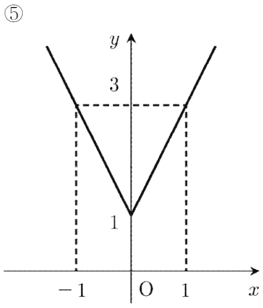
③



④



⑤



U015

○○○
(2002−인문21/예체능21/자연21)

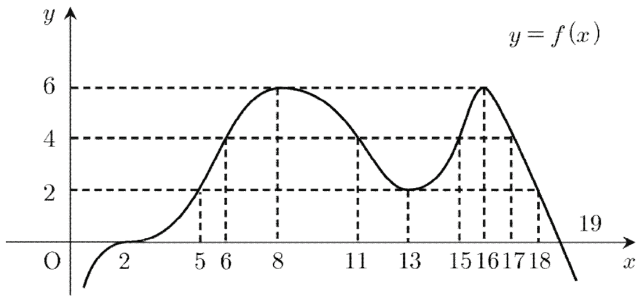
함수 $f(x)=x^2-x-6$, $g(x)=x^2-ax+4$일 때, 모든 실수 x에 대하여 $(f\circ g)(x)\geq 0$이 되는 실수 a의 범위는? (단, $f\circ g$는 g와 f의 합성함수이다.) [3점]

① $a\leq -1$, $a\geq 1$
② $-1\leq a\leq 1$
③ $a\leq -2$, $a\geq 2$
④ $-2\leq a\leq 2$
⑤ $-4\leq a\leq 4$

U016

○○○
(1995-인문예체능18/자연18)

아래 그림은 함수 $y=f(x)$의 그래프이다. x에 관한 방정식 $f(f(x+2))=4$의 서로 다른 실근의 개수와 합을 순서대로 적으면?
(단, $x<2$ 또는 $x>19$일 때 $f(x)<0$이다.) [1.5점]

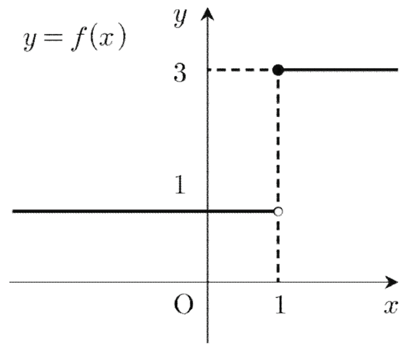


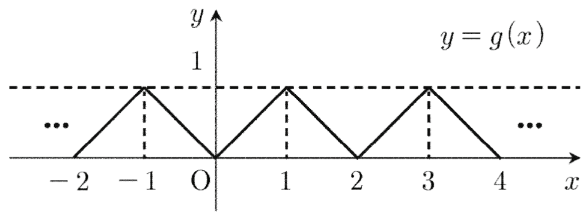
① 2, 20 ② 2, 22 ③ 3, 30
④ 4, 42 ⑤ 4, 50

U017

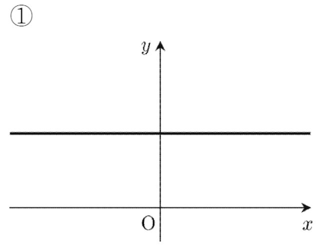
●●●
(2001-인문6/예체능6)

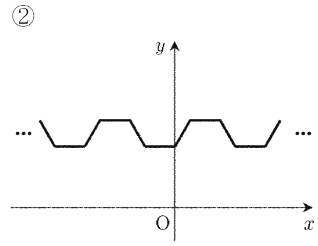
두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 각각 아래 그림과 같다.

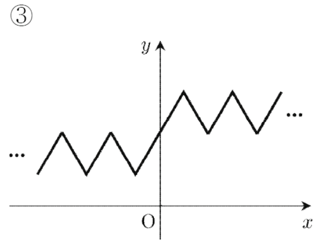


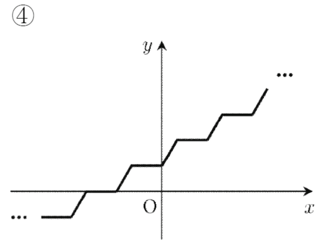


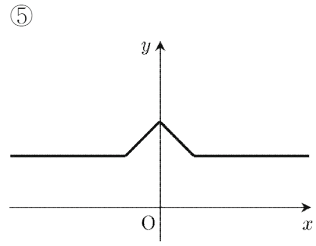
다음 중 $y=(g\circ f)(x)$의 그래프의 개형은? [3점]

①


②


③


④


⑤


U018

(2020(6)-나형21)

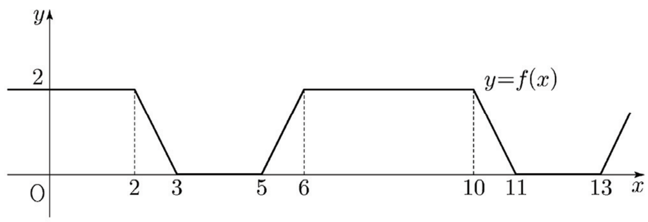
실수 전체의 집합에서 정의된 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) $f(x)=\begin{cases} 2 & (0 \le x < 2) \\ -2x+6 & (2 \le x < 3) \\ 0 & (3 \le x \le 4) \end{cases}$
>
> (나) 모든 실수 x에 대하여
> $f(-x)=f(x)$이고 $f(x)=f(x-8)$이다.

실수 전체의 집합에서 정의된 함수

$$g(x)=\begin{cases} \dfrac{|x|}{x}+n & (x \ne 0) \\ n & (x=0) \end{cases}$$

에 대하여 함수 $(f \circ g)(x)$가 상수함수가 되도록 하는 60 이하의 자연수 n의 개수는? [4점]

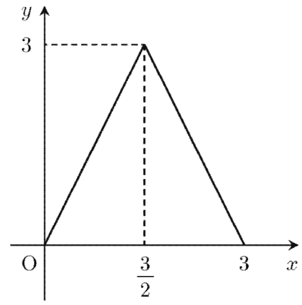


① 30 ② 32 ③ 34 ④ 36 ⑤ 38

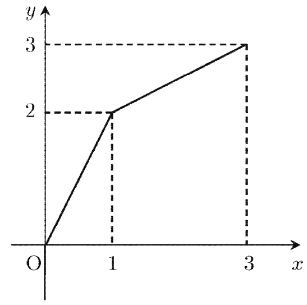
U019

(1994(1차)-공통7)

두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 각각 아래 그림과 같다.

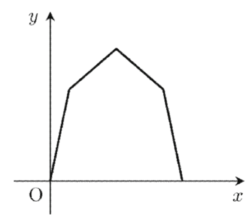


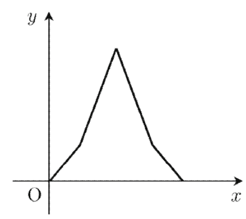
함수 $f(x)$의 그래프

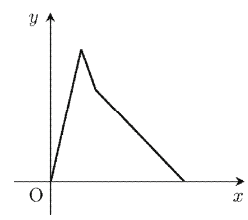


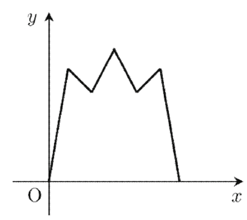
함수 $g(x)$의 그래프

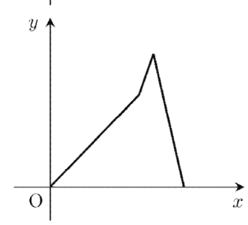
다음 중 $y=(g \circ f)(x)$의 그래프의 개형은? [3점]

①


②


③


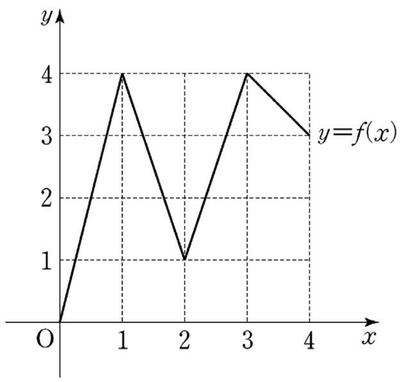
④


⑤


U020

★★★
(2018-나형21)

그림과 같이 닫힌구간 $[0,\ 4]$에서 정의된 함수 $f(x)$의 그래프는 점 $(0,\ 0)$, $(1,\ 4)$, $(2,\ 1)$, $(3,\ 4)$, $(4,\ 3)$을 이 순서대로 선분으로 연결한 것과 같다.



다음 조건을 만족시키는 집합 $X=\{a,\ b\}$의 개수는? (단, $0 \le a < b \le 4$) [4점]

X에서 X로의 함수 $g(x)=f(f(x))$가 존재하고 $g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$를 만족시킨다.

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

U. 역함수

U021

○
(2017(6)-나형4)

함수 $f(x)=2x-3$에 대하여 $f^{-1}(5)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

U022

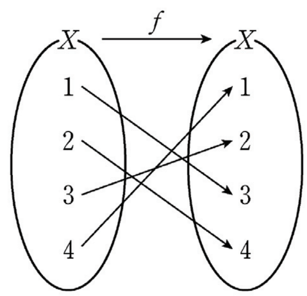
○
(2017(9)-나형24)

함수 $f(x)=2x-13$에 대하여 $f^{-1}(7)$의 값을 구하시오. [3점]

U023

○
(2017-나형6)

그림은 함수 $f:\ X \to X$를 나타낸 것이다.



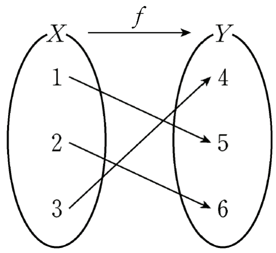
$f(2)+f^{-1}(2)$의 값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

U024

(2018(9)-나형3)

그림은 함수 $f: X \to Y$를 나타낸 것이다.



$f^{-1}(4)$의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

U025

(2001-인문25/예체능25/자연25)

삼차함수 $f(x)=ax^3+b$의 역함수 f^{-1}가 $f^{-1}(5)=2$를 만족시킬 때, $8a+b$의 값을 구하시오[3점]

U026

(2018(6)-나형11)

두 함수

$$f(x)=x^3+1,\ g(x)=x-4$$

에 대하여 $(g^{-1} \circ f)(-1)$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

U027

(1995-인문예체능6/자연6)

$f(x)=2x-1$이다. 함수 $g(x)$는 모든 함수 $h(x)$에 대하여 $(h \circ g \circ f)(x)=h(x)$를 만족시킨다. $g(3)$의 값은? (단, $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$는 실수 전체의 집합 R에서 R로의 함수이다.) [1점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

U028

(2004(9)-예체능4)

일차함수 $f(x)=ax+1$이 모든 x에 대하여 $(f \circ f)(x)=x$를 만족시킬 때, 상수 a의 값은? [2점]

① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

U029

(2004(6)-예체능27)

두 함수 $f(x)=x|x|+1$과 $g(x)=3x-1$에 대하여 $(f \circ g^{-1})(-7)$의 값을 구하시오. (단, g^{-1}는 g의 역함수이다.) [3점]

U030

○○
(2000－예체능10)

〈보기〉의 함수 $f(x)$중 $(f \circ f \circ f)(x)=f(x)$가 성립하는 것을 모두 고른 것은? [3점]

ㄱ. $f(x)=x+1$
ㄴ. $f(x)=-x$
ㄷ. $f(x)=-x+1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

U031

○○○
(1996－인문예체능23/자연23)

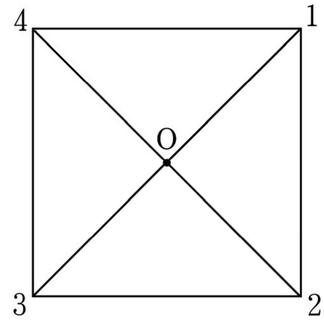
함수 $f(x)=\dfrac{x^2}{4}+a\ (x \geq 0)$의 역함수를 $g(x)$라 할 때, 방정식 $f(x)=g(x)$가 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a의 값의 범위는? [1.5점]

① $0 \leq a < 1$ ② $a \geq 0$ ③ $a < 1$
④ $0 < a < 2$ ⑤ $a < 2$

U032

○○○
(2004－인문13/예체능13/자연13)

아래 그림과 같이 정사각형의 네 꼭짓점을 각각 1, 2, 3, 4라 하고, 두 대각선의 교점을 O라 하자.



이 정사각형을 점 O를 중심으로 하여 시계 방향으로 90° 회전시키면 1은 2의 위치로, 2는 3의 위치로, 3은 4의 위치로, 4는 1의 위치로 이동한다. 이러한 꼭짓점 사이의 이동을 함수 f_1로 나타내면,

$f_1(1)=2,\ f_1(2)=3,\ f_1(3)=4,\ f_1(4)=1$

이다. 이와 같은 방법으로 이 정사각형을 점 O를 중심으로 하여 시계 방향으로 90°, 180°, 270°, 360° 회전시켰을 때, 꼭짓점 사이의 이동을 나타내는 함수를 각각 $f_1,\ f_2,\ f_3,\ f_4$라 하자. 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? (단, f^{-1}은 f의 역함수이다.) [3점]

ㄱ. $f_2 \circ f_3 = f_4$
ㄴ. $f_1^{-1} = f_3$
ㄷ. $f_1 \circ f_3 = f_3 \circ f_1$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

U033

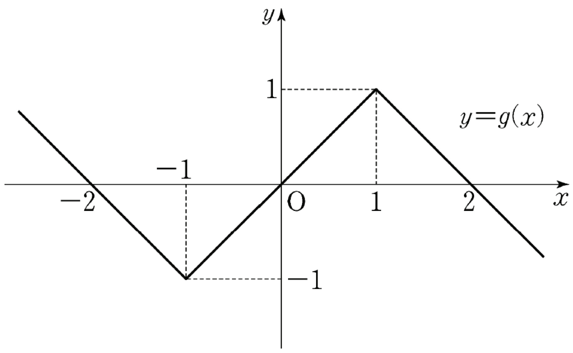
★★★
(2018(9)-나형21)

실수 a, b, c와 두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x+a & (x< -1) \\ bx & (-1\le x<1) \\ x+c & (x\ge 1) \end{cases}$$

$$g(x)=|x+1|-|x-1|-x$$

에 대하여, 합성함수 $g\circ f$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 갖는다. $a+b+2c$의 값은? [4점]

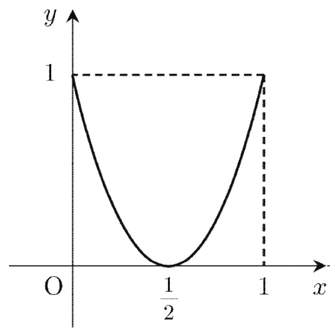


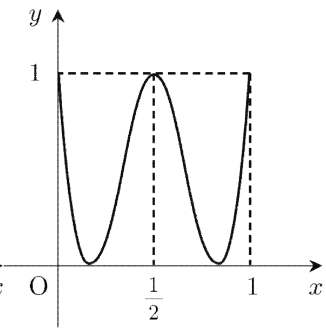
① 2 ② 1 ③ 0
④ -1 ⑤ -2

U034

★★★
(1994(2차)-공통17)

함수 $f(x)=4x^2-4x+1(0\le x\le 1)$에 대하여, $y=f(x)$와 $y=f(f(x))$의 그래프 개형은 각각 다음과 같다.





이때, 집합 $\{x\,|\,f(f(f(x)))=x,\ 0\le x\le 1\}$의 원소의 개수는? [4점]

① 16 ② 12 ③ 8
④ 6 ⑤ 5

U. 유리함수

U035

○
(2020(6)-나형23)

함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(2,\ a)$를 지난다. a의 값을 구하시오. [3점]

U036

○
(2019(9)-나형24)

유리함수 $y=\frac{ax+2}{x+b}$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표가 $(-2,\ 3)$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. (단, a, b는 상수이다.) [3점]

U037

○○
(2004(9)-인문7/예체능7/자연7)

유리함수 $f(x)=\frac{2x-3}{x-2}$의 성질에 대한 설명이다. 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고르면? [3점]

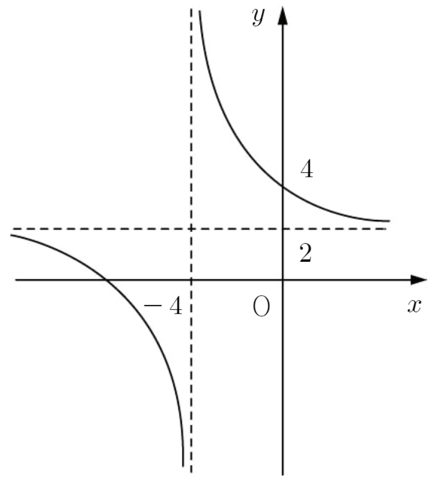
ㄱ. $g(x)=\frac{1}{x}$의 그래프를 평행이동시켜 $f(x)$의 그래프와 일치시킬 수 있다.
ㄴ. $f(x)$의 그래프는 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이다.
ㄷ. $f(x)$의 그래프와 $f(x)$의 역함수의 그래프는 일치한다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

U038

○○
(2003(9)-예체능27)

유리함수 $y=\frac{b}{x+a}+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$를 구하시오. [3점]



U039

○○
(2017-나형10)

좌표평면에서 함수 $y=\frac{3}{x-5}+k$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 상수 k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

U040

○○
(2018(9)-나형7)

닫힌구간 $[2,\ 4]$에서 함수 $y=\frac{1}{x-1}+3$의 최댓값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

U041

○○ (2020(9)−나형11)

0이 아닌 실수 k에 대하여 함수 $y=\dfrac{k}{x-1}+5$의 그래프가 점 $(5,\ 3a)$를 지나고 두 점근선의 교점의 좌표가 $(1,\ 2a+1)$일 때, k의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

U042

○ (2017(6)−나형26)

함수 $f(x)=\dfrac{2x-3}{x-5}$의 그래프의 점근선은 두 직선 $x=p$, $y=q$이다. 두 상수 p, q의 곱 pq의 값을 구하시오. [4점]

U043

○ (1999−인문6/예체능6/자연6)

함수 $f(x)=\dfrac{x-1}{x-2}$의 역함수가 $f^{-1}(x)=\dfrac{ax+b}{x+c}$일 때, 상수 a, b, c의 합 $a+b+c$는? [2점]

① -1 ② 0 ③ 1
④ 2 ⑤ 3

U044

○ (2003−인문3/예체능3)

함수 $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$에 대하여 $(f\circ f)(10)$의 값은? [2점]

① $\dfrac{1}{10}$ ② $\dfrac{9}{10}$ ③ $\dfrac{10}{9}$
④ 9 ⑤ 10

U045

○ (2018(6)−나형13)

함수 $y=\dfrac{4x-5}{x-1}$의 그래프의 두 점근선의 교점의 좌표가 $(a,\ b)$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

U046

○ (2020−나형7)

함수 $f(x)=\dfrac{k}{x-3}+1$에 대하여 $f^{-1}(7)=4$일 때, 상수 k의 값은? (단, $k\neq 0$) [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

U047

(2001－인문8/예체능8)

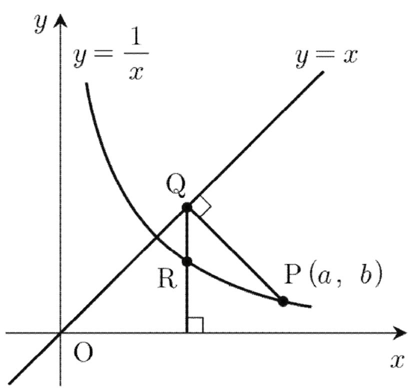
유리함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프가 직선 $y=ax$에 대하여 대칭이 되는 상수 a의 값을 모두 구하면? [3점]

① $-1,\ 1$ ② $-2,\ 2$ ③ $-3,\ 3$
④ $-4,\ 4$ ⑤ $-5,\ 5$

U048

(2000－예체능21)

함수 $y=\frac{1}{x}$의 그래프 위의 한 점 $\mathrm{P}(a,\ b)$에서 직선 $y=x$ 위에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 점 Q에서 x축에 내린 수선이 $y=\frac{1}{x}$과 만나는 점 R의 좌표는? (단, $a>1$) [3점]

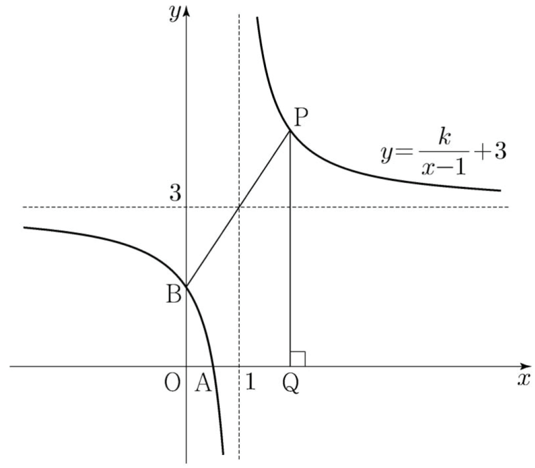


① $\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{2}{a+b}\right)$ ② $\left(a+b,\ \frac{1}{a+b}\right)$
③ $\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}},\ \frac{\sqrt{2}}{a+b}\right)$ ④ $\left(a+b,\ \frac{2}{a+b}\right)$
⑤ $\left(\frac{2}{a+b},\ a+b\right)$

U049

(2019－나형20)

그림과 같이 함수 $y=\frac{k}{x-1}+3\ (0<k<3)$의 그래프와 x축, y축과의 교점을 A, B라 하자.



이 그래프의 두 점근선의 교점과 점 B를 지나는 직선이 이 그래프와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 P, 점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 Q라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $k=1$일 때, 점 P의 좌표는 $(2,\ 4)$이다.
ㄴ. $0<k<3$인 실수 k에 대하여 직선 AB의 기울기와 직선 AP의 기울기의 합은 0이다.
ㄷ. 사각형 PBAQ의 넓이가 자연수일 때, 직선 BP의 기울기는 0과 1 사이의 값이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

U. 무리함수

U050

○
(2019(6)−나형8)

함수 $y=\sqrt{2(x+3)}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하였더니 함수 $y=\sqrt{2x}$ 의 그래프와 일치하였다. 상수 m의 값은? [3점]

① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

U051

○
(2019(9)−나형10)

무리함수 $y=\sqrt{3x}$ 의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 함수 $y=\sqrt{3x+a}+b$ 의 그래프와 일치한다. $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -4 ② -3 ③ -2
④ -1 ⑤ 0

U052

○○
(2017(6)−나형15)

함수 $y=a\sqrt{x}+4$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하였더니
함수 $y=\sqrt{9x-18}$ 의 그래프와 일치하였다. $a+m+n$의 값은? (단, a, m, n은 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

U053

○○
(2018(6)−나형27)

함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 후, y축에 대하여 대칭이동하였더니 함수 $y=\sqrt{-2x+9}+6$의 그래프와 일치하였다. $a+b+c$의 값을 구하시오. (단, a, b, c는 상수이다.) [4점]

U054

○○
(2018(9)−나형24)

함수 $y=2\sqrt{x}$ 의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동시킨 그래프가 점 $(1,\ 5)$를 지난다. 상수 k의 값을 구하시오. [3점]

U055

○○
(2019−나형26)

함수 $y=\sqrt{x+3}$ 의 그래프와 함수 $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프가 만나도록 하는 실수 k의 최댓값을 구하시오. [4점]

U056

○○ (2020(6)-나형12)

두 곡선 $y=\frac{6}{x-5}+3$, $y=\sqrt{x-k}$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

U057

○○ (2020(9)-나형9)

정의역이 $\{x|x>a\}$인 함수 $y=\sqrt{2x-2a}-a^2+4$의 그래프가 오직 하나의 사분면을 지나도록 하는 실수 a의 최댓값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

U058

○○ (2020-나형10)

함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 역함수의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최솟값은? [3점]

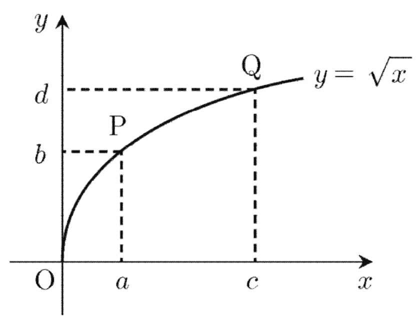
① 1 ② 3 ③ 5
④ 7 ⑤ 9

U059

○○ (2000-인문6/예체능6/자연6)

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프 위의 두 점 $\mathrm{P}(a, b)$, $\mathrm{Q}(c, d)$에 대하여 $\frac{b+d}{2}=1$일 때, 직선 PQ의 기울기는?

(단, $0<a<c$) [3점]



① $\frac{1}{5}$ ② $\frac{1}{4}$ ③ $\frac{1}{3}$
④ $\frac{1}{2}$ ⑤ 1

V. 경우의 수 (합의 법칙, 곱의 법칙, 수형도)

V001

○○
(2020(9)–가형4/나형5)

다음 조건을 만족시키는 두 자리의 자연수의 개수는? [3점]

(가) 2의 배수이다.
(나) 십의 자리의 수는 6의 약수이다.

① 16 ② 20 ③ 24
④ 28 ⑤ 32

V002

○○
(2010(6)–가형27이산수학)

두 문자 a, b를 중복을 허락하여 만든 6자리 문자열 중에서 다음 조건을 만족시키는 문자열의 개수는? [3점]

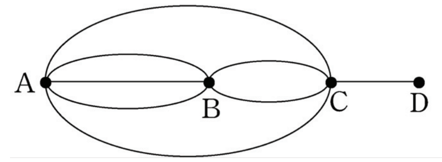
(가) 첫 문자는 a이다.
(나) a끼리는 이웃하지 않는다.

① 16 ② 14 ③ 12
④ 10 ⑤ 8

V003

○○
(2007(6)–가형26이산수학)

다음 그림은 네 지점 A, B, C, D 사이의 도로망을 나타낸 것이다. 도로를 따라 지점 A에서 지점 D까지 가는 방법의 수는? (단, 한 번 지나간 지점은 다시 지나지 않는다.)[3점]



① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

V004

○○
(2006(9)–나형8)

집합 S_1, S_2, S_3은 다음과 같다.

$$S_1 = \{1,\ 2\}$$
$$S_2 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$$
$$S_3 = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$$

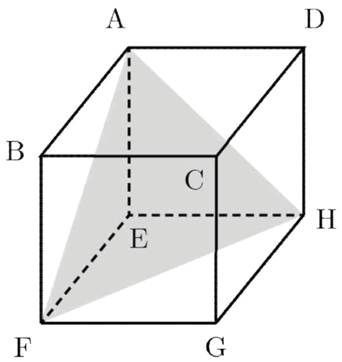
집합 S_1에서 한 개의 원소를 선택하여 백의 자리의 수, 집합 S_2에서 한 개의 원소를 선택하여 십의 자리의 수, 집합 S_3에서 한 개의 원소를 선택하여 일의 자리의 수로 하는 세 자리의 수를 만들 때, 각 자리의 수가 모두 다른 세 자리의 수의 개수는? [3점]

① 8 ② 12 ③ 16
④ 20 ⑤ 24

V005

○○
(1996-인문예체능17/자연17)

오른쪽 정육면체에서 임의의 세 꼭짓점을 택하여 삼각형을 만들 때, 그림과 같은 정삼각형과 합동인 삼각형을 만들 수 있는 방법의 수는? [1.5점]



① 4　② 6　③ 8　④ 12　⑤ 24

V006

○○○
(2010-나형14)

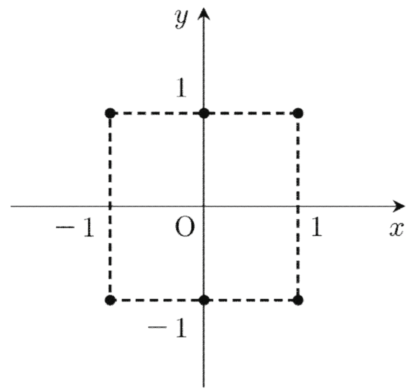
두 인형 A, B에게 색이 정해지지 않은 셔츠와 바지를 모두 입힌 후, 입힌 옷의 색을 정하는 컴퓨터 게임이 있다. 서로 다른 모양의 셔츠와 바지가 각각 3개씩 있고, 각 옷의 색은 빨강과 초록 중 하나를 정한다. 한 인형에게 입힌 셔츠와 바지는 다른 인형에게 입히지 않는다. A인형의 셔츠와 바지의 색은 서로 다르게 정하고, B인형의 셔츠와 바지의 색도 서로 다르게 정한다. 이 게임에서 두 인형 A, B에게 셔츠와 바지를 입히고 색을 정할 때, 그 결과로 나타날 수 있는 경우의 수는? [4점]

① 252　② 216　③ 180　④ 144　⑤ 108

V007

○○○
(2001-인문20/예체능20)

좌표평면 위에 여섯 개의 점 $(1,\ 1)$, $(1,\ -1)$, $(0,\ 1)$, $(0,\ -1)$, $(-1,\ 1)$, $(-1,\ -1)$이 있다. 이 중 세 점을 지나는 이차함수 $y=f(x)$의 개수는? [2점]



① 2　② 4　③ 6　④ 8　⑤ 10

V008

○○○
(2005(9)-가형25/나형25)

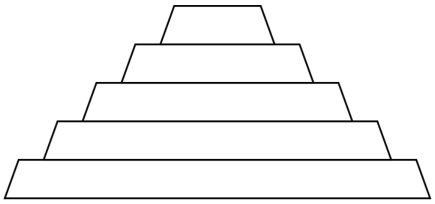
집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 다음 세 조건을 모두 만족하는 함수 $f : A \to A$의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 함수 f는 일대일 대응이다.
(나) $f(1)=7$
(다) $k \geq 2$이면 $f(k) \leq k$이다.

V009

(2009(6)-가형25/나형25)

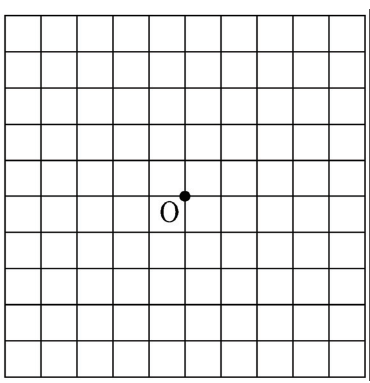
그림과 같은 모양의 종이에 서로 다른 3가지 색을 사용하여 색칠하려고 한다. 이웃한 사다리꼴에는 서로 다른 색을 칠하고, 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠한다. 5개의 사다리꼴에 색을 칠하는 방법의 수를 구하시오. [4점]



V010

(2009(9)-나형11)

그림과 같이 이웃한 두 교차로 사이의 거리가 모두 1인 바둑판 모양의 도로망이 있다. 로봇이 한 번 움직일 때마다 길을 따라 거리 1만큼씩 이동한다. 로봇은 길을 따라 어느 방향으로도 움직일 수 있지만, 한 번 통과한 지점을 다시 지나지는 않는다. 이 로봇이 지점 O에서 출발하여 4번 움직일 때, 가능한 모든 경로의 수는? (단, 출발점과 도착점은 일치하지 않는다.) [4점]

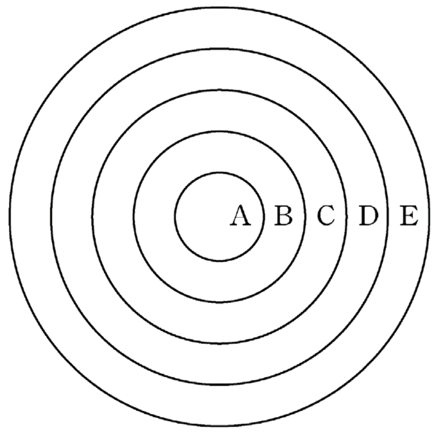


① 88 ② 96 ③ 100
④ 104 ⑤ 112

V011

(2010(6)-나형29)

그림과 같이 중심이 같고 반지름의 길이가 각각 1, 2, 3, 4, 5인 다섯 개의 원이 있다. 이 다섯 개의 원을 경계로 하여 안에서부터 다섯 개의 영역 A, B, C, D, E로 나누고, 서로 다른 3가지 색의 물감을 칠하여 색칠된 문양을 만들려고 한다. 각 영역은 1가지 색으로만 칠하고, 이웃한 영역은 서로 다른 색을 칠한다. 3가지 색의 물감은 각각 10통 이하만 사용할 수 있고 물감 1통으로는 영역 A의 넓이만큼만 칠할 수 있을 때, 만들 수 있는 서로 다르게 색칠된 문양의 개수는? [4점]

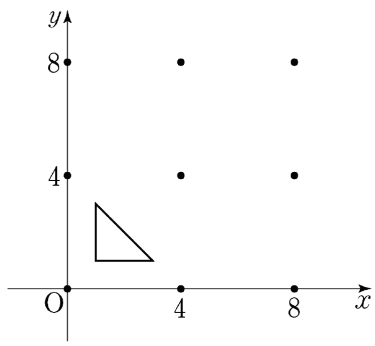


① 9 ② 12 ③ 15
④ 18 ⑤ 21

V012

●●●
(2011(6)−가형17/나형17)

좌표평면 위에 9개의 점 $(i,\ j)$ $(i=0,\ 4,\ 8,\ j=0,\ 4,\ 8)$이 있다. 이 9개의 점 중 네 점을 꼭짓점으로 하는 사각형 중에서 내부에 세 점 $(1,\ 1)$, $(3,\ 1)$, $(1,\ 3)$을 꼭짓점으로 하는 삼각형을 포함하는 사각형의 개수는? [4점]



① 13　② 15　③ 17
④ 19　⑤ 21

V. 순열

V013

○
(2007(9)−나형6)

여학생 2명과 남학생 4명이 순서를 정하여 차례로 뜀틀 넘기를 할 때, 여학생 2명이 연이어 뜀틀 넘기를 하게 되는 경우의 수는? [3점]

① 120　② 180　③ 240
④ 300　⑤ 360

V014

○
(2006(6)−나형21)

1, 2, 3, 4, 5, 6을 한 번씩만 사용하여 만들 수 있는 여섯 자리 자연수 중에서 일의 자리의 수와 백의 자리의 수가 모두 3의 배수인 자연수의 개수를 구하시오. [3점]

V015

○
(2008(9)−나형7)

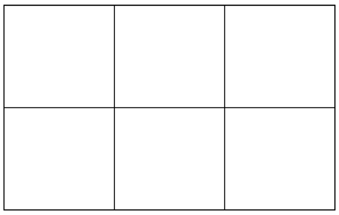
여학생 2명이 먼저, 남학생 3명이 나중에 한 명씩 차례로 놀이공원에 입장하려고 한다. 이 학생 5명이 놀이공원에 입장하는 방법의 수는? [3점]

① 10　② 12　③ 14
④ 16　⑤ 18

V016

○○ (2005(예비)−나형30)

그림과 같이 여섯 칸으로 나누어진 직사각형의 각 칸에 6개의 수 1, 2, 4, 6, 8, 9를 한 개씩 써 넣으려고 한다. 각 가로줄에 있는 세 수의 합이 서로 같은 경우의 수를 구하시오. [3점]



V017

○○ (2008−나형9)

1부와 2부로 나누어 진행하는 어느 음악회에서 독창 2팀, 중창 2팀, 합창 3팀이 모두 공연할 때, 다음 두 조건에 따라 7팀의 공연 순서를 정하려고 한다.

(가) 1부에는 독창, 중창, 합창 순으로 3팀이 공연한다.
(나) 2부에는 독창, 중창, 합창, 합창 순으로 4팀이 공연한다.

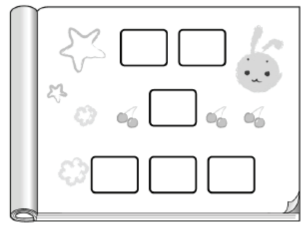
이 음악회의 공연 순서를 정하는 방법의 수는? [3점]

① 18 ② 20 ③ 22 ④ 24 ⑤ 26

V018

○○ (2010(9)−나형28)

다음 그림의 빈 칸에 6장의 사진 A, B, C, D, E, F를 하나씩 배치하여 사진첩의 한 면을 완성할 때, A와 B가 이웃하는 경우의 수는? (단, 옆으로 이웃하는 경우만 이웃하는 것으로 한다.) [4점]



① 128 ② 132 ③ 136 ④ 140 ⑤ 144

V019

○○ (2006(6)−가형22)

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에서 A로의 함수 중에서 다음 두 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) 함수 f는 일대일 대응이다. (나) 정의역 A의 한 원소 n에 대하여 $f(n+1)-f(n)=5$이다.

V020

○○
(2018(6)−가형13)

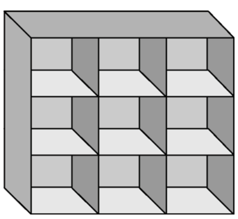
이틀 동안 진행하는 어느 축제에 모두 다섯 개의 팀이 참가하여 공연한다. 매일 두 팀 이상이 공연하도록 다섯 팀의 공연 날짜와 공연 순서를 정하는 경우의 수는? (단, 공연은 한 팀씩 하고, 축제 기간 중 각 팀은 1회만 공연한다.) [3점]

① 180 ② 210 ③ 240
④ 270 ⑤ 300

V021

○○
(2005(6)−가형29확률통계)

세 종류의 상품이 3개씩 있다. 이 상품을 그림과 같은 진열장에 한 칸에 하나씩 모두 진열하고자 한다. 가로줄에는 서로 다른 세 종류의 상품을 진열하고 세로줄에는 같은 종류의 상품이 이웃하지 않게 진열하는 방법의 수는? [4점]



① 24 ② 30 ③ 36
④ 42 ⑤ 48

V022

○○○
(2007(6)−가형15/나형15)

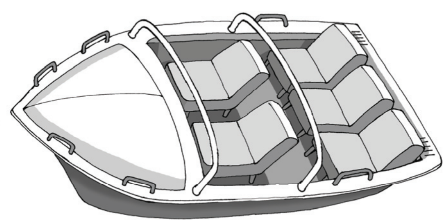
어느 회사에서 사원 연수를 위하여 네 지역 서울, 부산, 광주, 대구에서 각각 3명씩 모두 12명의 사원을 선발하였다. 같은 지역에서 선발된 사원끼리는 같은 조에 속하지 않도록 각 지역에서 한 명씩 선택하여 4명으로 구성된 3개의 조로 나누는 방법의 수는? [3점]

① 80 ② 144 ③ 216
④ 240 ⑤ 288

V023

○○○
(2007−나형23)

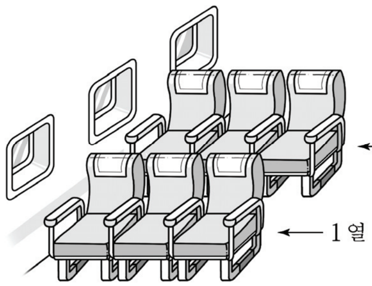
어른 2명과 어린이 3명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이 앞줄에 2개, 뒷줄에 3개의 의자가 있다. 어린이가 어른과 반드시 같은 줄에 앉을 때, 5명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오. [4점]



V024

○○○
(2009(9)−가형23/나형23)

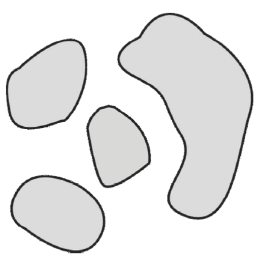
할아버지, 할머니, 아버지, 어머니, 아들, 딸로 구성된 가족이 있다. 이 가족 6명이 그림과 같은 6개의 좌석에 모두 앉을 때, 할아버지, 할머니가 같은 열에 이웃하여 앉고, 아버지, 어머니도 같은 열에 이웃하여 앉는 경우의 수를 구하시오. [4점]



V025

●●●
(1998−인문예체능28/자연28)

오른쪽 그림과 같이 4개의 섬이 있다. 3개의 다리를 건설하여 4개의 섬 모두를 연결하는 방법의 수를 구하시오. [3점]



V026

●●●
(2009(6)−가형28이산수학)

a, b, c, d, e를 모두 사용하여 만든 다섯 자리 문자열 중에서 다음 세 조건을 만족시키는 문자열의 개수는? [3점]

(가) 첫째 자리에는 b가 올 수 없다.
(나) 셋째 자리에는 a도 올 수 없고 b도 올 수 없다.
(다) 다섯째 자리에는 b도 올 수 없고 c도 올 수 없다.

① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

V. 조합

V027
○○
(2011-나형18)

등식 $2\times{}_{n}C_{3}=3\times{}_{n}P_{2}$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

V028
○○
(2011(9)-나형19)

등식 ${}_{n}P_{3}=12\times{}_{n}C_{2}$를 만족시키는 자연수 n의 값을 구하시오. [3점]

V029
○
(2017(6)-가형24/나형24)

어느 학교 동아리 회원은 1학년이 6명, 2학년이 4명이다. 이 동아리에서 7명을 뽑을 때, 1학년에서 4명, 2학년에서 3명을 뽑는 경우의 수를 구하시오. [3점]

V030
○
(2010(6)-가형27확률통계)

1부터 100까지의 자연수에서 서로 다른 3개를 선택하는 방법 중, 17을 포함하도록 선택하는 방법의 수를 a라 하고, 17을 포함하지 않도록 선택하는 방법의 수를 b라고 할 때, $\frac{b}{a}$의 값은? [3점]

① $\frac{94}{3}$ ② $\frac{95}{3}$ ③ $\frac{97}{3}$ ④ $\frac{98}{3}$ ⑤ $\frac{100}{3}$

V031
○○
(2005(9)-가형21/나형21)

3개의 증권 회사, 3개의 통신 회사, 4개의 건설 회사가 있다. 증권, 통신, 건설 각 업종별로 적어도 하나의 회사를 선택하여 총 4개의 회사에 입사원서를 내는 경우의 수를 구하시오. [3점]

V032
○○
(2006(6)-나형9)

A지역에는 세 곳, B지역에는 네 곳, C지역에는 다섯 곳, D지역에는 여섯 곳의 관광지가 있다. 이 중에서 세 곳을 선택하여 관광하려고 할 때, 선택한 세 곳이 모두 같은 지역이 되는 경우의 수는? [3점]

① 20 ② 25 ③ 30 ④ 35 ⑤ 40

V033

○○
(2000−인문29/자연29)

1에서 10까지의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 임의로 선택할 때, 선택된 두 수의 곱이 짝수가 되는 경우의 수를 구하시오. [3점]

V034

○○
(2011−나형20)

서로 다른 6개의 공을 두 바구니 A, B에 3개씩 담을 때, 그 결과로 나올 수 있는 경우의 수를 구하시오. [3점]

V035

○○
(2005(6)−나형22)

2005학년도 대학수학능력시험에서 과학탐구 영역을 선택하는 학생은 물리Ⅰ, 화학Ⅰ, 생물Ⅰ, 지구과학Ⅰ, 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ의 8개 과목 중에서 최대 4과목까지 응시할 수 있다. 단, 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ의 4개 과목에서는 2과목까지만 선택할 수 있다. 어떤 학생이 과학탐구 영역에서 3개 과목을 선택하려고 할 때, 선택 가능한 모든 경우의 수를 구하시오. [4점]

V036

○○
(2011(9)−나형27)

지수는 다음 규칙에 따라 월요일부터 금요일까지 5일 동안 하루에 한 가지씩 운동을 하는 계획을 세우려 한다.

(가) 5일 중 3일을 선택하여 요가를 한다. (나) 요가를 하지 않는 2일 중 하루를 선택하여 수영, 줄넘기 중 한 가지를 하고, 남은 하루는 농구, 축구 중 한 가지를 한다.

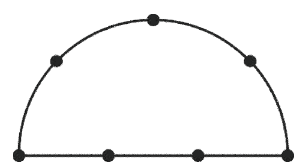
지수가 세울 수 있는 계획의 가짓수는? [3점]

① 50 ② 60 ③ 70
④ 80 ⑤ 90

V037

○○
(1995−인문예체능7/자연7)

아래 그림과 같이 반원 위에 7개의 점이 있다. 이 중 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는? [1점]



① 34 ② 33 ③ 32
④ 31 ⑤ 30

V038

○○
(2008(6)−가형29이산수학)

색깔이 서로 다른 9개의 열쇠가 하나씩 포장되어 있다. 이 중 4개는 자물쇠 A만을, 3개는 자물쇠 B만을, 2개는 자물쇠 C만을 열 수 있다. 9개의 열쇠 중에서 3개를 임의로 선택할 때, 자물쇠 A와 자물쇠 B는 모두 열리고 자물쇠 C는 열리지 않도록 선택하는 경우의 수는? [4점]

① 15 ② 20 ③ 25
④ 30 ⑤ 35

V039

○○
(2007(9)−가형24/나형24)

수련회에 참가한 여학생 5명과 남학생 6명을 4개의 방에 배정하려고 한다. 여학생은 1호실에 3명, 2호실에 2명을 배정하고, 남학생은 3호실과 4호실에 각각 3명씩 배정하는 방법의 수를 구하시오. [4점]

V040

○○
(2008(6)−나형12)

어느 동아리에 속한 여학생 수와 남학생 수가 같다. 이 동아리에서 3명의 대표를 선출하려고 한다. 남녀 구분 없이 3명의 대표를 선출하는 경우의 수가 여학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수의 10배일 때, 이 동아리에 속한 여학생 수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9
④ 10 ⑤ 11

V041

○○
(2010(9)−나형8)

어느 김밥 가게에서는 기본재료만 포함된 김밥의 가격을 1000원으로 하고, 기본재료 외에 선택재료가 추가될 경우 다음 표에 따라 가격을 정한다. 예를 들어 맛살과 참치가 추가된 김밥의 가격은 1500원이다.

선택재료	가격(원)
햄	200
맛살	200
김치	200
불고기	300
치즈	300
참치	300

선택재료를 추가하였을 때, 가격이 1500원 또는 2000원이 되는 김밥의 종류는 모두 몇 가지인가? (단, 선택재료의 양은 가격에 영향을 주지 않는다.) [3점]

① 12 ② 14 ③ 16
④ 18 ⑤ 20

V042

○○
(2010(9)-가형27이산수학)

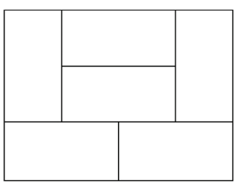
남자 5명과 여자 3명이 출연하는 방송 프로그램이 있다. 이 프로그램에서 남자와 여자를 같은 수로 선택하여 게임을 시키려고 할 때, 선택할 수 있는 경우의 수는?
(단, 한 명도 선택하지 않은 경우는 없다.) [3점]

① 47 ② 49 ③ 51
④ 53 ⑤ 55

V043

○○
(2011(9)-가형7/나형7)

그림과 같이 경계가 구분된 6개 지역의 인구조사를 조사원 5명이 담당하려고 한다. 5명 중에서 1명은 서로 이웃한 2개 지역을, 나머지 4명은 남은 4개 지역을 각각 1개씩 담당한다. 이 조사원 5명의 담당 지역을 정하는 경우의 수는? (단, 경계가 일부라도 닿은 두 지역은 서로 이웃한 지역으로 본다.) [3점]



① 720 ② 840 ③ 960
④ 1080 ⑤ 1200

V044

○○○
(2005(예비)-가형13/나형13)

자연수 n에 대하여 원소가 $2n$개인 집합 S에서 2개의 원소를 뽑는 경우의 수 ${}_{2n}\mathrm{C}_2$를 다음과 같은 방법으로 구하였다.

> S를 원소가 n개이고 서로소인 두 집합 A와 B로 나누고, 다음과 같은 경우를 생각한다.
> (ⅰ) A와 B중 한 집합에서만 두 개의 원소를 뽑는 경우
> (ⅱ) A와 B각 집합에서 원소를 한 개씩 뽑는 경우
> (ⅰ)의 경우의 수는 $\boxed{\text{(가)}}$이고 (ⅱ)의 경우의 수는 $\boxed{\text{(나)}}$이다. (ⅰ)과 (ⅱ)둘 중에서 한 가지 경우만 일어날 수 있으므로 합의 법칙에 의하여
> ${}_{2n}\mathrm{C}_2 = \boxed{\text{(가)}} + \boxed{\text{(나)}}$이다.

위에서 (가)와 (나)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)
①	${}_n\mathrm{C}_2 \times {}_n\mathrm{C}_2$	${}_n\mathrm{C}_1 \times {}_n\mathrm{C}_1$
②	$2\,{}_n\mathrm{C}_2$	${}_n\mathrm{C}_1 \times {}_n\mathrm{C}_1$
③	$3\,{}_n\mathrm{C}_2$	${}_n\mathrm{C}_1 \times {}_n\mathrm{C}_1 - {}_n\mathrm{C}_2$
④	$2\,{}_n\mathrm{C}_2$	${}_n\mathrm{C}_1 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_1$
⑤	${}_n\mathrm{C}_2 - {}_n\mathrm{C}_1$	$2\,{}_n\mathrm{C}_2$

V045

○○○
(2005(6)-가형25/나형25)

갑은 컴퓨터를 이용하여 2000부터 2999까지의 네 자리 자연수를 을에게 전송하려고 한다. 전송 과정에서 일어날지도 모르는 오류를 을이 확인할 수 있도록 하기 위하여, 갑은 다음 규칙에 따라 전송하는 수의 끝에 숫자 하나를 덧붙여서 다섯 자리 수를 전송한다.

'네 자리 수의 각 자리의 수의 합이 짝수이면 0, 홀수이면 1을 전송하는 수의 끝에 덧붙인다.'

예를 들면, 2026은 20260으로, 2102는 21021로 전송한다. 갑이 전송하기 위하여 끝에 0을 덧붙인 다섯 자리 수 중에서 가운데 세 자리의 각각의 숫자가 모두 다른 경우의 수를 구하시오. [4점]

V046

○○○
(2005(6)-가형30이산수학)

어떤 회사에서 신규 직원 5명을 3개의 팀으로 나눈 후, 대전, 대구, 광주의 세 지점에 각각 한 팀씩 배치하려고 한다. 이들 신규 직원 5명을 이와 같은 방법으로 배치하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

V047

○○○
(2005(6)-가형29이산수학)

자연수 n에 대하여 등식

$$ {}_{n}\mathrm{C}_{n} + {}_{n+1}\mathrm{C}_{n} + {}_{n+2}\mathrm{C}_{n} = {}_{n+3}\mathrm{C}_{n+1} $$

이 성립함을 다음과 같이 증명하였다.

〈증명〉

${}_{n+3}\mathrm{C}_{n+1}$은 집합 $A=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n+3\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수이다.
이것을 다른 방법으로 세어보자.

(ⅰ) 집합 A의 부분집합 중에서, 가장 큰 원소가 $\boxed{\text{(가)}}$ 이고 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{n}$이다.

(ⅱ) 집합 A의 부분집합 중에서, 가장 큰 원소가 $\boxed{\text{(나)}}$ 이고 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수는 ${}_{n+1}\mathrm{C}_{n}$이다.

(ⅲ) 집합 A의 부분집합 중에서, 가장 큰 원소가 $\boxed{\text{(다)}}$ 이고 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수는 ${}_{n+2}\mathrm{C}_{n}$이다.

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ) 중에서 한 가지 경우만 일어날 수 있으므로 합의 법칙에 의하여
${}_{n}\mathrm{C}_{n} + {}_{n+1}\mathrm{C}_{n} + {}_{n+2}\mathrm{C}_{n} = {}_{n+3}\mathrm{C}_{n+1}$이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 차례로 나열한 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$n-1$	n	$n+1$
②	n	$n+1$	$n+2$
③	$n+1$	$n+2$	$n+3$
④	$n+2$	$n+1$	n
⑤	$n+3$	$n+2$	$n+1$

V048

○○○
(2006-나형28)

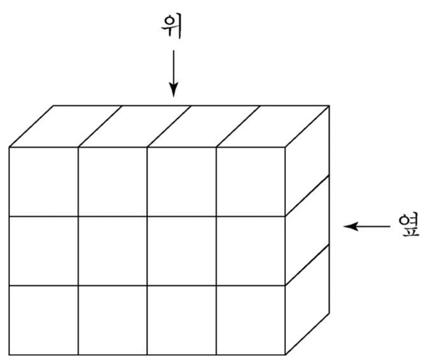
1부터 30까지의 홀수 중에서 서로 다른 두 수를 선택할 때, 두 수의 합이 3의 배수가 되는 경우의 수는? [4점]

① 43　② 41　③ 39
④ 37　⑤ 35

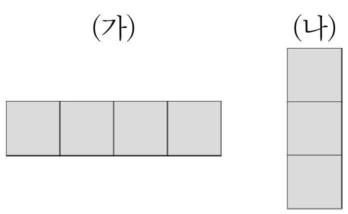
V049

○○○
(2006-가형17/나형17)

다음 그림과 같이 크기가 같은 정육면체 모양의 투명한 유리 상자 12개로 직육면체를 만들었다.



이 중에서 4개의 유리 상자를 같은 크기의 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣은 직육면체를 위에서 내려다 본 모양이 (가), 옆에서 본 모양이 (나)와 같이 되도록 만들 수 있는 방법의 수는? [4점]



① 54　② 48　③ 42
④ 36　⑤ 30

V050

○○○
(2006-가형30확률통계)

네 사람이 다섯 곳의 휴양지 중에서 각각 하나의 휴양지를 임의로 선택한다고 할 때, 세 사람만 같은 휴양지를 선택하는 경우의 수를 구하시오. [4점]

V051

○○○
(2007(6)-가형24/나형24)

8종류의 과자 A, B, C, D, E, F, G, H로 다음 조건에 따라 세트 상품을 만들려고 한다.

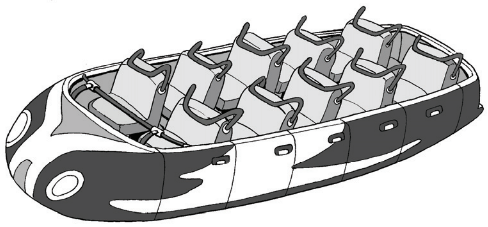
> (가) 각 세트에는 서로 다른 4종류의 과자를 각각 한 개씩 담는다.
> (나) A 또는 B를 담는 경우에는 A와 B를 같은 세트에 담는다.
> (다) A, B, C 모두를 같은 세트에 담지 않는다.

서로 다른 세트 상품을 만들 수 있는 방법의 수를 구하시오. [4점]

V052

○○○
(2007(6)−나형30)

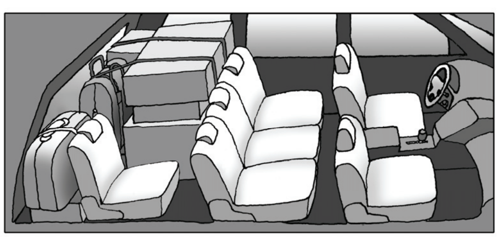
남학생 2명과 여학생 2명이 함께 놀이 공원에 가서 어느 놀이기구를 타려고 한다. 이 놀이기구는 그림과 같이 한 줄에 2개의 의자가 있고 모두 5줄로 되어 있다. 남학생 1명과 여학생 1명이 짝을 지어 2명씩 같은 줄에 앉을 때, 4명이 모두 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수를 구하시오. [4점]



V053

○○○
(2008(6)−가형25/나형25)

할머니, 할아버지, 어머니, 아버지, 영희, 철수 모두 6명의 가족이 자동차를 타고 여행을 가려고 한다. 이 자동차에는 앉을 수 있는 좌석이 그림과 같이 앞줄에 2개, 가운데 줄에 3개, 뒷줄에 1개가 있다. 운전석에는 아버지나 어머니만 앉을 수 있고, 영희와 철수는 가운데 줄에만 앉을 수 있을 때, 가족 6명이 모두 자동차의 좌석에 앉는 경우의 수를 구하시오. [4점]



V054

○○○
(2008(6)−나형29)

1부터 9까지의 서로 다른 자연수 a, b, c, d, e에 대하여

$a \cdot 10^4 + b \cdot 10^3 + c \cdot 10^2 + d \cdot 10 + e$

로 나타내어지는 다섯 자리의 자연수 $abcde$중에서 5의 배수이고 $a > b > c$, $c < d < e$를 만족시키는 모든 자연수의 개수는? [4점]

① 53 ② 62 ③ 71
④ 80 ⑤ 89

V055

○○○
(2008−가형25/나형25)

서로 다른 5종류의 체험 프로그램을 운영하는 어느 수련원이 있다. 이 수련원의 프로그램에 참가한 A와 B가 각각 5종류의 체험 프로그램 중에서 2종류를 선택하려고 한다.
A와 B가 선택하는 2종류의 체험 프로그램 중에서 한 종류만 같은 경우의 수를 구하시오. [4점]

V056

○○○
(2008(9)−가형11/나형11)

$n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 집합 A_n을 $A_n=\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$이라 하자. 집합 A_n의 부분집합 중 원소가 2개인 각 부분집합에서 작은 원소를 뽑아 그 원소들의 평균을 a_n이라 하자. 다음은 $a_n=\dfrac{n+1}{3}$임을 수학적 귀납법으로 증명한 것이다.

〈증명〉
(1) $n=2$일 때, $A_2=\{1,\ 2\}$의 원소가 2개인 부분집합은 자신뿐이므로 $a_2=1=\dfrac{2+1}{3}$이다.
(2) $n=k\ (k\ge 2)$일 때 성립한다고 가정하면
$a_k=\dfrac{k+1}{3}$이다.
$A_{k+1}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ k,\ k+1\}$의 부분집합 중 원소가 2개인 모든 부분집합은, A_k의 부분집합 중 원소가 2개인 모든 부분집합에 k개의 집합
$\{1,\ k+1\}$, $\{2,\ k+1\}$, $\cdots$, $\{k,\ k+1\}$
을 추가한 것이다. A_k의 부분집합 중 원소가 2개인 부분집합의 개수는 $\boxed{\text{(가)}}$이므로
$$a_{k+1}=\frac{\boxed{\text{(나)}}+(1+2+\cdots+k)}{{}_{k+1}\mathrm{C}_2}$$
$$=\frac{k+2}{3}=\frac{(k+1)+1}{3}$$이다.
그러므로 (1), (2)에 의하여 $n\ge 2$인 모든 자연수 n에 대하여 $a_n=\dfrac{n+1}{3}$이다.

위 증명에서 (가), (나)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)
①	${}_k\mathrm{C}_2$	${}_k\mathrm{C}_2\cdot\dfrac{k}{3}$
②	${}_k\mathrm{C}_2$	${}_k\mathrm{C}_2\cdot\dfrac{k+1}{3}$
③	${}_{k+1}\mathrm{C}_2$	${}_{k+1}\mathrm{C}_2\cdot\dfrac{k}{3}$
④	${}_{k+1}\mathrm{C}_2$	${}_{k+1}\mathrm{C}_2\cdot\dfrac{k+1}{3}$
⑤	${}_{k+2}\mathrm{C}_2$	${}_k\mathrm{C}_2\cdot\dfrac{k}{3}$

V057

○○○
(2011(6)−나형23)

A, B 두 사람이 서로 다른 4개의 동아리 중에서 2개씩 가입하려고 한다. A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 1개 이하가 되도록 하는 경우의 수를 구하시오. (단, 가입 순서는 고려하지 않는다.) [4점]

V058

○○○
(2018(6)−가형27)

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합을 두 개 선택할 때, 선택한 두 집합이 서로 같지 않은 경우의 수를 구하시오. [4점]

V059

○○○
(2019(9)-가형18)

다음은 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$의 치역 A가 $n(A)=4$이고, 집합 A의 모든 원소의 합이 홀수인 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

> (ⅰ) 공역 X의 원소 중 짝수인 원소가 2개이므로 집합 A의 네 원소 중 세 원소는 홀수이고 한 원소는 짝수이다.
> 따라서 집합 X의 원소 중에서 집합 A의 네 원소를 택하는 경우의 수는 2이다.
> (ⅱ) 정의역 X를 4개의 부분집합으로 분할할 때, 4개의 부분집합의 원소의 개수는 각각 2, 1, 1, 1이 되어야 한다.
> 따라서 집합 X를 4개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
> (ⅲ) (ⅰ)과 (ⅱ)의 각 경우에 대하여 집합 X를 분할한 4개의 부분집합을 집합 A의 네 원소에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.
> (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여
> 구하는 함수 f의 개수는 $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 a, b, c라 할 때, $a+b+c$의 값은? [4점]

① 498 ② 502 ③ 506
④ 510 ⑤ 514

V060

○○○
(2020(6)-가형25)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 함수 $f:X\to X$의 개수를 구하시오. [3점]

> (가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 4이다.
> (나) $f(a)=a$인 X의 원소 a의 개수는 3이다.

V061

○○○ (2019-가형17/나형19)

다음은 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$과 함수 $f:X\to X$에 대하여 합성함수 $f\circ f$의 치역의 원소의 개수가 5인 함수 f의 개수를 구하는 과정이다.

함수 f와 함수 $f\circ f$의 치역을 각각 A와 B라 하자.
$n(A)=6$이면 함수 f는 일대일대응이고,
함수 $f\circ f$도 일대일대응이므로
$n(B)=6$이다.
또한 $n(A)\le 4$이면 $B\subset A$이므로
$n(B)\le 4$이다.
그러므로 $n(A)=5$,
즉 $B=A$인 경우만 생각하면 된다.
(i) $n(A)=5$인 X의 부분집합 A를
선택하는 경우의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
(ii) (i)에서 선택한 집합 A에 대하여,
X의 원소 중 A에 속하지 않는 원소를 k라 하자.
$n(A)=5$이므로 집합 A에서 $f(k)$를
선택하는 경우의 수는 $\boxed{(나)}$이다.
(iii) (i)에서 선택한
$A=\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5\}$
와 (ii)에서 선택한 $f(k)$에 대하여,
$f(k)\in A$이며 $A=B$이므로
$A=\{f(a_1),\ f(a_2),\ f(a_3),\ f(a_4),\ f(a_5)\}\cdots(*)$
이다. (*)을 만족시키는 경우의 수는
집합 A에서 집합 A로의 일대일대응의 개수와
같으므로 $\boxed{(다)}$이다.
따라서 (i), (ii), (iii)에 의하여 구하는
함수 f의 개수는
$\boxed{(가)}\times\boxed{(나)}\times\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 수를 각각 $p,\ q,\ r$라 할 때, $p+q+r$의 값은? [4점]

① 131 ② 136 ③ 141
④ 146 ⑤ 151

V062

●●● (2010-가형12/나형12)

다음은 모든 자연수 n에 대하여 등식

$$\sum_{k=0}^{n}\frac{{}_{n}\mathrm{C}_{k}}{{}_{n+4}\mathrm{C}_{k}}=\frac{n+5}{5}$$

가 성립함을 수학적귀납법으로 증명한 것이다.

〈증명〉
(1) $n=1$일 때,

(좌변)$=\dfrac{{}_{1}\mathrm{C}_{0}}{{}_{5}\mathrm{C}_{0}}+\dfrac{{}_{1}\mathrm{C}_{1}}{{}_{5}\mathrm{C}_{1}}=\dfrac{6}{5}$, (우변)$=\dfrac{1+5}{5}=\dfrac{6}{5}$

이므로 주어진 등식은 성립한다.
(2) $n=m$일 때, 등식

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}}=\frac{m+5}{5}$$

가 성립한다고 가정하자. $n=m+1$일 때,

$$\sum_{k=0}^{m+1}\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}}=\boxed{(가)}+\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}}$$

이다. 자연수 l에 대하여

${}_{l+1}\mathrm{C}_{k+1}=\boxed{(나)}\cdot{}_{l}\mathrm{C}_{k}\,(0\le k\le l)$

이므로

$$\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}}=\boxed{(다)}\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{m+1}\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k}}=\boxed{(가)}+\boxed{(다)}\cdot\sum_{k=0}^{m}\frac{{}_{m}\mathrm{C}_{k}}{{}_{m+4}\mathrm{C}_{k}}$$

$=\dfrac{m+6}{5}$이다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	1	$\dfrac{l+2}{k+2}$	$\dfrac{m+1}{m+4}$
②	1	$\dfrac{l+1}{k+1}$	$\dfrac{m+1}{m+5}$
③	1	$\dfrac{l+1}{k+1}$	$\dfrac{m+1}{m+4}$
④	$m+1$	$\dfrac{l+1}{k+1}$	$\dfrac{m+1}{m+5}$
⑤	$m+1$	$\dfrac{l+2}{k+2}$	$\dfrac{m+1}{m+4}$

V063

(2006(6)-가형16/나형16)

1부터 100까지의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택할 때, 4개의 수 중에서 두 번째로 작은 수가 k인 경우의 수를 a_k라 하자. 예를 들어, a_{98}은 선택된 4개의 수 중에서 98보다 작은 수가 한 개이고 98보다 큰 수가 2개인 경우의 수이므로 $a_{98}=97$이다. 〈보기〉에서 옳은 것을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $a_3 = {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_{97}\mathrm{C}_2$
ㄴ. $a_{10} = a_{90}$
ㄷ. $\sum_{k=2}^{98} a_k = {}_{100}\mathrm{C}_4$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

V064

(2006(6)-가형30확률통계)

아시아 4개국과 아프리카 4개국이 있다. 8개국을 2개국씩 짝지어 4개의 그룹으로 나누려고 한다. 적어도 한 개의 그룹이 아시아 국가만으로 이루어지도록 4개의 그룹으로 나누는 경우의 수를 구하시오. [4점]

V065

★★★
(2011(9)-가형29이산수학)

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에서 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$로의 함수 중에서 다음 조건을 만족하는 함수 f의 개수는? [4점]

(가) 함수 f의 치역의 원소의 개수는 2이다. (나) 합성함수 $f \circ f$의 치역의 원소의 개수는 1이다.

① 36 ② 42 ③ 48
④ 54 ⑤ 60

T. 집합의 연산(합집합과 교집합)

T001

○○
(2016(9)고2-가형13)

집합 $A=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 A의 모든 부분집합 X의 개수는? [3점]

(가) $n(X)\ge 2$
(나) 집합 X의 모든 원소의 곱은 6의 배수이다.

① 18 ② 19 ③ 20
④ 21 ⑤ 22

T002

○○○
(2016(6)고2-가형26)

전체집합 $U=\{x|x\text{는 자연수}\}$의 부분집합 A는 원소의 개수가 4이고, 모든 원소의 합이 21이다. 상수 k에 대하여 집합 $B=\{x+k|x\in A\}$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $A\cap B=\{4,\ 6\}$
(나) $A\cup B$의 모든 원소의 합이 40이다.

집합 A의 모든 원소의 곱을 구하시오. [4점]

T003

○○○
(2015(6)고2-나형27)

실수 전체의 집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$$n(A)=5,\ B=\left\{\frac{x+a}{2}\,\middle|\,x\in A\right\}$$

이다. 두 집합 A, B가 다음 조건을 만족시킬 때, 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

(가) 집합 A의 모든 원소의 합은 28이다.
(나) 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 49이다.
(다) $A\cap B=\{10,\ 13\}$

T004

○○○
(2015(3)고2-나형30)

두 집합

$A=\{x|x\text{는 100 이하의 자연수}\}$

$B=\{x|x\text{는 50과 서로소인 자연수}\}$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

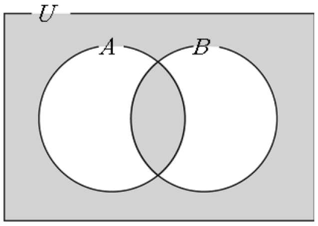
(가) $X\subset A$, $X\neq\varnothing$
(나) $X\cap B=\varnothing$
(다) 집합 X의 모든 원소는 12와 서로소이다.

T. 집합의 연산(여집합과 차집합)

T005

○○
(2006(11)고1-공통3)

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대한 벤 다이어그램에서 어두운 부분을 집합으로 바르게 나타낸 것을 보기에서 있는 대로 고르면? (단, X^C은 X의 여집합이고, $A\cap B\neq\varnothing$이다.) [3점]



ㄱ. $(A\cup B)-(A\cap B)$
ㄴ. $(A\cap B)\cup(A\cup B)^C$
ㄷ. $(A\cup B^C)\cap(B\cup A^C)$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T006

○○
(2012경찰대(1차)-공통2)

다음 두 조건을 만족시키는 집합 A와 집합 B의 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는?

(가) A와 B는 집합 $\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$의 부분집합이다.
(나) $A-B=\{1,\ 3,\ 5\}$

① 17 ② 21 ③ 24
④ 27 ⑤ 31

T007

○○
(2006(9)고1-공통5)

다음 중 전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 $A\cup B=B$가 성립하기 위한 필요충분조건인 것은? [3점]

① $A=B$ ② $A\cup B^C=U$ ③ $A\cap B=\varnothing$
④ $A^C\supset B^C$ ⑤ $A-B=A$

T008

○○
(2017(9)고2-나형12)

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$의 부분집합 $A=\{x\,|\,x$는 10의 약수$\}$에 대하여

$$(X-A)\subset(A-X)$$

를 만족시키는 U의 모든 부분집합 X의 개수는? [3점]

① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

T009

○○
(2016(11)고2-나형15)

전체집합 $U=\{x \mid x\text{는 } 10 \text{ 이하의 자연수}\}$의 두 부분집합

$$A=\{1,\ 2,\ 3\},\ B=\{4,\ 5,\ 6\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 U의 부분집합 X의 개수는? [4점]

(가) $A-X=\varnothing$
(나) $B\cap X=\varnothing$

① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

T010

○○
(2011(6)고1-공통27)

전체집합 $U=\{x \mid 1 \le x \le 12,\ x\text{는 자연수}\}$의 두 부분집합

$$A=\{1,\ 2\},\ B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$$

에 대하여 다음 조건을 만족시키는 U의 부분집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

(가) $A\cup X=X$
(나) $(B-A)\cap X=\{5,\ 7\}$

T011

○○
(2010(11)고1-공통6)

전체집합 U의 공집합이 아닌 서로 다른 두 부분집합 A, B가

$$\{(A\cap B)\cup(A-B)\}\cap B=B$$

를 만족시킬 때, 항상 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $B\subset A$
ㄴ. $A-B=\varnothing$
ㄷ. $A\cup B^C=U$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T012

○○
(2006(11)고1-공통12)

두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{3,\ 4,\ 5\}$에 대하여

$$A\cap X=X,\ (A-B)\cup X=X$$

를 만족하고, 모든 원소의 합이 3의 배수인 집합 X의 개수는? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

T013

○○
(2016(4)고3-나형19)

전체집합 $U=\{x|x$는 7이하의 자연수$\}$의 세 부분집합 A, B, C에 대하여
$B \subset A$이고, $A \cup C=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이다.
$A-B=\{5\}$, $B-C=\{2\}$, $C-A=\{4,\ 6\}$일 때, 집합 $A \cap (B^C \cup C)$는? [4점]

① $\{5\}$ ② $\{1,\ 7\}$ ③ $\{3,\ 5\}$
④ $\{1,\ 3,\ 5\}$ ⑤ $\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

T014

○○
(2009(11)고1-공통13)

전체집합 U의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 대하여 A, B^C이 서로소일 때, 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $A-B=\varnothing$
ㄴ. $(A \cap B)^C=A^C$
ㄷ. $(A^C \cup B) \cap A=A$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T015

○○
(2002사관(1차)-문과3)

전체집합을 $U=\{a,\ b,\ c,\ d\}$라 하고, U의 두 부분집합 A, B에 대하여 연산 $\triangle$을

$$A \triangle B=(A-B) \cup (B-A)$$

로 정의할 때, $\{a,\ b,\ c\} \triangle X=Y$를 만족하는 집합 X, Y에 대한 다음 설명 중 옳지 않은 것은? [3점]

① $X=\{a,\ b,\ c\}$이면 $Y=\varnothing$이다.
② $X=\{d\}$이면 $Y=U$이다.
③ $X=\{c\}$이면 $Y=\{a,\ b\}$이다.
④ $X=U$이면 $Y=\{a,\ b,\ c\}$이다.
⑤ $X=\{c,\ d\}$이면 $Y=\{a,\ b,\ d\}$이다.

T016

○○
(2014(3)고2-B형27)

집합 A_n을

$A_n=\{x|x$는 n의 배수$\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

이라 하자. $A_n \cap A_2=A_{2n}$이고 90이 집합 A_2-A_n의 원소가 되도록 하는 90 이하의 자연수 n의 개수를 구하시오. [4점]

T017

○○
(2006(3)고2-공통6)

전체집합 U의 세 부분집합 A, B, C에 대하여 $A \subset B$이고 $A \subset C$일 때, 옳은 내용을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $A \subset (B \cap C)$
ㄴ. $(B^C \cap C^C) \subset A^C$
ㄷ. U의 임의의 부분집합 X에 대하여 $(X-B) \subset A^C$이다.

① ㄴ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T018

○○
(2015(9)고1-공통6)

전체집합 U의 두 부분집합 A, B에 대하여

$n(U)=50$, $n(A \cap B)=12$, $n(A^C \cap B^C)=5$

일 때, $n((A-B) \cup (B-A))$의 값은? [3점]

① 30 ② 31 ③ 32
④ 33 ⑤ 34

T019

○○
(2016(3)고2-가형11)

전체집합 $U=\{x \mid x$는 10 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$A=\{x \mid x$는 6의 약수$\}$, $B=\{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. $5 \not\in A \cap B$
ㄴ. $n(B-A)=2$
ㄷ. U의 부분집합 중 집합 $A \cup B$와 서로소인 집합의 개수는 16이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T020

○○
(2017사관(1차)-나형28)

두 집합

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$,
$B=\{3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

에 대하여

$X \not\subset A$, $X \not\subset B$, $X \subset (A \cup B)$

를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

T021

○○
(2006(9)고1–공통27)

전체집합

$U = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$

의 두 부분집합

$A = \{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$, $B = \{3,\ 6,\ 9\}$

가 있다. $A \cup C = B \cup C$가 성립하는 U의 부분집합 C의 개수를 구하시오. [4점]

T022

○○
(2007(11)고1–공통4)

두 집합 $A = \{a,\ b,\ c\}$, $B = \{a,\ b,\ c,\ d\}$에 대하여

$$B \cup X = B,\ n(A \cap X) = 2$$

를 만족시키는 집합 X의 개수는? (단, $n(A)$는 집합 A의 원소의 개수이다.) [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

T023

○○
(2013(9)고1–공통26)

실수 전체의 집합 R의 두 부분집합

$A = \{x | x^2 - x - 6 > 0\}$, $B = \{x | x^2 + ax + b \leq 0\}$

가 다음 조건을 모두 만족시킬 때, 두 상수 a, b에 대하여 $a-b$의 값을 구하시오. [4점]

(가) $A \cup B = R$
(나) $A \cap B = \{x | -5 \leq x < -2\}$

T024

○○
(2018사관(1차)–나형16)

전체집합 $U = \{x | x$는 7 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합

$$A = \{1,\ 2,\ 3\},\ B = \{2,\ 3,\ 5,\ 7\}$$

에 대하여 $A \cap X \neq \varnothing$, $B \cap X \neq \varnothing$을 모두 만족시키는 U의 부분집합 X의 개수는? [4점]

① 102 ② 104 ③ 106
④ 108 ⑤ 110

T025

○○
(2014(3)고2-A형28)

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$의 두 부분집합
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $B=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}$
에 대하여 $A\cup C=B\cup C$를 만족시키는 U의 부분집합 C의 개수를 구하시오. [4점]

T026

○○
(2016(3)고2-나형26)

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 두 부분집합

$$A=\{1,\ 2,\ 3\},\ B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$$

에 대하여 집합 P를

$$P=(A\cup B)\cap(A\cap B)^C$$

이라 하자. $P\subset X\subset U$를 만족시키는 집합 X의 개수를 구하시오. [4점]

T027

○○
(2016(6)고2-가형28)

어느 고등학교 학생들을 대상으로 수학문제집 A, B, C의 구매 여부에 대하여 조사한 결과가 다음과 같다.

(가) A와 B를 모두 구매한 학생은 15명, B와 C를 모두 구매한 학생은 12명, C와 A를 모두 구매한 학생은 11명이다.
(나) A와 B 중 적어도 하나를 구매한 학생은 55명, B와 C 중 적어도 하나를 구매한 학생은 54명, C와 A중 적어도 하나를 구매한 학생은 51명이다.

수학문제집 A를 구매한 학생의 수를 구하시오. [4점]

T028

○○○
(2016(3)고3-나형29)

두 집합
$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$
에 대하여 집합 P가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(P\cap A)=2$
(나) $P-B=\varnothing$
(다) 집합 P의 모든 원소의 합은 28이다.

집합 $P-A$의 모든 원소의 곱을 구하시오. [4점]

T029

○○○
(2016(11)고1-공통15)

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 공집합이 아닌 부분집합 X에 대하여 집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$라 하자.
집합 X가 다음 조건을 만족시킬 때, $S(X)$의 최댓값은? [4점]

(가) $X\cap\{1,\ 2,\ 3\}=\{2\}$
(나) $S(X)$의 값은 홀수이다.

① 11 ② 13 ③ 15
④ 17 ⑤ 19

T030

○○○
(2009(3)고2-공통12)

서로 다른 두 실수 a, b에 대하여 두 집합 A, B는

$$A=\{x\,|\,x^3+ax^2+bx=0\},$$
$$B=\{x\,|\,x^3+bx^2+ax=0\}$$

이다. $n(A\cup B)=4$, $n(A\cap B)=2$일 때, 집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$의 모든 원소의 합은? (단, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [4점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

T031

○○
(2017(6)고2-가형12/나형16)

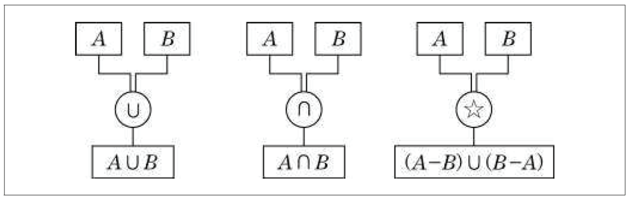
수강생이 35명인 어느 학원에서 모든 수강생을 대상으로 세 종류의 자격증 A, B, C의 취득 여부를 조사하였다. 자격증 A, B, C를 취득한 수강생이 각각 21명, 18명, 15명이고, 어느 자격증도 취득하지 못한 수강생이 3명이다. 이 학원의 수강생 중에서 세 자격증 A, B, C를 모두 취득한 수강생이 없을 때, 자격증 A, B, C 중에서 두 종류의 자격증만 취득한 수강생의 수는? [3점]

① 21 ② 22 ③ 23
④ 24 ⑤ 25

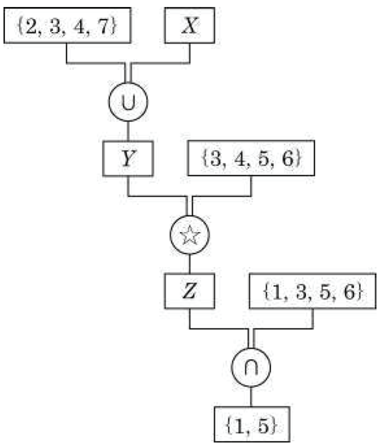
T032

(2011(6)고1-공통30)

두 집합 A, B에 대한 세 연산 $\cup$, $\cap$, ☆을 다음과 같이 정의한다.



X, Y, Z가 자연수를 원소로 갖는 집합일 때, 아래 그림에서 집합 X의 모든 원소의 합을 s라 하자. s의 최솟값을 구하시오. [4점]



T033

(2017(11)고2-나형20)

전체집합 $U=\{x \mid x$는 21 이하의 자연수$\}$의 두 부분집합 X, Y가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(X\cup Y)=17$, $n(X\cap Y)=1$
(나) 집합 X의 임의의 서로 다른 두 원소는 서로 나누어떨어지지 않는다.

집합 X의 모든 원소의 합을 $S(X)$, 집합 Y의 모든 원소의 합을 $S(Y)$라 할 때, $S(X)-S(Y)$의 최댓값은?
(단, $n(X)\geq 2$) [4점]

① 140 ② 144 ③ 148
④ 152 ⑤ 156

T034

★★★
(2018(3)고2-나형21)

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 두 부분집합 A, B가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $n(A\cup B)=5$
(나) $n(A-B)=2$
(다) $a\in A$이면 $\dfrac{a+1}{2}\in B$ 또는 $\dfrac{a+8}{2}\in B$이다.

집합 $B-A$에 속하는 모든 원소의 합의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 할 때, $M+m$의 값은? [4점]

① 24 ② 26 ③ 28
④ 30 ⑤ 32

T. 명제와 조건

T035

○○
(2015(9)고1-공통10)

실수 x에 대하여 두 조건 p, q가

p: $|x|\geq a$
q: $x<-2$ 또는 $x\geq 4$

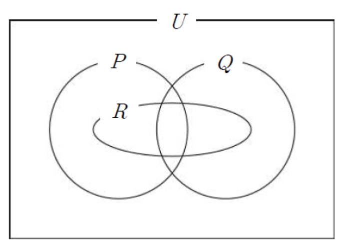
일 때, 명제 $p\to q$가 참이 되도록 하는 양수 a의 최솟값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

T036

○
(2009(6)고1-공통4)

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R이라 하자. 그림은 세 집합 P, Q, R 사이의 관계를 나타낸 벤다이어그램이다. 다음 명제 중 항상 참인 것은? (단, U는 전체집합이다.) [3점]



① $p\to q$ ② $r\to\sim p$ ③ $p\to\sim q$
④ $r\to(p$또는$q)$ ⑤ $(p$이고$r)\to q$

T037

○
(2011(9)고1-공통5)

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자. $(P\cup Q)\cap R=\varnothing$일 때, 다음 중 항상 참인 명제는? [3점]

① p이면 r이다.
② q이면 r이다.
③ p이면 $\sim r$이다.
④ $\sim r$이면 p이다.
⑤ $\sim r$이면 q이다.

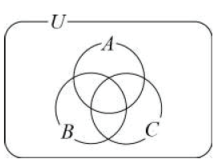
T038

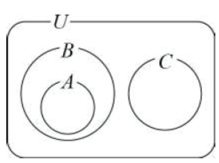
○○
(2011(9)고1-공통8)

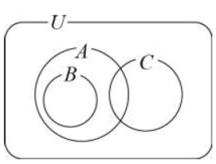
전체집합 U의 공집합이 아닌 세 부분집합 A, B, C에 대하여 다음은 A, B, C의 관계를 나타낸 명제이다.

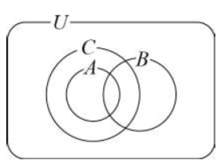
(가) 어떤 $x\in A$에 대하여 $x\notin B$이다.
(나) 모든 $x\in B$에 대하여 $x\notin C$이다.

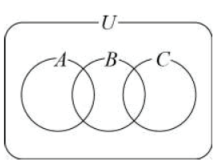
세 집합 A, B, C의 포함관계를 나타낸 다음 벤다이어그램 중 위의 두 명제가 항상 참이 되도록 하는 것은? [3점]

①


②


③


④


⑤


T039

○○
(2012(11)고1-공통14)

전체집합 U의 공집합이 아닌 세 부분집합 P, Q, R가 각각 세 조건 p, q, r의 진리집합이고, 세 명제 $p\to q$, $\sim p\to q$, $\sim r\to p$가 모두 참일 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $P^C\subset Q$
ㄴ. $R-P^C=\varnothing$
ㄷ. $R^C\cup P^C\subset Q$

① ㄱ
② ㄴ
③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T040

○○
(2007(11)고1-공통13)

보기의 명제 중에서 참인 것을 모두 고르면? (단, a, b는 실수이다.) [3점]

ㄱ. $a<b<0$이면 $a^2>b^2$이다.
ㄴ. $a\geq 0$ 또는 $b\geq 0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다.
ㄷ. $\lvert a\rvert+\lvert b\rvert\geq\lvert a+b\rvert$이면 $a\geq 0$이고 $b\geq 0$이다.

① ㄱ
② ㄷ
③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ
⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T041

○○
(2013(9)고1-공통25)

실수 전체의 집합에 대하여 명제

'어떤 실수 x에 대하여 $x^2-18x+k<0$'

의 부정이 참이 되도록 하는 상수 k의 최솟값을 구하시오. [3점]

T042

○○
(2018사관(1차)-나형26)

실수 x에 대한 두 조건

p: $-3 \le x < 5$,

q: $k-2 < x \le k+3$

에 대하여 명제

'어떤 실수 x에 대하여 p이고 q이다.'

가 참이 되도록 하는 정수 k의 개수를 구하시오. [4점]

T043

○○
(2015(6)고2-나형6)

명제

'$x^2-6x+5 \neq 0$이면 $x-a \neq 0$이다.'

가 참이 되기 위한 모든 상수 a의 값의 합은? [3점]

① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

T044

○○
(2009(9)고1-공통10)

전체집합 U에 대하여 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자. 명제 $p \rightarrow q$, $\sim p \rightarrow q$, $\sim p \rightarrow r$가 참일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $Q-R^C=R$
ㄴ. $P-R=\varnothing$
ㄷ. $Q-P \subset R$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T045

○○
(2016(3)고3-나형27)

전체집합 $U=\{x|x$는 8 이하의 자연수$\}$에 대하여 조건 'p: $x^2 \le 2x+8$' 의 진리집합을 P, 두 조건 q, r의 진리집합을 각각 Q, R라 하자. 두 명제 $p \to q$와 $\sim p \to r$가 모두 참일 때, 두 집합 Q, R의 순서쌍 (Q, R)의 개수를 구하시오. [4점]

T046

○○
(2017(3)고3-나형20)

실수 x에 대한 두 조건

p: $x^2-x-6<0$,

q: $x^2+(6-3a)x+2a^2-10a+8 \ge 0$

이 모두 참이 되도록 하는 정수 x가 오직 하나 존재할 때, 모든 정수 a의 값의 합은? [4점]

① 3 ② 5 ③ 7
④ 9 ⑤ 11

T047

○○
(2017(3)고3-나형12)

실수 x에 대한 조건

'모든 실수 x에 대하여 $x^2+4kx+3k^2 \ge 2k-3$이다.'

가 참인 명제가 되도록 하는 상수 k의 최댓값을 M, 최솟값을 m이라 하자. $M-m$의 값은? [3점]

① 2 ② 4 ③ 6
④ 8 ⑤ 10

T048

○○
(2015(9)고1-공통25)

집합 $U=\{1, 2, 3, 6\}$의 공집합이 아닌 부분집합 P에 대하여 명제 '집합 P의 어떤 원소 x에 대하여 x는 3의 배수이다.' 가 참이 되도록 하는 집합 P의 개수를 구하시오. [3점]

T049

○○
(2015(6)고2-가형11/나형16)

전체집합 U가 실수 전체의 집합일 때, 실수 x에 대한 두 조건 p, q가

$$p:\ a(x-1)(x-2)<0, \quad q:\ x>b$$

이다. 두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, a, b는 실수이다.) [4점]

ㄱ. $a=0$일 때, $P=\varnothing$이다.
ㄴ. $a>0$, $b=0$일 때, $P\subset Q$이다.
ㄷ. $a<0$, $b=3$일 때, 명제 '$\sim p$이면 q이다.' 는 참이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T050

○○
(2015(11)고1-공통17)

전체집합 U의 공집합이 아닌 세 부분집합 P, Q, R가 각각 세 조건 p, q, r의 진리집합이라 하자. 세 명제

$$\sim p \to r,\ r \to \sim q,\ \sim r \to q$$

가 모두 참일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $P^C \subset R$
ㄴ. $P \subset Q$
ㄷ. $P \cap Q \subset R^C$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T051

○○
(2010(6)고1-공통17)

전체집합 $U=\{x\,|\,x$는 10 이하의 자연수$\}$에서의 두 조건

p: x는 4의 약수이다. q: $2x-17\le 0$

의 진리집합을 각각 P, Q라 할 때, $P\subset X\subset Q$를 만족시키는 집합 X의 개수는? [3점]

① 4 ② 8 ③ 16
④ 32 ⑤ 64

T052

○○
(2018(3)고3-나형29)

전체집합 $U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 공집합이 아닌 두 부분집합 A, B에 대하여 두 명제

'집합 A의 모든 원소 x에 대하여 $x^2-3x<0$이다.'
'집합 B의 어떤 원소 x에 대하여 $x\in A$이다.'

가 있다. 두 명제가 모두 참이 되도록 하는 두 집합 A, B의 모든 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수를 구하시오. [4점]

T053

●●● (2015경찰대(1차)—공통11)

양의 실수 a, b, c에 대하여 세 조건

p: $ax^2-bx+c<0$,

q: $\dfrac{a}{x^2}-\dfrac{b}{x}+c<0$,

r: $(x-1)^2 \le 0$

의 진리집합을 각각 P, Q, R라 할 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $R\subset P$이면 $R\subset Q$이다.
ㄴ. $P\cap Q=\varnothing$이면 $R\subset P$ 또는 $R\subset Q$이다.
ㄷ. $P\cap Q\neq\varnothing$이면 $R\subset P\cap Q$이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T. 필요조건과 충분조건

T054

○○ (2015(3)고2—가형9)

실수 x에 대하여 두 조건 p, q가 다음과 같다.

p: $x^2-2x-8<0$

q: $x\ge a$

p가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a의 최댓값은? [3점]

① -4 ② -2 ③ 0
④ 2 ⑤ 4

T055

○○ (2017(3)고2—가형13)

실수 x에 대한 두 조건

p: $3|x-2|<9-2x$,

q: $a<x<b$

에 대하여 p가 q이기 위한 필요충분조건일 때, $b-a$의 값은? (단, a, b는 실수이다.) [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

T056

○○
(2016(9)고2-나형10)

실수 x에 대하여 두 조건 p, q를 각각

p: $-1 < x < 2$

q: $x^2 + ax + b < 0$

이라 하자. p는 q이기 위한 필요충분조건일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

T057

○○
(2010(3)고2-공통24)

자연수 n에 대하여 세 조건 p, q, r을 각각

p: $n \geq k$

q: $2n - 4 \geq 3$

r: $n^2 - 19n \geq 20$

이라 하자. p는 q이기 위한 충분조건이고, p는 r이기 위한 필요조건일 때, 자연수 k의 개수를 구하시오. [3점]

T058

○○
(2015(11)고2-나형17)

두 실수 a, b에 대하여 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. p: $a^2 + b^2 = 0$	q: $a = b$
ㄴ. p: $ab < 0$	q: $a < 0$ 또는 $b < 0$
ㄷ. p: $a^3 - b^3 = 0$	q: $a^2 - b^2 = 0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T059

○
(2007(9)고1-공통6)

전체집합 U에서 두 조건 p, q를 만족하는 집합을 각각 P, Q라고 하자. $P \cap Q = \varnothing$이고 $P \cup Q \neq U$일 때, 다음 중 항상 옳은 것은? (단, P, Q는 공집합이 아니다.) [3점]

① $p \Rightarrow q$ ② $\sim p \Rightarrow q$ ③ $q \Rightarrow p$
④ $q \Rightarrow \sim p$ ⑤ $\sim p \Rightarrow \sim q$

T060

○○ (2016(3)고2-가형16)

세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각

$P=\{3\}$, $Q=\{a^2-1,\ b\}$, $R=\{a,\ ab\}$

라 하자. p는 q이기 위한 충분조건이고, r은 p이기 위한 필요조건일 때, $a+b$의 최솟값은? (단, a, b는 실수이다.) [4점]

① $-\frac{3}{2}$ ② -2 ③ $-\frac{5}{2}$

④ -3 ⑤ $-\frac{7}{2}$

T061

○○ (2010(3)고2-공통11)

전체집합 U에서 세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R라 하자. $p \Rightarrow \sim q$이고, $\sim r \Rightarrow q$일 때, 다음 중 옳지 않은 것은? (단, P, Q, R은 모두 공집합이 아니다.) [3점]

① $P \subset Q^C$ ② $P \subset R$ ③ $P \subset (R \cap Q^C)$

④ $R \subset P^C$ ⑤ $Q^C \subset R$

T062

○○ (2013(9)고1-공통13)

두 실수 a, b에 대하여 세 조건 p, q, r는

p: $|a|+|b|=0$

q: $a^2-2ab+b^2=0$

r: $|a+b|=|a-b|$

이다. 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. p는 q이기 위한 충분조건이다.
ㄴ. $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.
ㄷ. q이고 r은 p이기 위한 필요충분조건이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T063

○○ (2011(11)고1-공통17)

두 실수 a, b에 대하여 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. p: $ab>0$	q: $\lvert a+b\rvert=\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$
ㄴ. p: $a+b\geq 2$	q: $a\geq 1$ 또는 $b\geq 1$
ㄷ. p: $\lvert a+b\rvert=\lvert a-b\rvert$	q: $a^2+ab+b^2\leq 0$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ

④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T064

○○
(2008(9)고1-공통8)

전체집합 U가 유한집합일 때 U의 두 부분집합 A, B에 대하여 보기에서 p가 q이기 위한 충분조건인 것을 있는 대로 고른 것은? (단, A, B는 공집합이 아니고, $n(X)$는 집합 X의 원소의 개수이다.) [3점]

ㄱ. p: $n(A) \le n(B)$	q: $A \subset B$
ㄴ. p: $n(A-B)=0$	q: $n(A)=n(B)$
ㄷ. p: $A=B^C$	q: $A \cup B = U$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

T065

○○
(2010(9)고1-공통9)

조건 p가 조건 q이기 위한 필요충분조건인 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? (단, x, y, z는 0이 아닌 실수) [3점]

ㄱ. p: $x+y=xy$	q: $\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=1$
ㄴ. p: $0<x<y$	q: $0<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{x}$
ㄷ. p: $(x-y)(y-z)(z-x)=0$	q: $x=y=z$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ㄱ, ㄴ, ㄷ

T066

○○
(2011(9)고1-공통10)

세 실수 x, y, z에 대하여 조건 p가 조건 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건이 아닌 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. p: $x=0$ 이고 $y=0$	q: $\lvert x+y \rvert = \lvert x-y \rvert$
ㄴ. p: $x>y>z$	q: $(x-y)(y-z)(z-x)<0$
ㄷ. p: $xy<0$	q: $\lvert x \rvert + \lvert y \rvert > \lvert x+y \rvert$

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T067

○○
(2006(3)고2-공통8)

a, b, c가 실수일 때, p가 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아닌 것을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. p: $a>0$	q: $a^2>0$
ㄴ. p: $ac=bc$	q: $a=b$
ㄷ. p: $a \ne 0$ 또는 $b \ne 0$	q: $a^2+b^2>0$

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄷ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄴ, ㄷ

T. 여러 가지 증명법(대우명제, 귀류법)

T068

○○○
(2006(3)고2-공통15)

다음은 세 실수 a, b, c에 대하여

$a+b+c>0$, $ab+bc+ca>0$, $abc>0$

이면 a, b, c는 모두 양수임을 증명한 것이다.

〈증명〉

$abc>0$이므로 a, b, c 중 어느 것도 0이 아니다.

이제 $a<0$이라고 가정하자.

$0<abc=a(bc)$이므로

bc $\boxed{(가)}$ 0 ⋯㉠

한편, 조건에 의하면 $ab+bc+ca>0$이므로

$-bc<ab+ca$ ⋯㉡

㉠, ㉡에 의하여 $ab+ca$ $\boxed{(나)}$ 0

$\therefore$ $b+c$ $\boxed{(다)}$ 0

$\therefore$ $a+b+c<0$

그런데, 이는 조건 $a+b+c>0$에 모순이다.

$\therefore$ $a>0$

마찬가지 방법으로 $b>0$, $c>0$임을 알 수 있다.

따라서 a, b, c는 모두 양수이다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	$<$	$>$	$>$
②	$<$	$>$	$<$
③	$<$	$<$	$>$
④	$>$	$<$	$>$
⑤	$>$	$<$	$<$

T. 절대부등식

T069

○○○
(2002사관(1차)-문과18)

다음은 임의의 실수 a, b에 대하여

$$\boxed{(가)} \le |a+b| \le \boxed{(나)}$$

임을 증명한 것이다.

$-|a| \le a \le |a|$이고 $-|b| \le b \le |b|$이므로

$|a+b| \le$ $\boxed{(나)}$ ⋯㉠

㉠을 이용하면 $|a| \le |a+b| +$ $\boxed{(다)}$이므로

$|a| -$ $\boxed{(다)}$ $\le |a+b|$이다.

같은 방법으로 하면 $\boxed{(다)}$ $- |a| \le |a+b|$

$\therefore$ $\boxed{(가)}$ $\le |a+b|$ ⋯㉡

㉠과 ㉡에 의해 $\boxed{(가)}$ $\le |a+b| \le$ $\boxed{(나)}$가 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것을 순서대로 적은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\rvert$	$\lvert a\rvert-\lvert b\rvert$	$\lvert b\rvert$
②	$\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\rvert$	$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	$-\lvert b\rvert$
③	$\lvert a+b\rvert$	$\lvert a-b\rvert$	$-\lvert b\rvert$
④	$\lvert\lvert a\rvert-\lvert b\rvert\rvert$	$\lvert a\rvert+\lvert b\rvert$	$\lvert b\rvert$
⑤	$\lvert a-b\rvert$	$\lvert a+b\rvert$	$\lvert b\rvert$

T070

○○
(2011(9)고1-공통17)

다음은 임의의 두 실수 a, b와 $p \geq 0$, $q \geq 0$, $p+q=1$을 만족하는 p, q에 대하여

$$|ap+bq| \leq \sqrt{a^2p+b^2q}$$

임을 증명한 것이다.

〈증명〉

$|ap+bq|^2-(\sqrt{a^2p+b^2q})^2$

$=a^2p(p-1)+b^2q\boxed{\text{(가)}}+2abpq$

$=\boxed{\text{(나)}}p(p-1)$

$p \geq 0$, $q \geq 0$, $p+q=1$이므로 $p(p-1)\boxed{\text{(다)}}0$이다.

따라서 $|ap+bq|^2-(\sqrt{a^2p+b^2q})^2 \leq 0$

그러므로 $|ap+bq| \leq \sqrt{a^2p+b^2q}$ 이다.

위의 증명 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$(p-1)$	$(a+b)^2$	$\leq$
②	$(p-1)$	$-(a-b)^2$	$\geq$
③	$(q-1)$	$(a-b)^2$	$\geq$
④	$(q-1)$	$-(a+b)^2$	$\geq$
⑤	$(q-1)$	$(a-b)^2$	$\leq$

T071

○○
(2009(9)고1-공통13)

다음은 실수 a, b에 대하여 $a>0$, $b>0$일 때, $\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right)$의 최솟값을 구하는 과정으로, 어떤 학생의 오답에 대한 선생님의 첨삭지도의 일부이다.

〈학생 풀이〉

산술평균과 기하평균의 대소 관계를 적용하면

$a+\frac{1}{b} \geq 2\sqrt{\frac{a}{b}}$ ⋯㉠

$b+\frac{4}{a} \geq 2\sqrt{\frac{4b}{a}}$ ⋯㉡

㉠, ㉡의 양변을 각각 곱하면

$\left(a+\frac{1}{b}\right)\left(b+\frac{4}{a}\right) \geq 4\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{4b}{a}}=8$ ⋯㉢

그러므로 구하는 최솟값은 8이다.

〈첨삭 내용〉

㉠의 등호가 성립할 때는 $\boxed{\text{(가)}}$이고,

㉡의 등호가 성립할 때는 $\boxed{\text{(나)}}$이다.

따라서 (가)와 (나)를 동시에 만족하는 양수 a, b는 존재하지 않으므로 최솟값은 8이 될 수 없다.

(가), (나)에 알맞은 것과 최솟값을 바르게 구한 것은? [4점]

	(가)	(나)	최솟값
①	$ab=1$	$a=4b$	10
②	$ab=1$	$ab=4$	10
③	$a=b$	$a=b$	10
④	$a=b$	$ab=1$	9
⑤	$ab=1$	$ab=4$	9

T072

○○
(2008(9)고1-공통14)

음이 아닌 두 실수 a, b에 대하여 보기에서 항상 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\sqrt{a}-\sqrt{b} \le \sqrt{a+b}$
ㄴ. $\sqrt{a+b} \le \sqrt{a}+\sqrt{b}$
ㄷ. $\sqrt{a}+\sqrt{b} \le \sqrt{2(a+b)}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T073

○○
(2008(3)고2-공통15)

$a>0$, $b>0$, $c>0$일 때, 보기에서 항상 성립하는 부등식을 모두 고른 것은? [4점]

ㄱ. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \ge \frac{4}{a+b}$
ㄴ. $\sqrt{a}+\sqrt{b} > \sqrt{a+b}$
ㄷ. $a+b+c \ge \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T074

○○
(2010(11)고1-공통17)

다음은 세 양수 a, b, c에 대하여 부등식

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$$

이 성립함을 증명한 것이다.

〈증명〉
$b+c=x$, $c+a=y$, $a+b=z$라 하면,
$a+b+c=\boxed{(가)}(x+y+z)$이므로
$a=\frac{y+z-x}{2}$, $b=\frac{z+x-y}{2}$, $c=\frac{x+y-z}{2}$이다.
그러므로

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$$
$$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)+\boxed{(나)}$$
$$\ge \boxed{(다)}\left(\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}+\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}\right)+\boxed{(나)}$$
$$=\frac{3}{2}$$

따라서 세 양수 a, b, c에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

위의 증명에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [4점]

	(가)	(나)	(다)
①	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1
②	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2
③	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	1
④	2	$-\frac{3}{2}$	2
⑤	2	$-\frac{1}{2}$	2

T075

○○
(2003경찰대(1차)—공통2)

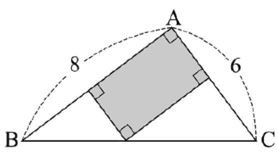
양수 a, b에 대하여 $a^2-6a+\dfrac{a}{b}+\dfrac{9b}{a}$가 $a=m$, $b=n$일 때, 최솟값을 갖는다. 이때 $m+n$의 값은?

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

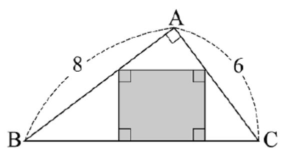
T076

○○○
(2008(3)고2—공통19)

$\overline{AB}=8$, $\overline{AC}=6$, $\angle A=90^\circ$인 직각삼각형 ABC에 내접하는 직사각형을 만들 때, [그림1]과 같이 직사각형의 두 변이 삼각형의 변 위에 존재하는 경우와 [그림2]와 같이 직사각형의 한 변만이 삼각형의 변 위에 존재하는 경우가 있다.



[그림1]



[그림2]

[그림1]과 [그림2]의 경우에 내접하는 직사각형의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

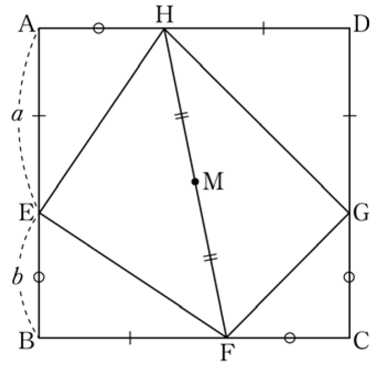
ㄱ. S_1의 최댓값은 12이다.
ㄴ. S_1의 최대일 때, 직사각형의 둘레의 길이는 14이다.
ㄷ. S_2의 최댓값과 S_1의 최댓값은 같다.

① ㄱ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T077

○○○
(2016(3)고3—나형17)

두 양수 a, b에 대하여 한 변의 길이가 $a+b$인 정사각형 ABCD의 네 변 AB, BC, DC, DA를 각각 $a:b$로 내분하는 점을 E, F, G, H라 하고, 선분 FH의 중점을 M이라 하자. 그림은 위의 설명과 같이 그린 한 예이다.



보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

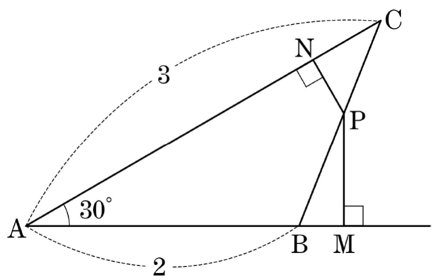
ㄱ. $\overline{FM}=\overline{GM}$
ㄴ. $\triangle EFM \geq \triangle FGM$
ㄷ. $\overline{FH}=6\sqrt{2}$일 때, 삼각형 FGM의 넓이의 최댓값은 9이다.

① ㄱ　② ㄷ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

T078

○○○
(2014(3)고2-A형30/B형30)

그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=2$, $\overline{\mathrm{AC}}=3$, $A=30^{\circ}$ 인 삼각형 ABC의 변 BC 위의 점 P에서 두 직선 AB, AC 위에 내린 수선의 발을 각각 M, N이라 하자. $\dfrac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{PM}}}+\dfrac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{PN}}}$의 최솟값이 $\dfrac{p}{q}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



U. 함수

U001

○○
(2013(11)고1-공통10)

두 집합 $X=\{0,\ 1,\ 2\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 두 함수 $f:X\to Y$, $g:X\to Y$를

$f(x)=2x^2-4x+3$, $g(x)=a|x-1|+b$

라 하자. 두 함수 f와 g가 서로 같도록 하는 상수 a, b에 대하여 $2a-b$의 값은? [3점]

① -3 ② -1 ③ 1
④ 3 ⑤ 5

U002

○○
(2016(3)고3-나형6)

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 집합 X에서 집합 Y로의 일대일함수를 $f(x)$라 하자. $f(2)=4$일 때, $f(1)+f(3)$의 최댓값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

U003

○○
(2009(11)고1-공통7)

집합 $X=\{2,\ 3,\ 6\}$에 대하여 집합 X에서 X로의 일대일 대응, 항등함수, 상수함수를 각각 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$라 하자. 세 함수 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(3)+h(2)$의 값은? [3점]

(가) $f(2)=g(3)=h(6)$
(나) $f(2)f(3)=f(6)$

① 4 ② 5 ③ 6
④ 8 ⑤ 9

U004

○○
(2017(6)고2-가형11)

집합 $X=\{-2,\ -1,\ 3\}$에 대하여 함수 $f:\ X\to X$가

$$f(x)=\begin{cases} ax^2+bx-2 & (x<0) \\ 3 & (x\geq 0) \end{cases}$$

이다. 함수 $f(x)$가 항등함수가 되도록 하는 두 상수 a, b에 대하여 $a+b$의 값은? [3점]

① -5 ② -4 ③ -3
④ -2 ⑤ -1

U005

○○
(2017(4)고3-가형12)

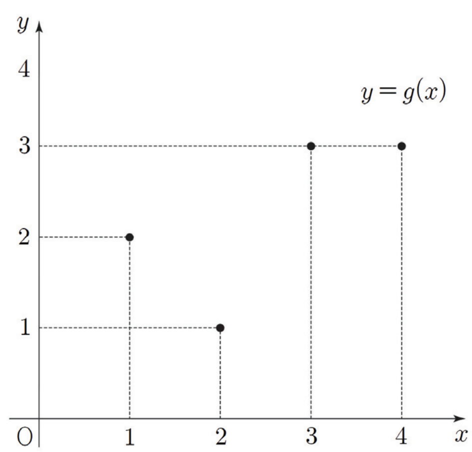
집합 $X=\{1, 2\}$에서 집합 $Y=\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$으로의 함수 f 중에서 $f(1)+f(2)$가 4의 배수가 되도록 하는 함수 f의 개수는? [3점]

① 8 ② 9 ③ 10
④ 11 ⑤ 12

U006

○○
(2014(11)고1-공통28)

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여
두 함수 $f: X\to X$, $g: X\to X$가 있다.
함수 $y=f(x)$는 $f(4)=2$를 만족시키고 함수 $y=g(x)$의 그래프는 그림과 같다.



두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$에 대하여 함수 $h: X\to X$를

$$h(x)=\begin{cases} f(x) & (f(x)\geq g(x)) \\ g(x) & (g(x)>f(x)) \end{cases}$$

라 정의하자. 함수 $y=h(x)$가 일대일대응일 때, $f(2)+h(3)$의 값을 구하시오. [4점]

U007

○○
(2015(11)고1-공통28)

실수 전체의 집합 R에 대하여 함수 $f: R\to R$가

$$f(x)=a|x+2|-4x$$

로 정의될 때, 이 함수가 일대일대응이 되도록 하는 정수 a의 개수를 구하시오. [4점]

U008

○○
(2015(3)고2-가형10)

두 집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$, $Y=\{5, 6, 7, 8\}$에 대하여 함수 f는 X에서 Y로의 일대일대응이다.

$$f(1)=7, \ f(2)-f(3)=3$$

일 때, $f(3)+f(4)$의 값은? [3점]

① 11 ② 12 ③ 13
④ 14 ⑤ 15

U009

○○○
(2017(3)고3-나형13)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 일대일대응인 함수 $f:X\to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(2)-f(3)=f(4)-f(1)=f(5)$
(나) $f(1)<f(2)<f(4)$

$f(2)+f(5)$의 값은? [3점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

U010

○○○
(2017(3)고2-가형30)

일차함수 $f(x)$와 이차항의 계수가 1인 이차함수 $g(x)$에 대하여 두 함수

$h_1(x)=f(x)+g(x)$, $h_2(x)=f(x)-g(x)$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 $y=h_1(x)$의 그래프는 x축에 접한다.
(나) 함수 $y=h_1(x)$의 그래프와 함수 $y=h_2(x)$의 그래프는 오직 한 점 $(1,\ 9)$에서 만난다.
(다) 모든 실수 x에 대하여 두 부등식 $h_1(x)\geq h_1(\alpha)$, $h_2(x)\leq h_2(\beta)$ 가 성립할 때, $\alpha>\beta$이다. (단, α, β는 상수이다.)

$f(\beta)\times g(\alpha)$의 값을 구하시오. [4점]

U. 합성함수

U011

○○
(2018(4)고3-나형26)

두 함수

$$f(x)=x+a,$$
$$g(x)=\begin{cases} x-2 & (x<2) \\ x^2 & (x\geq 2) \end{cases}$$

에 대하여 $(f\circ g)(0)+(g\circ f)(0)=10$을 만족시키는 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

U012

○○
(2006(4)고3-가형7)

한 개의 주사위를 두 번 던져서 첫 번째 나온 눈의 수를 a, 두 번째 나온 눈의 수를 b라 하자.

$f(x)=(a-4)x+6$, $g(x)=(3-b)x+2$

라 할 때, 합성함수 $y=(f\circ g)(x)$의 그래프가 x축과 만나지 않는 경우의 수는? [3점]

① 4 ② 6 ③ 8
④ 10 ⑤ 12

U013

○○
(2016(3)고3-나형28)

두 함수

$$f(x)=\begin{cases} x^2+2ax+6 & (x<0) \\ x+6 & (x \geq 0) \end{cases},\ g(x)=x+10$$

에 대하여 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 치역이 $\{y|y \geq 0\}$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [4점]

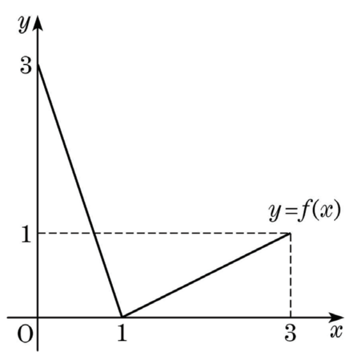
U014

○○
(2014(3)고2-B형20)

그림은 $0 \leq x \leq 3$에서 정의된 함수 $y=f(x)$의 그래프를 나타낸 것이다. 방정식

$$f(f(x))=2-f(x)$$

의 서로 다른 실근의 개수는? [4점]



① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

U015

○○
(2016(3)고3-나형11)

두 집합 $A=\{x|x$는 자연수$\}$, $B=\{0,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 두 함수 $f:A \rightarrow A$, $g:A \rightarrow B$가

$f(x)=mx$, $g(x)=$(x를 4로 나눈 나머지)

이다. 합성함수 $(g \circ f)(x)$의 치역의 원소의 개수가 1이 되도록 하는 자연수 m의 최솟값은? [3점]

① 2 ② 3 ③ 4
④ 5 ⑤ 6

U016

○○
(2016(3)고3-나형19)

이차함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(0)=f(2)=0$
(나) 이차방정식 $f(x)-6(x-2)=0$의 실근의 개수는 1이다.

방정식 $(f \circ f)(x)=-3$의 서로 다른 실근을 모두 곱한 값은? [4점]

① $-\frac{1}{3}$ ② $-\frac{2}{3}$ ③ -1
④ $-\frac{4}{3}$ ⑤ $-\frac{5}{3}$

U017

○○
(2016(4)고3-나형17)

집합 $X=\{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 모든 원소 x에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)$는 '$2x$를 5로 나눈 나머지' 로 정의하고,
X에서 X로의 함수 $g(x)$는 $(f\circ g)(x)=(g\circ f)(x)$를 만족시킨다. $g(1)=3$일 때, $g(0)+g(3)$의 값은? [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

U018

○○○
(2018(9)고2-가형29)

함수 $f(x)=x^2+ax+1$에 대하여 집합
$\{x \mid f(f(x))=f(x),\ x\text{는 실수}\}$
의 원소의 개수가 2일 때, 양수 a의 값은? [4점](2025경찰대(1차)-공통9)

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

U019

○○○
(2009(3)고2-공통11)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 두 함수
$f:\ X\to X,\ g:\ X\to X$
가 있다. 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [3점]

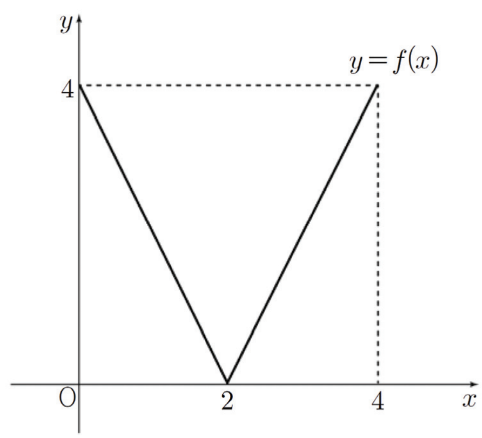
ㄱ. $f,\ g$가 모두 항등함수이면 $g\circ f$는 항등함수이다.
ㄴ. $g\circ f$가 항등함수이면 $f,\ g$는 모두 일대일대응이다.
ㄷ. $g\circ f$가 항등함수이면 $f,\ g$는 모두 항등함수이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

U020

○○○
(2017(6)고2-나형20)

함수
$f(x)=|2x-4|\ (0\le x\le 4)$
에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



ㄱ. $f(f(1))=0$
ㄴ. 방정식 $f(x)=x$의 모든 실근의 개수는 2이다.
ㄷ. 방정식 $f(f(x))=f(x)$의 모든 실근의 합은 8이다.

① ㄱ ② ㄱ, ㄴ ③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

U021

○○○
(2018(3)고3-나형21)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9\}$에 대하여 두 함수 $f:X \to X$, $g:X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(1)=8$, $f(3) \neq 6$ (나) 함수 $(g \circ f)(x)$는 항등함수이다. (다) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $f(x)+g(x)$의 값은 일정하다.

$(f \circ f \circ f)(7)$의 값은? [4점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

U022

○○○
(2017(3)고2-가형28)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에 대하여 함수 $f:X \to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 \neq x_2$이면 $f(x_1) \neq f(x_2)$이다. (나) $1 \leq x \leq 3$일 때, $(f \circ f)(x)=f(x)-2x$이다.

$f(2)+f(3)+f(4)$의 값을 구하시오. [4점]

U023

●●●
(2017사관(1차)-나형14)

두 집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $B=\{2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 두 일대일대응

$$f:A \to B,\ g:B \to A$$

가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $f(3)=5$, $g(2)=3$ (나) 어떤 $x \in B$에 대하여 $g(x)=x$이다. (다) 모든 $x \in A$에 대하여 $(f \circ g \circ f)(x)=x+1$이다.

$f(1)+g(3)$의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

U024

●●● (2017(3)고2-나형20)

집합 $X=\{1, 2, 3, 4, 5\}$에 대하여 함수 $f:X\rightarrow X$가 있다. 함수 f가 일대일대응일 때, 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(1)\times f(2)=6$이면 $f(3)+f(4)+f(5)=10$이다.
ㄴ. 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $(f\circ f)(x)=x$이면 $f(a)=a$인 집합 X의 원소 a가 존재한다.
ㄷ. 집합 X의 어떤 원소 x에 대하여 $(f\circ f\circ f)(x)=x$이면 $f(b)=b$인 집합 X의 원소 b가 존재한다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

U025

○○ (2017(3)고2-가형25)

함수 $f(x)=x^3+1$에 대하여 $(f^{-1}\circ f\circ f^{-1})(a)=3$을 만족시키는 실수 a의 값을 구하시오. [3점]

U026

○○ (2018사관(1차)-나형11)

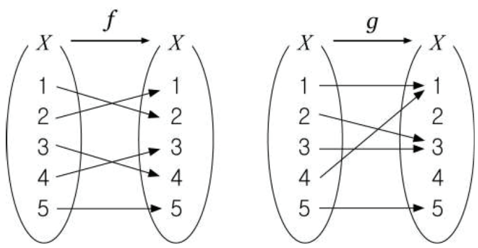
집합 $X=\{2, 4, 6, 8\}$에서 X로의 일대일대응 $f(x)$가
$f(6)-f(4)=f(2),\ f(6)+f(4)=f(8)$
을 모두 만족시킬 때, $(f\circ f)(6)+f^{-1}(4)$의 값은? [3점]

① 8 ② 10 ③ 12
④ 14 ⑤ 16

U027

○○
(2006(6)고2-나형28)

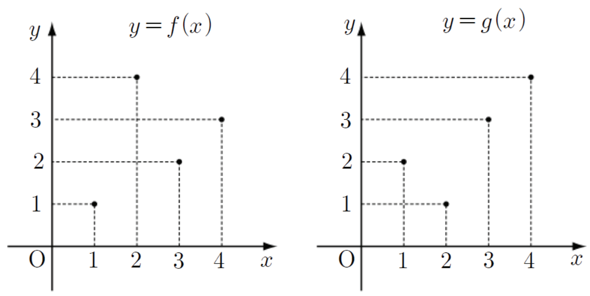
두 함수 f, g가 그림과 같을 때, $g(x)=h(f(x))$를 만족하는 함수 h에 대하여 $g(f(4))+10h(1)$의 값을 구하시오. [3점]



U028

○○
(2009(11)고1-공통5)

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 집합 A에서 A로의 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 각각 그림과 같을 때, $(g\circ f)(1)+(f\circ g)^{-1}(3)$의 값은? [3점]

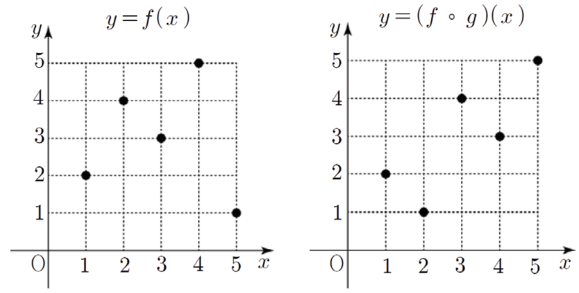


① 4　　② 5　　③ 6
④ 7　　⑤ 8

U029

○○
(2015(9)고2-가형16)

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 집합 A에서 집합 A로의 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 있다. 두 함수 $y=f(x)$, $y=(f\circ g)(x)$의 그래프가 각각 그림과 같을 때, $g(2)+(g\circ f)^{-1}(1)$의 값은? [4점]



① 6　　② 7　　③ 8
④ 9　　⑤ 10

U030

○○
(2016(7)고3-나형10)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 함수 $f:X\to X$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 f는 일대일대응이다. (나) 집합 X의 모든 원소 a에 대하여 $f(a)\neq a$이다.

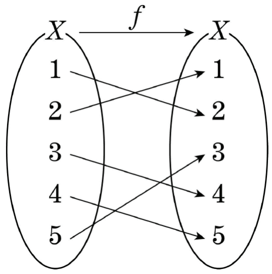
$f(1)+f(4)=7$일 때, $f(1)+f^{-1}(1)$의 값은? [3점]

① 4　　② 5　　③ 6
④ 7　　⑤ 8

U031

(2014(3)고2-A형18)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 $f:\ X \to X$가 그림과 같다.



함수 $g: X \to X$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(1)=3,\ g(2)=5$
(나) g의 역함수가 존재한다.

$(g \circ f)(4)+(f \circ g)(4)$의 최댓값은? [4점]

① 5　② 6　③ 7　④ 8　⑤ 9

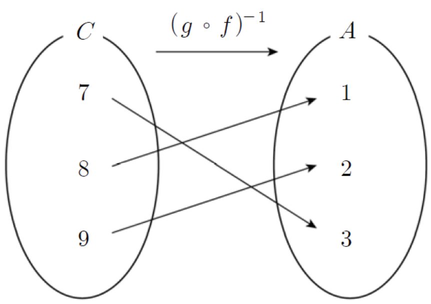
U032

(2017(6)고2-가형15)

세 집합

$A=\{1,\ 2,\ 3\},\ B=\{4,\ 5,\ 6\},\ C=\{7,\ 8,\ 9\}$

에 대하여 두 함수 $f:\ A \to B,\ g:\ B \to C$가 일대일 대응이다. 함수 $(g \circ f)^{-1}:\ C \to A$가 그림과 같고 $f(1)=4$, $g(6)=9$일 때, $f(2)+g(5)$의 값은? [4점]

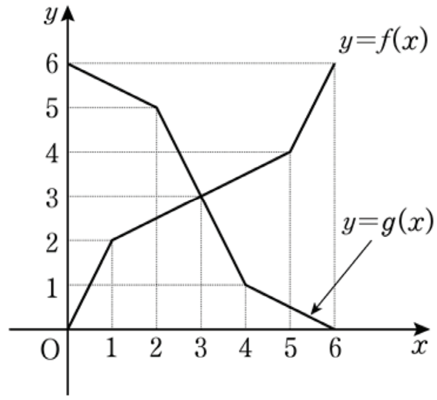


① 11　② 12　③ 13　④ 14　⑤ 15

U033

(2015(3)고2-나형19)

정의역이 $\{x \mid 0 \le x \le 6\}$인 두 함수 $y=f(x),\ y=g(x)$는 일대일대응이고 그래프는 그림과 같다.



등식 $f^{-1}(a)=g(b)$를 만족시키는 두 자연수 $a,\ b$의 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수는? (단, 두 함수의 그래프는 각각 세 선분으로 되어 있다.) [4점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

U034

(2006(3)고2-공통10)

양의 실수 전체의 집합 X에서 X로의 일대일대응인 두 함수 $f,\ g$에 대하여

$$f^{-1}(x)=x^2,\ (f \circ g^{-1})(x^2)=x$$

일 때, $(f \circ g)(20)$의 값은? (단, $f^{-1},\ g^{-1}$은 각각 $f,\ g$의 역함수이다.) [4점]

① $2\sqrt{5}$　② $4\sqrt{10}$　③ 40　④ 200　⑤ 400

U035

○○
(2016(9)고2-나형17)

정의역이 $\{x|x$는 $x \geq k$인 모든 실수$\}$이고,
공역이 $\{y|y$는 $y \geq 1$인 모든 실수$\}$인 함수

$$f(x)=x^2-2kx+k^2+1$$

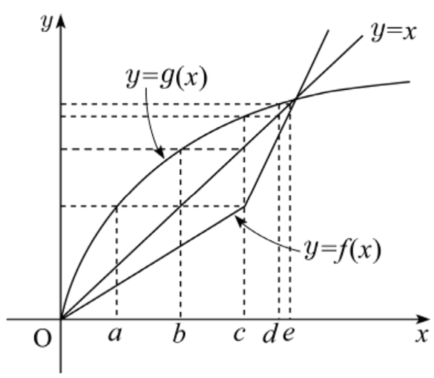
에 대하여 함수 $f(x)$의 역함수를 $g(x)$라 하자. 두 함수 $y=f(x)$와 $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은? [4점]

① $\frac{7}{8}$　② 1　③ $\frac{9}{8}$
④ $\frac{5}{4}$　⑤ $\frac{11}{8}$

U036

○○
(2009(3)고2-공통9)

그림은 $x \geq 0$에서 정의된 두 함수 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프와 직선 $y=x$를 나타낸 것이다. $g^{-1}(f(c))$의 값은? (단, g는 역함수가 존재하는 함수이다.) [3점]



① a　② b　③ c
④ d　⑤ e

U037

○○○
(2002사관(1차)-문과16)

f, g가 일대일 대응일 때, $f \circ h_1=g$, $h_2 \circ f=g$를 만족하는 h_1, h_2에 대한 보기의 설명 중 항상 옳은 것을 모두 고르면? [4점]

ㄱ. $h_1=f^{-1} \circ g$이고 $h_2=g \circ f^{-1}$이다.
ㄴ. h_1과 h_2는 모두 일대일 대응이다.
ㄷ. h_1과 h_2는 서로 같은 함수가 아니다.

① ㄴ　② ㄱ, ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

U038

○○○
(2015(11)고2-나형19)

집합 $X=\{1, 2, 3, 4\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 f가

$$f(x)=\begin{cases} x^2 & (x=1,\ 2) \\ x+a & (x=3,\ 4) \end{cases} \text{(}a\text{는 상수)}$$

이고, 함수 f의 역함수 g가 존재한다.
$g^1(x)=g(x)$, $g^{n+1}(x)=g(g^n(x))(n=1, 2, 3, \cdots)$라 할 때, $a+g^{10}(2)+g^{11}(2)$의 값은? [4점]

① 4　② 5　③ 6
④ 7　⑤ 8

U039

○○○
(2016(3)고2-나형20)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$에 대하여 X에서 X로의 일대일대응인 함수 f가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 집합 X의 모든 원소 x에 대하여 $(f\circ f)(x)=x$이다.
(나) 집합 X의 어떤 원소 x에 대하여 $f(x)=2x$이다.

보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. $f(3)=f^{-1}(3)$
ㄴ. $f(1)=3$이면 $f(2)=4$이다.
ㄷ. 가능한 함수 f의 개수는 4이다.

① ㄱ ② ㄴ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

U040

○○○
(2018(10)고3-나형28)

두 집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $Y=\{2,\ 4,\ 6,\ 8\}$에 대하여 함수 $f:X\to Y$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 f는 일대일대응이다.
(나) $f(1)\neq 2$
(다) 등식 $\frac{1}{2}f(a)=(f\circ f^{-1})(a)$를 만족시키는 a의 개수는 2이다.

$f(2)\times f^{-1}(2)$의 값을 구하시오. [4점]

U. 유리함수

U041

○○
(2007(6)고2-가형16/나형16)

유리함수 $f(x)=\dfrac{kx}{x+3}$의 그래프가 $y=x$에 대하여 대칭일 때, 실수 k의 값은? [3점]

① -5 ② -3 ③ -1
④ 1 ⑤ 3

U042

○
(2009(11)고1-공통6)

유리함수 $y=\dfrac{3x+5}{x-1}$의 그래프에 대한 설명으로 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [3점]

ㄱ. 점근선의 방정식은 $x=1$, $y=3$이다.
ㄴ. 그래프는 제3사분면을 지난다.
ㄷ. 그래프는 직선 $y=x+3$에 대하여 대칭이다.

① ㄱ ② ㄷ ③ ㄱ, ㄴ
④ ㄴ, ㄷ ⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

U043

○○
(2009(6)고2-가형16)

유리함수 $y=\dfrac{-3x+7}{x-2}$의 그래프는 두 직선 $y=ax+b$와 $y=cx+d$에 대하여 각각 대칭이다. 이때, $a+b+c+d$의 값은? [3점]

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

U044

○○
(2016(11)고2-나형17)

양수 a에 대하여 함수 $f(x)=\dfrac{ax}{x+1}$의 그래프의 점근선인 두 직선과 직선 $y=x$로 둘러싸인 부분의 넓이가 18일 때, a의 값은? [4점]

① 5 ② 6 ③ 7
④ 8 ⑤ 9

U045

(2017(3)고2-가형8)

유리함수 $y=\dfrac{3x+b}{x+a}$의 그래프가 점 $(2,\ 1)$을 지나고, 점 $(-2,\ c)$에 대하여 대칭일 때, $a+b+c$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

U046

(2011경찰대(1차)-공통3)

유리함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$의 그래프가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 원점을 지난다. (나) 점근선의 방정식은 $x=1$과 $y=-2$이다.

이때 함수 $f(x)$의 역함수를 $f^{-1}(x)$라 할 때, $f^{-1}(-1)$의 값은?

① -2　② -1　③ 0　④ 1　⑤ 2

U047

(2017(6)고2-가형10)

유리함수 $f(x)=\dfrac{2x+5}{x+3}$의 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(p,\ q)$에 대하여 대칭이다. $p-q$의 값은? [3점]

① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

U048

(2012(3)고2-공통7)

유리함수 $y=\dfrac{2}{x+3}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 $y=\dfrac{-2x+6}{x-2}$의 그래프와 일치한다. $m+n$의 값은? [3점]

① -4　② -2　③ 2　④ 4　⑤ 6

U049

○○
(2015(3)고2-가형16)

유리함수 $f(x)=\dfrac{3x+k}{x+4}$의 그래프를 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 곡선을 $y=g(x)$라 하자. 곡선 $y=g(x)$의 두 점근선의 교점이 곡선 $y=f(x)$ 위의 점일 때, 상수 k의 값은? [4점]

① -6 ② -3 ③ 0
④ 3 ⑤ 6

U050

○○
(2018(3)고3-가형12)

함수 $y=f(x)$의 그래프는 곡선 $y=-\dfrac{2}{x}$를 평행이동한 것이고 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다. 함수 $f(x)$의 정의역이 $\{x|x\neq-2$인 모든 실수$\}$일 때, $f(4)$의 값은? [3점]

① -3 ② $-\dfrac{7}{3}$ ③ $-\dfrac{5}{3}$
④ -1 ⑤ $-\dfrac{1}{3}$

U051

○○
(2015(11)고1-공통12)

유리함수 $y=\dfrac{2x-1}{x-a}$의 그래프와 그 역함수의 그래프가 일치할 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

U052

○○
(2017(3)고3-나형16)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\frac{6x+12}{2x-1},$$

$$g(x)=\begin{cases}1 & (x\text{가 정수인 경우})\\ 0 & (x\text{가 정수가 아닌 경우})\end{cases}$$

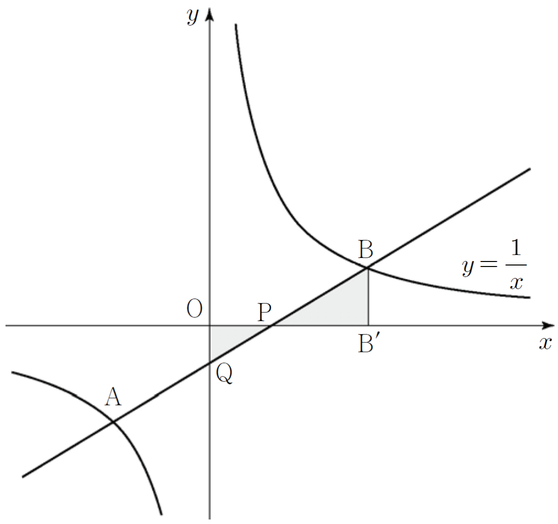
일 때, 방정식 $(g\circ f)(x)=1$을 만족시키는 모든 자연수 x의 개수는? [4점]

① 4 ② 5 ③ 6
④ 7 ⑤ 8

U053

○○ (2016(6)고2-가형17)

곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위의 두 점 $\mathrm{A}(-1,\ -1)$, $\mathrm{B}\left(a,\ \frac{1}{a}\right)$ $(a>1)$를 지나는 직선이 x축, y축과 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 B′라 할 때, 두 삼각형 POQ, PB′B의 넓이를 각각 S_1, S_2라 하자. S_1+S_2의 최솟값은? (단, O는 원점이다.) [4점]



① $\frac{2-\sqrt{3}}{2}$ ② $\frac{\sqrt{2}-1}{2}$ ③ $2-\sqrt{3}$
④ $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$ ⑤ $\sqrt{2}-1$

U054

○○ (2016(3)고3-나형9)

유리함수 $y=\frac{5}{x-p}+2$의 그래프가 제3사분면을 지나지 않도록 하는 정수 p의 최솟값은? [3점]

① 3 ② 4 ③ 5
④ 6 ⑤ 7

U055

○○ (2017(3)고2-나형19)

유리함수 $f(x)=\frac{2x+b}{x-a}$가 다음 조건을 만족시킨다.

> (가) 2가 아닌 모든 실수 x에 대하여
> $f^{-1}(x)=f(x-4)-4$
> 이다.
> (나) 함수 $y=f(x)$의 그래프를 평행이동하면 함수 $y=\frac{3}{x}$의 그래프와 일치한다.

$a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [4점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

U056

○○ (2010경찰대(1차)-공통11)

20 보다 작은 자연수 a, b, c, d에 대하여 $f(x)=\frac{ax-b}{cx+d}$로 주어져 있다.

$X=\{x|x>-2,\ x\text{는 실수}\}$,
$Y=\{y|y<5,\ y\text{는 실수}\}$

라 할 때, 함수 $f:X\to Y$가 일대일대응이 되도록 하는 자연수 a, b, c, d 중 $a+b+c+d$의 최솟값과 최댓값의 합은? [4점]

① 48 ② 50 ③ 52
④ 54 ⑤ 56

U057

○○○
(2007경찰대(1차)−공통23)

유리함수 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$가 다음 세 조건을 만족할 때, $f(5)$의 값은?
(단, a, b, c, d는 0이 아닌 실수이고, $ad-bc\neq 0$이다.)

(가) $f(1)=1$
(나) $f(7)=7$
(다) $x\neq -\dfrac{d}{c}$인 모든 실수 x에 대하여 $f(f(x))=x$이다.

① 13 ② 14 ③ 15
④ 16 ⑤ 17

U058

○○○
(2018(10)고3−나형21)

함수 $f(x)=\dfrac{k}{x}+5$(k는 양의 상수)의 그래프를 x축의 방향으로 $m(m>0)$만큼 평행이동시킨 그래프를 나타내는 함수를 $y=g(x)$라 하자. 두 함수 $f(x)$, $g(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

(가) $g(a)=b$, $g(b)=a$인 서로 다른 두 실수 a, b가 존재한다.
(나) 열린구간 $(0,\ m)$에서 정의된 함수 $\dfrac{1}{f(x)-g(x)}$의 최댓값은 $\dfrac{5}{24}$이다.

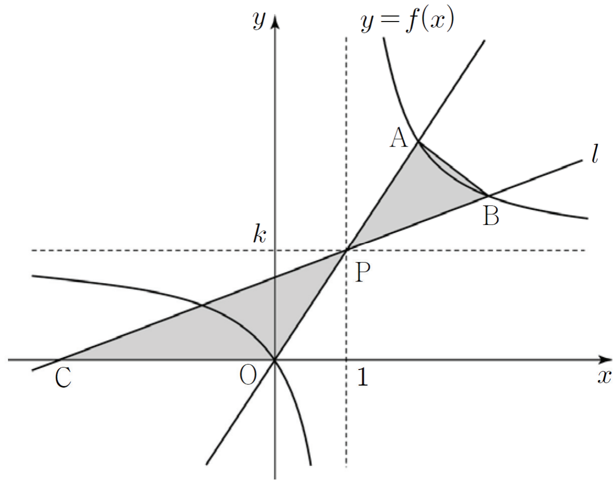
$g(9)$의 값은? [4점]

① $\dfrac{11}{2}$ ② $\dfrac{13}{2}$ ③ $\dfrac{15}{2}$
④ $\dfrac{17}{2}$ ⑤ $\dfrac{19}{2}$

U059

○○○
(2016(9)고2−나형30)

그림과 같이 함수 $f(x)=\dfrac{k}{x-1}+k(k>1)$의 그래프가 있다. 점 $\mathrm{P}(1,\ k)$에 대하여 직선 OP와 함수 $y=f(x)$의 그래프가 만나는 점 중에서 원점이 아닌 점을 A라 하자. 점 P를 지나고 원점으로부터 거리가 1인 직선 l이 함수 $y=f(x)$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 B, x축과 만나는 점을 C라 하자. 삼각형 PBA의 넓이를 S_1, 삼각형 PCO의 넓이를 S_2라 할 때, $2S_1=S_2$이다. 상수 k에 대하여 $10k^2$의 값을 구하시오. (단, O는 원점이고, 직선 l은 좌표축과 평행하지 않다.) [4점]



U060

★★★
(2018(3)고3-나형30)

n이 자연수일 때, 함수 $f(x)=\dfrac{x+2n}{2x-p}$이

$$f(1)<f(5)<f(3)$$

을 만족시키도록 하는 자연수 p의 최솟값을 m이라 하자. 자연수 n에 대하여 $p=m$일 때의 함수 $f(x)$와 함수

$$g(x)=\frac{2x+n}{x+q}\text{이}$$

$$g(f(5))<g(f(3))<g(f(1))$$

을 만족시키도록 하는 자연수 q의 개수를 a_n이라 하자.

$\displaystyle\sum_{k=1}^{20}a_k$의 값을 구하시오. [4점]

U. 무리함수

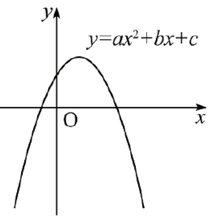
U061

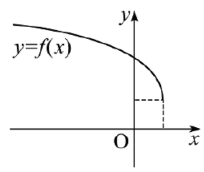
○○
(2008(3)고2-공통10)

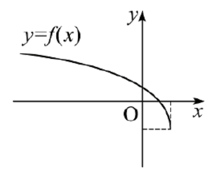
이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프가 오른쪽 그림과 같을 때, 무리함수

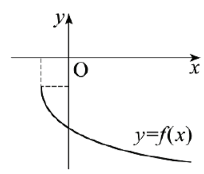
$$f(x)=a\sqrt{-x+b}-c$$

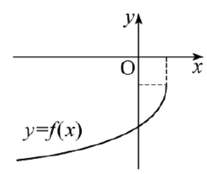
의 그래프의 개형은? (단, a, b, c는 상수이다.) [3점]

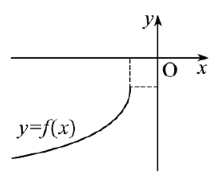


①


②


③


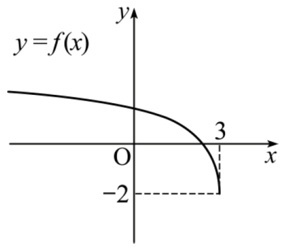
④


⑤


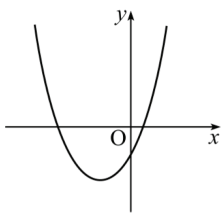
U062

(2006(3)고2-공통13)

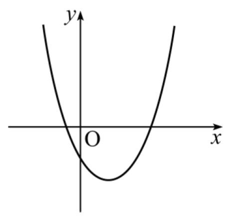
무리함수 $f(x)=a\sqrt{-x+b}+c$의 그래프가 그림과 같을 때, 이차함수 $y=ax^2+bx+c$의 그래프의 개형은? (단, a, b, c는 상수이다.) [3점]



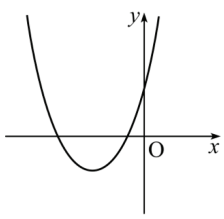
①



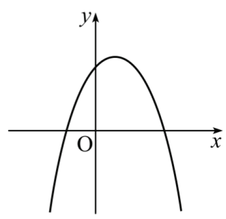
②



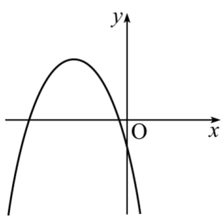
③



④



⑤



U063

(2013(11)고1-공통27)

$3\le x\le 5$에서 정의된 두 함수 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}$와 $y=\sqrt{3x}+k$의 그래프가 한 점에서 만나도록 하는 실수 k의 최댓값을 M이라 할 때, M^2의 값을 구하시오. [4점]

U064

(2015(9)고2-나형19)

두 함수 $f(x)=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k(x\ge 0)$, $g(x)=\sqrt{5x-k}$에 대하여 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 모든 정수 k의 개수는? [4점]

① 5 ② 7 ③ 9
④ 11 ⑤ 13

U065

(2017(3)고2-가형11)

함수 $y=\sqrt{a(6-x)}\,(a>0)$의 그래프와 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프가 만나는 점을 A라 하자. 원점 O와 점 B$(6,\ 0)$에 대하여 삼각형 AOB의 넓이가 6일 때, 상수 a의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

U066

(2009(11)고1–공통8)

무리함수 $f(x)=\sqrt{x-1}+k$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 k의 최댓값은? [3점]

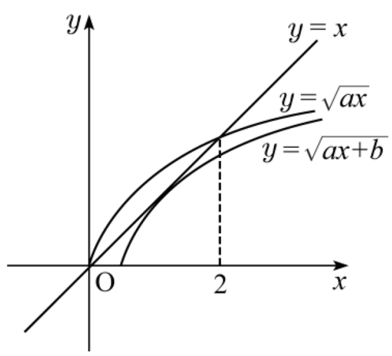
① $\frac{1}{4}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{4}$

④ 1 ⑤ $\frac{5}{4}$

U067

(2010(3)고2–공통18)

그림과 같이 무리함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프와 직선 $y=x$가 만나는 한 점의 x좌표가 2이다. 무리함수 $y=\sqrt{ax+b}$의 그래프가 직선 $y=x$에 접할 때 상수 a, b의 곱 ab의 값은? [4점]



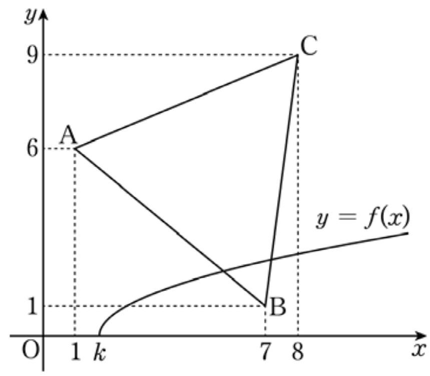
① -4 ② -2 ③ -1

④ $-\frac{1}{2}$ ⑤ $-\frac{1}{4}$

U068

(2016(3)고3–나형15)

무리함수 $f(x)=\sqrt{x-k}$에 대하여 좌표평면에 곡선 $y=f(x)$와 세 점 A$(1,\ 6)$, B$(7,\ 1)$, C$(8,\ 9)$를 꼭짓점으로 하는 삼각형 ABC가 있다. 곡선 $y=f(x)$와 함수 $f(x)$의 역함수의 그래프가 삼각형 ABC와 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은? [4점]



① 6 ② 5 ③ 4

④ 3 ⑤ 2

U069

(2013(3)고2–B형12)

두 집합

$$A=\{(x,\ y) \mid -1\le x\le 1,\ 1\le y\le 3\}$$
$$B=\left\{(x,\ y) \mid y=\sqrt{x-k}\right\}$$

에 대하여 $A\cap B\neq\varnothing$을 만족시키는 실수 k의 최솟값은? [3점]

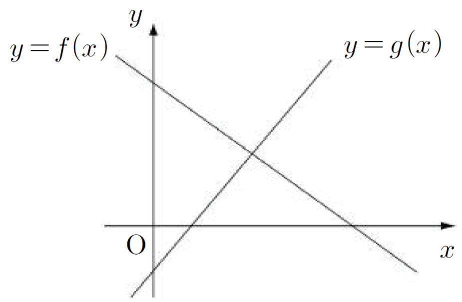
① -10 ② -8 ③ -6

④ -4 ⑤ -2

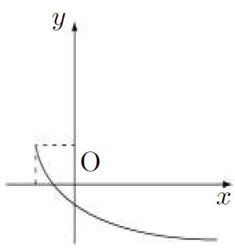
U070

(2006(6)고2-가형10/나형10)

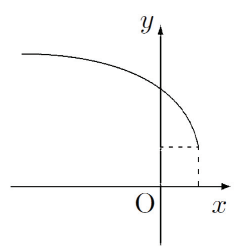
두 일차함수 $f(x)=ax+b$, $g(x)=cx+d$의 그래프의 개형이 그림과 같을 때, 무리함수 $y=a\sqrt{bx+c}+d$의 그래프의 개형은? [3점]



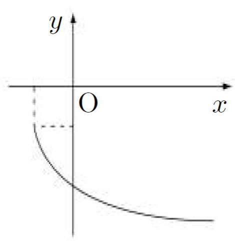
①



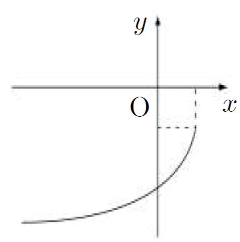
②



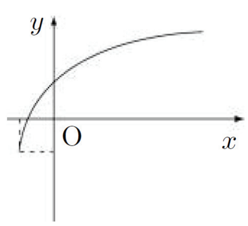
③



④



⑤



U071

(2017(3)고3-나형17)

함수

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{2x} & (x\ge 0)\\ 4x & (x<0)\end{cases}$$

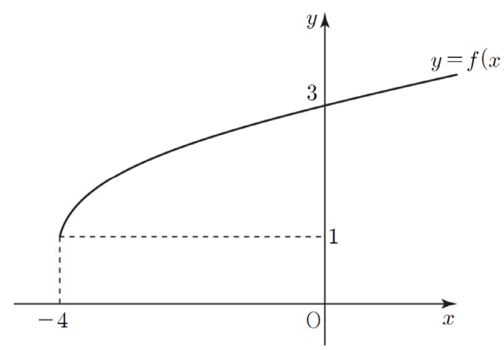
의 역함수 $g(x)$에 대하여 부등식 $g(x)\le -\frac{1}{4}x^2+3$의 해가 $a\le x\le b$일 때, $a+b$의 값은? [4점]

① -2 ② -1 ③ 0
④ 1 ⑤ 2

U072

(2012(11)고1-공통10)

그림은 무리함수 $f(x)=\sqrt{x+a}+b$의 그래프이다.



함수 $y=f(x)$의 그래프와 그 역함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프의 교점이 $(p,\ q)$일 때, $p+q$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $3+\sqrt{15}$ ② $3+3\sqrt{2}$ ③ $3+\sqrt{21}$
④ $3+2\sqrt{6}$ ⑤ $3+3\sqrt{3}$

U073

○○
(2011(11)고1-공통12)

$x \geq 2$에서 정의된 두 함수

$f(x)=\sqrt{x-2}+2$, $g(x)=x^2-4x+6$

의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만난다. 두 점 사이의 거리는? [3점]

① 1　② $\sqrt{2}$　③ 2
④ $2\sqrt{2}$　⑤ 4

U074

○○
(2011(11)고1-공통20)

꼭짓점의 좌표가 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{9}{2}\right)$인 이차함수

$f(x)=ax^2+bx+c$의 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지날 때, 무리함수 $g(x)=a\sqrt{x+b}+c$에 대하여 옳은 것만을 보기에서 있는 대로 고른 것은? [4점]

ㄱ. 정의역은 $\{x \mid x \geq -2\}$이고 치역은 $\{y \mid y \leq 4\}$이다. ㄴ. 함수 $y=g(x)$의 그래프는 제3사분면을 지난다. ㄷ. 방정식 $f(x)=0$의 두 근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라 할 때, $\alpha \leq x \leq \beta$에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 2이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　⑤ㄱ, ㄴ, ㄷ

U075

○○○
(2011(7)고3-가형17)

x에 대한 방정식 $\left|\frac{3x-6}{x-1}\right|=k+\sqrt{k-x}$가 서로 다른 두 실근 α, β를 갖도록 하는 상수 k에 대하여 $\alpha\beta \leq 0$를 만족시키는 k의 최댓값은? [4점]

① 1　② 2　③ 3
④ 4　⑤ 5

U076

○○○
(2018(3)고2-가형20)

좌표평면 위의 두 곡선

$y=-\sqrt{kx+2k}+4$, $y=\sqrt{-kx+2k}-4$

에 대하여 보기에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, k는 0이 아닌 실수이다.) [4점]

ㄱ. 두 곡선은 서로 원점에 대하여 대칭이다. ㄴ. $k<0$이면 두 곡선은 한 점에서 만난다. ㄷ. 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 최댓값은 16이다.

① ㄱ　② ㄴ　③ ㄱ, ㄴ
④ ㄱ, ㄷ　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

U077

○○○
(2016(7)고3-나형12)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$가

$$f(x)=\sqrt{x+1}$$

$$g(x)=\frac{p}{x-1}+q\ (p>0,\ q>0)$$

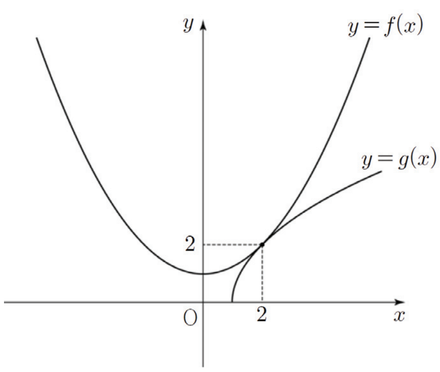
이다. 두 집합 $A=\{f(x)|-1\leq x\leq 0\}$과 $B=\{g(x)|-1\leq x\leq 0\}$이 서로 같을 때, 두 상수 p, q에 대하여 $p+q$의 값은? [3점]

① 1 ② 2 ③ 3
④ 4 ⑤ 5

U078

○○○
(2016(9)고2-가형14)

그림과 같이 두 함수 $f(x)=\frac{1}{4}x^2+1$, $g(x)=\sqrt{4x-4}$의 그래프가 한 점 $(2,\ 2)$에서 만난다. 자연수 k에 대하여 함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-k$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 그래프가 함수 $y=f(x)$의 그래프와 오직 한 점에서만 만나도록 하는 모든 자연수 k의 값의 합은? [4점]



① 6 ② 7 ③ 8
④ 9 ⑤ 10

U079

○○○
(2012(11)고1-공통18)

실수 전체의 집합에서 정의된 함수 f가

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x-2} & (x>3)\\ \sqrt{3-x}+a & (x\leq 3)\end{cases}$$

일 때, 함수 f는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) 함수 f의 치역은 $\{y|y>2\}$이다. (나) 임의의 두 실수 x_1, x_2에 대하여 $x_1\neq x_2$이면 $f(x_1)\neq f(x_2)$이다.

$f(2)f(k)=40$일 때, 상수 k의 값은? (단, a는 상수이다.) [4점]

① $\frac{3}{2}$ ② $\frac{5}{2}$ ③ $\frac{7}{2}$
④ $\frac{9}{2}$ ⑤ $\frac{11}{2}$

V. 경우의 수 (합의 법칙, 곱의 법칙, 수형도)

V001

○○○
(2006(4)고3-가형29이산수학)

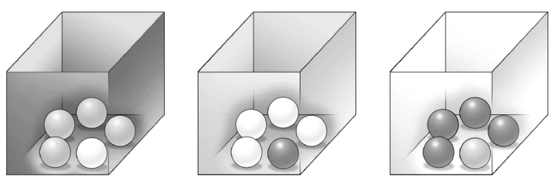
세 자리 자연수 중 101, 121, 954와 같이 1의 자리, 10의 자리, 100의 자리의 수 중에서 어느 하나의 수가 나머지 두 수의 합으로 되어 있는 자연수의 개수는? [4점]

① 100 ② 108 ③ 116
④ 120 ⑤ 126

V002

○○○
(2014(10)고3-A형20)

빨간 공, 파란 공, 노란 공이 각각 5개씩 있다. 이 15개의 공만을 사용하여 빨간 상자, 파란 상자, 노란 상자에 상자의 색과 다른 색의 공을 5개씩 담으려고 한다. 공을 담는 경우의 수는? (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.) [4점]



① 6 ② 12 ③ 18
④ 24 ⑤ 30

V003

○○○
(2016(3)고3-가형29)

집합 $X=\{-3,\ -2,\ -1,\ 1,\ 2,\ 3\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)$는 다음 조건을 만족시킨다.

(가) X의 모든 원소 x에 대하여 $\lvert f(x)+f(-x)\rvert=1$이다.
(나) $x>0$이면 $f(x)>0$이다.

함수 $f(x)$의 개수를 구하시오. [4점]

V. 순열

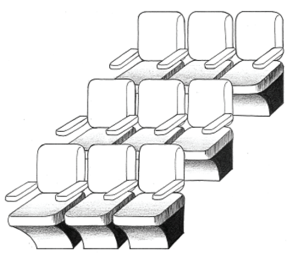
V004
○○
(2006(4)고3-가형26이산수학)

6명의 학생 A, B, C, D, E, F를 일렬로 세울 때, A를 맨 앞에 세우고 B는 A와 이웃하지 않게 세우는 경우의 수는? [3점]

① 24 ② 48 ③ 72
④ 96 ⑤ 120

V005
○○
(2007(7)고3-가형8/나형8)

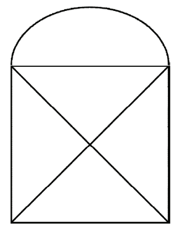
그림과 같은 3좌석씩 3줄인 9개의 좌석에서 남자 5명, 여자 4명이 함께 영화를 관람하려 할 때, 남자끼리 좌우에 이웃하여 앉지 않고, 여자끼리 좌우에 이웃하여 앉지 않는 방법의 수는? [3점]



① $4!\times5!$ ② $2\times3!\times5!$ ③ $3\times4!\times5!$
④ $5!\times6!$ ⑤ $9\times4!\times5!$

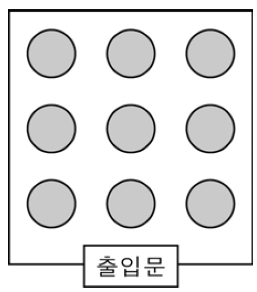
V006
○○
(2007(10)고3-가형24)

그림과 같이 다섯 개의 영역으로 나누어진 도형이 있다. 각 영역에 빨간색, 노란색, 파란색 중 한 가지 색을 칠하는데, 인접한 영역은 서로 다른 색을 칠하여 구별하려고 한다. 칠할 수 있는 방법의 수를 구하시오. [4점]



V007
○○
(2005(10)고3-나형7)

그림과 같이 정사각형 모양으로 배열된 9개의 원형탁자와 세 가지 색 빨강, 파랑, 노랑 보자기가 각각 3개씩 있다. 이 9장의 보자기로 탁자를 하나씩 덮을 때, 어떤 행과 어떤 열에도 같은 색이 놓이지 않도록 덮는 방법의 수는? [3점]



① 6 ② 8 ③ 10
④ 12 ⑤ 14

V008

○○
(2006(3)고3-가형19)

6개의 숫자 1, 2, 3, 5, 7, 9를 이용하여 다섯 자리 자연수를 만들 때 7만 중복하여 사용할 수 있다. 7을 2개 이상 포함하고, 7끼리는 이웃하지 않는 서로 다른 자연수의 개수를 구하시오. [3점]

V009

○○
(2014(3)고2-B형29)

9개의 숫자 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 중에서 서로 다른 3개의 숫자를 택하여 다음 조건을 만족시키도록 세 자리 자연수를 만들려고 한다.

각 자리의 수 중 어떤 두 수의 합도 9가 아니다.

예를 들어 217은 조건을 만족시키지 않는다. 조건을 만족시키는 세 자리 자연수의 개수를 구하시오. [4점]

V010

○○
(2008(3)고3-가형7)

1부터 9까지 9개의 자연수 중에서 서로 다른 세 수를 일렬로 나열하여 세 자리의 자연수를 만들 때, 그 중 각 자리의 수의 곱이 10의 배수인 자연수의 개수는? [3점]

① 60 ② 88 ③ 100
④ 132 ⑤ 144

V011

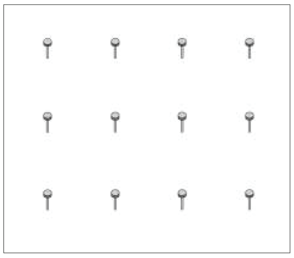
○○
(2011사관(1차)-문과27)

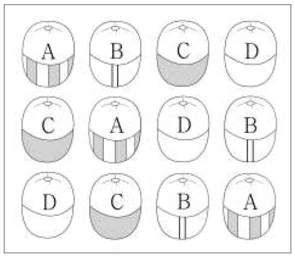
집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 서로 다른 두 원소를 a, b라 하고, 집합 $B=\{6,\ 7,\ 8,\ 9\}$의 서로 다른 두 원소를 c, d라 하자. 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$ 중에서 네 수의 곱 $abcd$가 짝수인 것의 개수를 구하시오. [3점]

V012

○○○
(2009(10)고3-가형25)

서로 다른 네 종류의 모자 A, B, C, D가 각각 3개씩 모두 12개 있다. 12개의 모자를 〈그림1〉과 같이 일정한 간격으로 배열된 12개의 모자걸이에 각각 걸려고 한다. 이때, 모든 가로 방향과 모든 세로 방향에 서로 다른 종류의 모자가 걸리도록 하려고 한다. 〈그림2〉는 이와 같은 방법으로 모자를 건 예이다.


<그림1 >



<그림2 >

이와 같은 방법으로 12개의 모자를 모자걸이에 걸 수 있는 방법의 수를 모두 구하시오. (단, 같은 종류의 모자끼리는 서로 구별하지 않는다.) [4점]

V013

○○○
(2009(4)고3-가형28이산수학)

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 A에서 A로의 일대일대응을 f라 할 때, $|f(1)-f(2)|=1$ 또는 $|f(2)-f(3)|=1$을 만족하는 f의 개수는? [4점]

① 48 ② 56 ③ 64 ④ 78 ⑤ 84

V014

○○○
(2010(10)고3-가형30확률통계)

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$에서 A로의 함수 중에서 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) f는 일대일대응이다.
(나) $|f(1)-f(2)|=|f(2)-f(3)|$

V015

○○○
(2010(10)고3-나형11)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에서 X로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는?

(가) f는 일대일대응이다.
(나) $f(f(1))=1$
(다) $f(2)-f(1)=2$

① 36 ② 40 ③ 44 ④ 48 ⑤ 52

V. 조합

V016

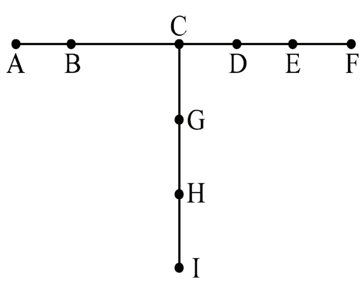
○○
(2008(11)고2-가형29)

남학생 6명과 여학생 2명이 있다. 8명 모두를 2개조로 나누어 A, B 두 구역에 청소를 배정하려고 한다. 각 조에는 적어도 3명을 배정하고, 2명의 여학생은 같은 조에 포함되도록 하는 방법의 수를 m가지라 할 때, m의 값을 구하시오. [4점]

V017

○○
(2005(7)고3-나형20)

그림과 같이 점 C에서 만나는 두 선분 AF, CI 위에 9개의 점이 있다. 이 중 세 점을 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수를 구하시오. [3점]



V018

○○
(2016(3)고3-가형17)

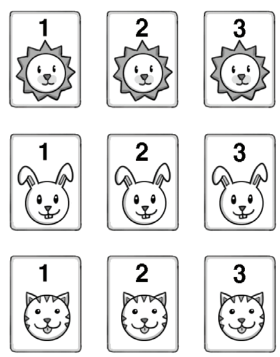
1부터 8까지의 자연수가 각각 하나씩 적혀 있는 8장의 카드 중에서 동시에 5장의 카드를 선택하려고 한다. 선택한 카드에 적혀 있는 수의 합이 짝수인 경우의 수는? [4점]

① 24 ② 28 ③ 32
④ 36 ⑤ 40

V019

○○
(2018(10)고3-나형27)

그림과 같이 숫자 1, 2, 3이 각각 하나씩 적힌 세 가지 그림의 카드 9장이 있다. 이 중에서 서로 다른 5장의 카드를 선택할 때, 숫자 1, 2, 3이 적힌 카드가 적어도 한 장씩 포함되도록 선택하는 경우의 수를 구하시오. (단, 카드를 선택하는 순서는 고려하지 않는다.) [4점]



V020

○○
(2006(11)고2-가형29)

$10<a<b<c<d<20$를 만족하는 자연수 a, b, c, d에 대하여 집합 S를 $S=\{a,\ b,\ c,\ d\}$로 나타낼 때, 집합 S의 개수를 구하시오. [4점]

V021

○○
(2009경찰대(1차)-공통12)

3명의 경위와 8명의 순경이 4명, 4명, 3명으로 나누어 서로 다른 세 순찰차에 탑승하려고 한다. 3명의 경위는 각각 다른 순찰차에 탄다고 할 때, 탑승하는 방법의 수는?

① 3360　② 6720　③ 8400
④ 10080　⑤ 13640

V022

○○○
(2005(10)고3-가형12/나형12)

다음은 서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 조합의 수 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}(r\le n)$에 대한 어떤 성질을 설명하는 과정이다.

> 서로 다른 n개를 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\cdots$, $\boxed{n}$이라 하자.
> (1)
> $\boxed{1}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
> $\boxed{2}$를 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
> $\boxed{3}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
> ⋮
> $\boxed{n}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{(가)}$이다.
> 이상을 모두 합하면 $n\times\boxed{(가)}$이다. …㉠
> (2) 그런데 위의 ㉠에 있는 조합의 수 중에는 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\cdots$, $\boxed{r}$의 r개로 구성된 하나의 조합이 $\boxed{(나)}$번 반복되어 계산되었다.
> (중략)
> (1), (2)로부터 서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 조합의 수 ${}_{n}\mathrm{C}_{r}$는
> ${}_{n}\mathrm{C}_{r}=\boxed{(다)}\times{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

위의 과정에서 (가), (나), (다)에 알맞은 것은? [3점]

	(가)	(나)	(다)
①	${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$	r	$\frac{r}{n}$
②	${}_{n}\mathrm{C}_{r-1}$	r	$\frac{n}{r}$
③	${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$	n	$\frac{r}{n}$
④	${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$	r	$\frac{n}{r}$
⑤	${}_{n}\mathrm{C}_{r-1}$	n	$\frac{r}{n}$

V023

○○○
(2008사관(1차)-문과29)

그림과 같이 4개의 가로줄과 3개의 세로줄로 이루어진 전화기의 숫자판이 있다. 이때, 다음 조건을 모두 만족시키면서 숫자판에 있는 숫자를 누르는 방법의 수를 구하시오. [4점]

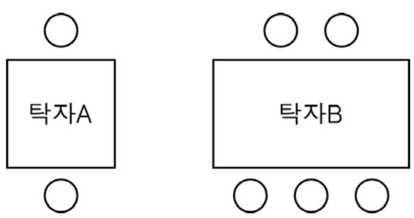
1	2	3
4	5	6
7	8	9
*	0	#

(가) *, #을 제외한 10개의 숫자 중에서 서로 다른 4개의 숫자를 누른다. 이때, 누르는 순서가 다르면 서로 다른 경우이다.
(나) 4개의 가로줄에서는 각각 숫자를 1개씩 누른다.
(다) 1개의 세로줄에서는 숫자를 2개 누르고, 나머지 2개의 세로줄에서는 각각 숫자를 1개씩 누른다.

V024

○○○
(2005(10)고3-가형30확률통계)

탁자 A에서 2명, 탁자 B에서 3명이 분임토의를 하고 있다. 이들 5명이 전체 토의를 하려고 탁자 B의 다섯 자리에 임의로 앉을 때, 탁자 B에서 분임토의를 하던 3명은 모두 처음에 앉았던 자리가 아닌 다른 자리에 앉게 되는 경우의 수를 구하시오. [4점]



V025

○○○
(2016(10)고3-나형28)

다음 조건을 만족시키도록 서로 다른 5개의 바구니에 빨간색 공 3개와 파란색 공 6개를 모두 넣는 경우의 수를 구하시오. (단, 같은 색의 공은 서로 구별하지 않는다.) [4점]

(가) 각 바구니에 공은 1개 이상, 3개 이하로 넣는다.
(나) 빨간색 공은 한 바구니에 2개 이상 넣을 수 없다.

V026

○○○
(2008(4)고3-가형26이산수학)

두 집합
$X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $Y=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$
에 대하여 다음 조건을 모두 만족하는 함수 $f:X \to Y$의 개수는? [3점]

(가) $f(4)=5$
(나) 집합 X의 임의의 두 원소 x_1, x_2에 대하여 $x_1 < x_2$이면 $f(x_1) < f(x_2)$이다.

① 8　② 9　③ 10　④ 11　⑤ 12

V027

○○○
(2007사관(1차)-문과30)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에서 X로의 함수 중에서 다음 조건을 만족하는 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

(가) f의 역함수가 존재한다.
(나) $f(1) \neq 1$
(다) $f(2) \neq f(f(1))$

V028

○○○
(2006(10)고3-가형27확률통계)

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 함수 f는 A에서 A로의 일대일대응이다. 이때, 임의의 $x \in A$에 대하여 $f(f(x))=x$를 만족하는 일대일대응 f의 개수는? [4점]

① 22 ② 26 ③ 30
④ 34 ⑤ 38

V029

○○○
(2017경찰대(1차)-공통7)

집합 $A=\{1,\ 2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$, $C=\{a,\ b,\ c\}$에 대하여 두 함수 $f:A \to B$, $g:B \to C$의 합성함수 $g \circ f:\ A \to C$가 역함수를 갖도록 하는 순서쌍 $(f,\ g)$의 개수는? [4점]

① 108 ② 144 ③ 216
④ 432 ⑤ 864

V030

○○○
(2018경찰대(1차)-공통23)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에서 집합 X로의 함수 $f(x)$가

$$(f \circ f \circ f)(x)=x$$

를 만족시킬 때, 함수 f의 개수를 구하시오. [4점]

V031

(2017(10)고3-가형26)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 $f(x)$가 다음 조건을 만족시킨다.

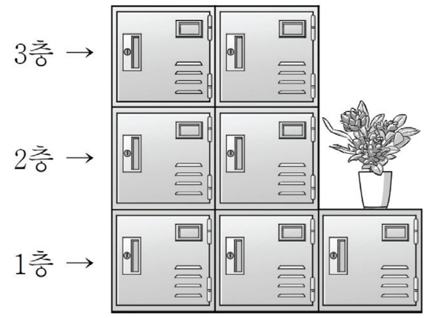
(가) 함수 $f(x)$는 일대일대응이다.
(나) $1 \le n \le 2$일 때, $f(2n) < f(n) < f(3n)$이다.

함수 $f(x)$의 개수를 구하시오. [4점]

V032

(2017(3)고3-가형29)

그림과 같은 7개의 사물함 중 5개의 사물함을 남학생 3명과 여학생 2명에게 각각 1개씩 배정하려고 한다. 같은 층에서는 남학생의 사물함과 여학생의 사물함이 서로 이웃하지 않는다. 사물함을 배정하는 모든 경우의 수를 구하시오. [4점]



V033

●●● (2018(4)고3-가형19)

다음은 1부터 n까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 n개의 공이 들어 있는 주머니에서 임의로 세 개의 공을 동시에 꺼낼 때, 꺼낸 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수를 구하는 과정이다. (단, $n \geq 5$)

> 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우는
> '(i) 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우' 에서
> '(ii) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우' 와
> '(iii) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우' 를 제외하면 된다.
> (i)의 경우:
> n개의 공이 들어 있는 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_{n}\mathrm{C}_{3}$이다.
> (ii)의 경우:
> 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우의 수는 $(n-2)$이다.
> (iii)의 경우:
> 연속되는 두 수 중 하나가 1인 경우의 수는 $\boxed{(가)}$
> 이고, 마찬가지로 연속되는 두 수 중 하나가 n인 경우의 수도
> $\boxed{(가)}$이다.
> 또한 연속되는 두 수 중 어느 하나도 1과 n이 아닌 경우의 수는
> $\boxed{(나)}$이다.
> 따라서 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우의 수는
> $2\times(\boxed{(가)})+\boxed{(나)}$이다.
> (i), (ii), (iii)에 의하여 n개의 공이 들어 있는 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수는 $\boxed{(다)}$이다.

위의 (가), (나), (다)에 알맞은 식을 각각 $p(n)$, $q(n)$, $r(n)$이라 할 때, $\dfrac{p(18)\times q(17)}{r(16)}$의 값은? [4점]

① $\dfrac{15}{2}$ ② 9 ③ $\dfrac{21}{2}$
④ 12 ⑤ $\dfrac{27}{2}$

V034

★★★ (2019경찰대(1차)—공통20)

집합 $X=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$에 대하여 X에서 X로의 함수 중에서 다음 조건을 만족시키는 함수 f의 개수는? [5점]

$$\{(f\circ f)(x)\,|\,x\in X\}\cup\{4,\ 5\}=X$$

① 402 ② 424 ③ 438
④ 456 ⑤ 480

http://orbi.kr

2026

이동훈

기출문제집

- 고1 수학 (평가원/교사경 편)

해설집

저자소개:

연세대 수학과 졸업
고등부 학원 강사 / 대학입시 수학 컨텐츠 개발자
오르비(Orbi)에서 활동 중 (닉네임: 이동훈t)

목차

Q 다항식 (평가원)

1	④	2	⑤	3	③	4	⑤	5	②
6	①	7	12	8	①	9	⑤	10	③
11	②	12	③	13	8	14	11	15	①
16	17	17	21	18	7	19	⑤		

R 방정식과 부등식 (평가원)

1	③	2	③	3	⑤	4	④	5	④
6	①	7	④	8	②	9	①	10	②
11	⑤	12	③	13	③	14	②	15	10
16	9	17	⑤	18	②	19	⑤	20	38
21	④	22	③	23	②	24	⑤	25	①
26	③	27	⑤	28	③	29	3.25	30	①
31	④	32	−11	33	④	34	24	35	①
36	⑤	37	③	38	④	39	④	40	③
41	⑤	42	①	43	①	44	②		

S 도형의 방정식 (평가원)

1	⑤	2	①	3	③	4	⑤	5	①
6	③	7	10	8	③	9	②	10	④
11	⑤	12	④	13	①	14	③	15	17
16	④	17	11	18	④	19	①	20	④
21	①	22	②	23	①	24	①	25	①
26	⑤	27	③	28	2	29	④	30	⑤
31	②	32	②	33	8	34	②	35	③
36	⑤	37	3	38	−3	39	④	40	①
41	③	42	①						

T 집합과 명제 (평가원)

1	③	2	④	3	④	4	③	5	④
6	⑤	7	④	8	⑤	9	④	10	5
11	③	12	①	13	7	14	16	15	②
16	④	17	10	18	7	19	③	20	③
21	①	22	③	23	23	24	8	25	4
26	8	27	24	28	13	29	6	30	13
31	20	32	②	33	⑤	34	15	35	⑤
36	⑤	37	④	38	②	39	③	40	④
41	①	42	②	43	①	44	③	45	⑤
46	④	47	②	48	④	49	5	50	④
51	①	52	⑤	53	⑤	54	⑤	55	④
56	③	57	②	58	①	59	②	60	④

U 함수 (평가원)

1	풀이 참고	2	풀이 참고	3	②	4	④	5	⑤
6	⑤	7	②	8	⑤	9	②	10	⑤
11	②	12	③	13	⑤	14	②	15	④
16	①	17	①	18	①	19	①	20	②
21	④	22	10	23	⑤	24	③	25	5
26	④	27	⑤	28	④	29	−3	30	⑤
31	①	32	④	33	②	34	③	35	5
36	5	37	④	38	14	39	⑤	40	②
41	④	42	10	43	②	44	⑤	45	⑤
46	③	47	①	48	①	49	⑤	50	②
51	④	52	①	53	6	54	3	55	2
56	①	57	①	58	③	59	④		

V 순열과 조합 (평가원)

1	②	2	⑤	3	③	4	⑤	5	③
6	④	7	③	8	32	9	30	10	③
11	②	12	②	13	③	14	48	15	②
16	72	17	④	18	⑤	19	120	20	③
21	①	22	③	23	72	24	64	25	16
26	②	27	11	28	8	29	60	30	③
31	126	32	④	33	35	34	20	35	52
36	④	37	④	38	④	39	200	40	②
41	④	42	⑤	43	⑤	44	②	45	360
46	150	47	③	48	⑤	49	④	50	80
51	25	52	160	53	72	54	③	55	60
56	②	57	30	58	45	59	⑤	60	60
61	①	62	②	63	③	64	81	65	①

T 집합과 명제 (교육청)

1	②	2	432	3	12	4	127	5	④
6	④	7	④	8	③	9	③	10	128
11	③	12	①	13	④	14	⑤	15	④
16	39	17	⑤	18	④	19	⑤	20	168
21	64	22	②	23	17	24	④	25	64
26	16	27	33	28	336	29	⑤	30	②
31	②	32	7	33	②	34	②	35	④
36	④	37	③	38	③	39	③	40	③
41	81	42	13	43	①	44	③	45	256
46	②	47	②	48	12	49	②	50	③
51	④	52	28	53	③	54	②	55	④
56	③	57	17	58	⑤	59	④	60	⑤
61	④	62	⑤	63	③	64	③	65	③
66	③	67	②	68	②	69	④	70	⑤
71	⑤	72	⑤	73	⑤	74	③	75	④
76	⑤	77	⑤	78	28				

U 함수 (교육청)

1	④	2	③	3	②	4	③	5	②
6	5	7	7	8	①	9	④	10	243
11	3	12	④	13	4	14	③	15	③
16	①	17	④	18	③	19	②	20	⑤
21	②	22	17	23	②	24	③	25	28
26	①	27	33	28	③	29	⑤	30	③
31	③	32	③	33	⑤	34	①	35	②
36	①	37	②	38	③	39	⑤	40	12
41	②	42	③	43	①	44	①	45	③
46	②	47	⑤	48	③	49	⑤	50	②
51	②	52	①	53	⑤	54	①	55	⑤
56	③	57	①	58	②	59	20	60	320
61	④	62	①	63	16	64	②	65	②
66	④	67	②	68	②	69	①	70	③
71	①	72	③	73	②	74	③	75	④
76	④	77	④	78	④	79	⑤		

Ⅴ 순열과 조합 (교육청)

1	⑤	2	①	3	64	4	④	5	③
6	36	7	④	8	380	9	336	10	132
11	228	12	576	13	⑤	14	432	15	①
16	82	17	60	18	②	19	108	20	126
21	④	22	④	23	288	24	64	25	450
26	①	27	72	28	②	29	④	30	81
31	18	32	528	33	①	34	③		

Q 다항식 (평가원)

1	④	2	⑤	3	③	4	⑤	5	②
6	①	7	12	8	①	9	⑤	10	③
11	②	12	③	13	8	14	11	15	①
16	17	17	21	18	7	19	⑤		

Q001 | 답 ④

[풀이]

곱셈공식

$A^2 - B^2 = (A+B)(A-B)$

에 의하여

$(125^2 - 75^2) \div \{5 + (30-50) \div (-4)\}$

$= \dfrac{(125+75)(125-75)}{5+5} = 1000$

답 ④

Q002 | 답 ⑤

[풀이]

곱셈공식

$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$

에 의하여 주어진 다항식을 전개하면

$(3x^2 + 2x + 1)^2 = (3x^2)^2 + (2x)^2 + 1^2$

$+ 2 \times 3x^2 \times 2x + 2 \times 2x \times 1 + 2 \times 1 \times 3x^2$

$= 9x^4 + 12x^3 + 10x^2 + 4x + 1$

따라서 주어진 전개식의 x^2의 계수는 10이다.

답 ⑤

Q003 | 답 ③

[풀이]

$a-b$는 다항식

$(1+x+x^2+x^3)^3 - (1+x+x^2+x^3+x^4)^3$

의 x^3의 계수이다.

$1+x+x^2+x^3 = t$로 두면

$(1+x+x^2+x^3)^3 - (1+x+x^2+x^3+x^4)^3$

$= t^3 - (t+x^4)^3$

$= -3t^2x^4 - 3tx^8 - x^{12}$

$-3t^2x^4$, $-3tx^8$, $-x^{12}$의 전개식에서 x^3의 계수는 각각 0이므로

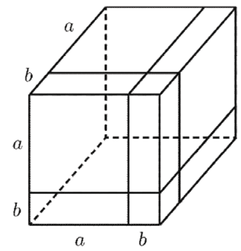
$\therefore\ a - b = 0$

답 ③

Q004 | 답 ⑤

[풀이]

아래는 한 모서리의 길이가 $a+b$인 정육면체의 그림이다.



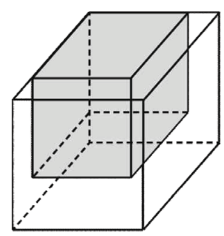
$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad \cdots (*)$

(좌변)=(한 모서리의 길이가 $a+b$인 정육면체의 부피)

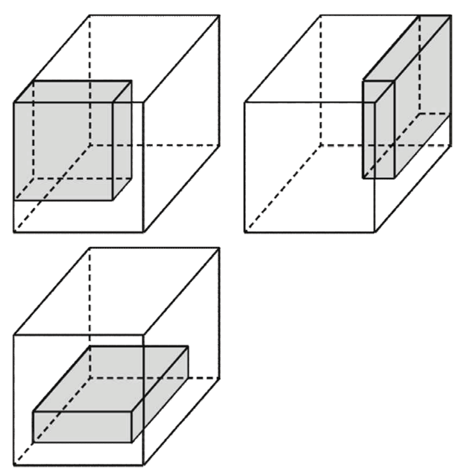
(우변)=(8개의 서로 다른 직육면체의 부피의 합)

우변의 각각의 항 a^3, a^2b, ab^2, b^3에 대응되는 직육면체는 다음과 같다.

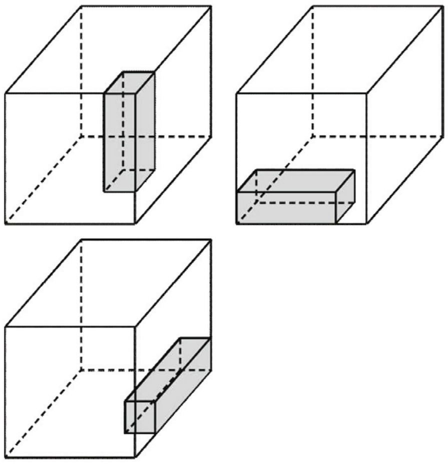
a^3=(한 모서리의 길이가 a인 정육면체의 부피)



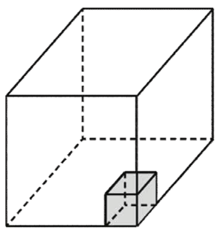
a^2b=(세 모서리의 길이가 각각 a, a, b인 직육면체의 부피)



ab^2=(세 모서리의 길이가 각각 a, b, b인 직육면체의 부피)



$b^3=$(한 모서리의 길이가 b인 정육면체의 부피)



따라서 (*)이 성립함을 보이기 위해서는 서로 다른 4종류의 나무토막이 필요하다. 이때, 필요한 나무토막 전체의 개수는 8이다.

답 ⑤

Q005 | 답 ②

[풀이]

곱셈공식에 의하여

$x^3+y^3=(x+y)^3-3xy(x+y)$

주어진 값을 대입하면

$35=5^3-3\times5\times xy$

정리하면

$\therefore\ xy=6$

답 ②

Q006 | 답 ①

[풀이]

$2x^3+x^2+3x=(x^2+1)(2x+1)+x-1$

$2x^3+x^2+3x$를 x^2+1로 나눈 몫은 $2x+1$이고, 나머지는 $x-1$이다.

답 ①

Q007 | 답 12

[풀이]

문제에서 주어진 나눗셈에 의하면

$(ax+1)x^2=bx^3+x^2$

$2x^3+x^2-(bx^3+x^2)=0$

항등식의 성질에 의하여

$a=2,\ b=2$

문제에서 주어진 나눗셈에 의하면

$c(ax+1)=dx+e$ 즉, $c(2x+1)=dx+e$

$4x+4-(dx+e)=2$

항등식의 성질에 의하여

$c=2,\ d=4,\ e=2$

$\therefore\ a+b+c+d+e=12$

답 12

Q008 | 답 ①

[풀이]

$P(x)=ax^2+bx+c$로 두자.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$P(0)=c=0$

이므로

$P(x)=ax^2+bx$

문제에서 주어진 등식의 좌변을 정리하면

$P(x^2+1)=a(x^2+1)^2+b(x^2+1)$

$=ax^4+(2a+b)x^2+a+b$

문제에서 주어진 등식의 우변을 정리하면

$\{P(x)\}^2+1=(ax^2+bx)^2+1$

$=a^2x^4+2abx^3+b^2x^2+1$

문제에서 주어진 등식은

$ax^4+(2a+b)x^2+a+b$

$=a^2x^4+2abx^3+b^2x^2+1$

항등식의 성질에 의하여

$a=a^2,\ 2ab=0,\ 2a+b=b^2,\ a+b=1$

$a,\ b$에 대한 연립방정식을 풀자.

$a=0$일 때, $b=1$

$a=1$일 때, 위의 네 식을 모두 만족시키는 b는 존재하지 않는다.

따라서 $a=0,\ b=1,\ c=0$이므로

$\therefore\ P(x)=x$

답 ①

Q009 | 답 ⑤

[풀이]

〈증명〉

다항식 $P(x)$를 $x-a$로 나누었을 때의 몫과 나머지를 각각 $Q(x)$, R이라고 하면

$P(x)=\boxed{(x-a)Q(x)}+R$

위의 등식에 $x=a$를 대입하면

$P(a)=\boxed{R}$

(가): $(x-a)Q(x)$

(나): R

답 ⑤

Q010 | 답 ③

[풀이]

나머지정리에 의하여

$f(-2)=9-2a=3$

풀면

$\therefore\ a=3$

답 ③

Q011 | 답 ②

[풀이]

나머지 정리에 의하여

$f(-1)=2-a+b=0$

$\therefore\ a-b=2$

답 ②

Q012 | 답 ③

[풀이]

다항식의 나눗셈에 의하여

$f(x)=(x+2)(x^2+1)+2$

$f(x)$를 $x-2$로 나눈 나머지를 R이라고 하면

나머지 정리에 의하여

$\therefore\ R=f(2)=22$

답 ③

Q013 | 답 8

[풀이]

인수정리에 의하여

$f(-3)+2=0$ 즉, $f(-3)=-2$

다항식 $xf(x)+2$를 $x+3$으로 나눈 나머지를 R이라고 하면

나머지 정리에 의하여

$R=-3f(-3)+2=-3(-2)+2=8$

답 8

Q014 | 답 11

[풀이1]

다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+4x+3$

다항식 $f(2x)$를 $x-1$로 나눈 나머지를 R이라고 하자.

나머지 정리에 의하여

$\therefore\ R=f(2)=4\times2+3=11$

답 11

[풀이2]

다항식 $f(x)$를 $(x-1)(x-2)$로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하면

$f(x)=(x-1)(x-2)Q(x)+4x+3$

x에 $2x$를 대입하면

$f(2x)=(2x-1)(2x-2)Q(2x)+8x+3$

$=2(2x-1)(x-1)Q(2x)+8(x-1)+11$

$=(x-1)\{2(2x-1)Q(2x)+8\}+11$

다항식 $f(2x)$를 $x-1$로 나눈 나머지는 11이다.

답 11

Q015 | 답 ①

[풀이]

다항식 $x^{49}+x^{25}+x^9+x$를 x^3-x로 나누었을 때의 몫을 $Q(x)$,

$R(x)=ax^2+bx+c$라고 하자.

$x^{49}+x^{25}+x^9+x=x(x-1)(x+1)Q(x)+ax^2+bx+c$

양변에 $x=0$을 대입하면

$c=0$ $\cdots$㉠

양변에 $x=1$을 대입하면

$a+b+c=4$ $\cdots$㉡

양변에 $x=-1$을 대입하면

$a-b+c=-4$ $\cdots$㉢

㉠을 ㉡, ㉢에 대입하면

$a+b=4$, $a-b=-4$
a, b에 대한 연립방정식을 풀면
$a=0$, $b=4$
$R(x)$는 $R(x)=4x$
$\therefore\ R(2)=8$
답 ①

Q016 | 답 17

[풀이]
나머지 정리에 의하여
$R_1=f(a)=a^3+a^2+2a+1$
$R_2=f(-a)=-a^3+a^2-2a+1$
주어진 조건에서
$R_1+R_2=2a^2+2=6$ 즉, $a^2=2$
$f(x)$를 $x-a^2$으로 나눈 나머지를 R이라고 하면
나머지 정리에 의하여
$R=f(a^2)=f(2)=17$
답 17

Q017 | 답 21

[풀이]
나머지의 정리에 의하여
$P(1)=3$, $P(-2)=-3$
다항식 $P(x)$를 x^2+x-2로 나눈 몫을 $Q(x)$라고 하자.
나머지 $R(x)$는 일차식이거나 상수이므로
$R(x)=ax+b$(a, b는 상수)
다항식의 나눗셈에 의하여
$P(x)=(x^2+x-2)Q(x)+R(x)$
$=(x+2)(x-1)Q(x)+ax+b$
$x=1$을 대입하면
$P(1)=a+b=3$
$x=-2$를 대입하면
$P(-2)=-2a+b=-3$
a, b에 대한 연립일차방정식을 풀면
$a=2$, $b=1$
$R(x)$의 방정식은
$R(x)=2x+1$
$\therefore\ R(10)=21$
답 21

Q018 | 답 7

[풀이1]
주어진 다항식을 인수분해하면
$x^3+5x^2+10x+6=(x+1)(x^2+4x+6)$
$a=1$, $b=6$
$\therefore\ a+b=7$
답 7

[풀이2]
주어진 조건에 의하여
$x^3+5x^2+10x+6=(x+a)(x^2+4x+b)$
$=x^3+(a+4)x^2+(4a+b)x+ab$
항등식의 성질에 의하여
$a+4=5$, $4a+b=10$, $ab=6$
a, b에 대한 연립방정식을 풀면
$a=1$, $b=6$
$\therefore\ a+b=7$
답 7

[풀이3]
주어진 조건에 의하여
$x^3+5x^2+10x+6=(x+a)(x^2+4x+b)$
(좌변의 x^2의 계수)$=5=a+4=$(우변의 x^2의 계수)
풀면
$a=1$
이를 맨 위의 등식에 대입하면
$x^3+5x^2+10x+6=(x+1)(x^2+4x+b)$
(좌변의 상수항)$=6=b=$(우변의 상수항)
$\therefore\ a+b=7$
답 7

Q019 | 답 ⑤

[풀이]
$\sqrt{3}=x$로 두면
(A블록 1개의 부피)$=x^3$, (B블록 1개의 부피)$=x^2$
(C블록 1개의 부피)$=x$
주어진 12개의 블록을 모두 사용하여 만든 직육면체의 부피를 V라고 하면
$V=x^3+5x^2+6x=x(x+2)(x+3)$
따라서 이 직육면체의 모서리의 길이는 각각
$\sqrt{3}$, $\sqrt{3}+2$, $\sqrt{3}+3$
답 ⑤

R 방정식과 부등식 (평가원)

1	③	2	③	3	⑤	4	④	5	④
6	①	7	④	8	②	9	①	10	②
11	⑤	12	③	13	③	14	②	15	10
16	9	17	⑤	18	②	19	⑤	20	38
21	④	22	③	23	②	24	⑤	25	①
26	③	27	⑤	28	③	29	3.25	30	①
31	④	32	−11	33	④	34	24	35	①
36	⑤	37	③	38	④	39	④	40	③
41	⑤	42	①	43	①	44	②		

R001 | 답 ③

[풀이]

a, b가 음수일 때,

$\sqrt{ab}=-\sqrt{a}\sqrt{b}$

이므로 등호가 잘못 사용된 부분은 ③이다.

답 ③

R002 | 답 ③

[풀이]

주어진 조건에서

$-x^2(x^2-1)^2 \geq 0$

정리하면

$x^2(x^2-1)^2 \leq 0$ ⋯㉠

x가 실수이므로

$x^2 \geq 0$, $(x^2-1)^2 \geq 0$

$x^2(x^2-1)^2 \geq 0$ ⋯㉡

㉠, ㉡에서

$x^2=0$, $(x^2-1)^2=0$

풀면

$x=0$, $x^2=1$

즉, $x=-1$ 또는 $x=0$ 또는 $x=1$

답 ③

R003 | 답 ⑤

[풀이]

곱셈공식에 의하여

$(4+3i)^2-(4-3i)^2$

$=(4+3i+4-3i)(4+3i-4+3i)$

$=8\times 6i=48i$

답 ⑤

R004 | 답 ④

[풀이]

곱셈공식에 의하여

$(2-\sqrt{3}i)(2+\sqrt{3}i)=2^2-(\sqrt{3}i)^2=4-(-3)=7$

답 ④

R005 | 답 ④

[풀이]

$$1+\frac{1}{1-\frac{1}{1+i}}=1+\frac{1}{\frac{i}{1+i}}=1+\frac{1+i}{i}$$

$=1-(i-1)=2-i=a+bi$

a와 b가 실수이므로

$a=2$, $b=-1$

$\therefore\ a+b=1$

답 ④

R006 | 답 ①

[풀이]

$$\frac{a+bi}{b-ai}+\frac{b-ai}{a+bi}=\frac{(a+bi)^2+(b-ai)^2}{(b-ai)(a+bi)}$$

$$=\frac{0}{(b-ai)(a+bi)}=0$$

답 ①

R007 | 답 ④

[풀이]

$z^6=z^3z^3=(1+i)(1+i)=2i$

$\therefore\ (\overline{z})^6=\overline{z^6}=-2i$

답 ④

R008 | 답 ②

[풀이]

$\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\beta+\alpha\overline{\beta}+\beta\overline{\beta}$

$= \alpha(\overline{\alpha} + \overline{\beta}) + \beta(\overline{\alpha} + \overline{\beta})$

$= (\alpha + \beta)(\overline{\alpha + \beta})$

$= (-1 - i)(-1 + i) = 2$

답 ②

R009 | 답 ①

[풀이]

$\dfrac{1+i}{1-i} = \dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)} = \dfrac{2i}{2} = i$

$i^2 = -1$이고 $i^4 = 1$이므로

$\therefore \left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{1998} = i^{1998} = i^{4 \times 499 + 2} = 1^{499} \times i^2 = -1$

답 ①

R010 | 답 ②

[풀이]

$(\sqrt{3} + i)^1 = 2^0(\sqrt{3} + i)$

$(\sqrt{3} + i)^2 = 2(1 + \sqrt{3}i)$

$(\sqrt{3} + i)^3 = (\sqrt{3} + i)^2(\sqrt{3} + i) = 2^2(2i)$

$(\sqrt{3} + i)^4 = (\sqrt{3} + i)^3(\sqrt{3} + i) = 2^3(-1 + \sqrt{3}i)$

$(\sqrt{3} + i)^5 = (\sqrt{3} + i)^4(\sqrt{3} + i) = 2^4(-\sqrt{3} + i)$

$(\sqrt{3} + i)^6 = (\sqrt{3} + i)^5(\sqrt{3} + i) = 2^5(-2)$

이므로

$(\sqrt{3} + i)^{108} = ((\sqrt{3} + i)^6)^{18} = (-2^6)^{18} = 2^{108}$

마찬가지의 방법으로

$(\sqrt{3} - i)^{108} = 2^{108}$

$\therefore (\sqrt{3} + i)^{108} + (\sqrt{3} - i)^{108}$

$= 2^{108} + 2^{108} = 2^{109}$

답 ②

R011 | 답 ⑤

[풀이]

$x^2 - x + 1 = 0$의 한 근이 ω이므로

$\omega^2 - \omega + 1 = 0$

정리하면

$\omega^2 = \omega - 1$

이제 ω^3, ω^4, $\cdots$을 구하면

$\omega^3 = \omega^2\omega = \omega^2 - \omega = -1$

$\omega^4 = \omega^3\omega = -\omega$

$\omega^5 = \omega^4\omega = 1 - \omega$

$\omega^6 = \omega^5\omega = \omega - \omega^2 = 1$

$\vdots$

$\omega^{10} = \omega^6\omega^3\omega = -\omega$

$\omega^{10} + \omega^5 + 1 = 2 - 2\omega$

$\therefore a = -2$

답 ⑤

R012 | 답 ③

[풀이1]

주어진 이차방정식은

$x^2 - ax + 2a - 4 = 0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D = (-a)^2 - 4(2a - 4) = (a - 4)^2 = 0$

$\therefore a = 4$

답 ③

[풀이2]

주어진 이차방정식은

$(x - 2)(x + 2 - a) = 0$

풀면

$x = 2$ 또는 $x = a - 2$

이 이차방정식이 중근을 가져야 하므로

$2 = a - 2$

일차방정식을 풀면

$\therefore a = 4$

답 ③

[풀이3]

곡선 $y = x^2 - 4$에 직선 $y = a(x - 2)$가 접하면 주어진 이차방정식은 중근을 가진다.

그런데 곡선과 직선이 모두 점 $(2, 0)$을 지나므로

곡선 위의 점 $(2, 0)$에서의 접선의 기울기가 a이면 된다.

함수 $y = x^2 - 4$의 도함수는

$y' = 2x$

$\therefore a = y'|_{x=2} = 4$

답 ③

R013 | 답 ③

[풀이]

주어진 등식의 양변에 $ax - c$를 곱하면

$x^2-bx=\dfrac{m-1}{m+1}(ax-c)$

(단, $ax \neq c$, $m \neq -1$)

정리하면

$x^2-\left(b+\dfrac{m-1}{m+1}a\right)x+\dfrac{m-1}{m+1}c=0$

이 이차방정식의 두 근을 α, $-\alpha$로 두자. (단, $\alpha \neq 0$)

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+(-\alpha)=b+\dfrac{m-1}{m+1}a$

즉, $b+\dfrac{m-1}{m+1}a=0$

풀면

$\therefore\ m=\dfrac{a-b}{a+b}$

답 ③

R014 | 답 ②

[풀이]

주어진 등식의 양변에 $ax-c$를 곱하면

$x^2-bx=\dfrac{m-1}{m+1}(ax-c)$

(단, $ax \neq c$, $m \neq -1$)

정리하면

$x^2-\left(b+\dfrac{m-1}{m+1}a\right)x+\dfrac{m-1}{m+1}c=0$

이차방정식의 두 근을 α, $\dfrac{1}{\alpha}$로 두자.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha\times\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{m-1}{m+1}c$ 즉, $\dfrac{m-1}{m+1}c=1$

정리하면

$\therefore\ m=\dfrac{c+1}{c-1}$

답 ②

R015 | 답 10

[풀이1]

문제에서 주어진 이차방정식의 계수는 모두 실수이므로

이 이차방정식의 또 다른 한 근은 $1-2i$이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=(1+2i)+(1-2i)=2=a$

(두 근의 곱)$=(1+2i)(1-2i)=5=b$

$\therefore\ ab=10$

답 10

[풀이2]

$x=1+2i$를 주어진 방정식에 대입하면

$(1+2i)^2-a(1+2i)+b=0$

정리하면

$-a+b-3+(4-2a)i=0$

a, b는 실수이므로

$-a+b-3=0$, $4-2a=0$

연립방정식을 풀면

$a=2$, $b=5$

$\therefore\ ab=10$

답 10

R016 | 답 9

[풀이1]

문제에서 주어진 이차방정식의 계수는 모두 실수이므로

이 이차방정식의 또 다른 한 근은 $b-\sqrt{3}i$이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

(두 근의 합)$=(b+\sqrt{3}i)+(b-\sqrt{3}i)=2b=-6$

(두 근의 곱)$=(b+\sqrt{3}i)(b-\sqrt{3}i)=b^2+3=a$

이므로

$b=-3$, $a=12$

$\therefore\ a+b=9$

답 9

[풀이2]

$b+\sqrt{3}i$가 주어진 이차방정식의 한 근이므로

$(b+\sqrt{3}i)^2+6(b+\sqrt{3}i)+a=0$

정리하면

$(a+b^2+6b-3)+2\sqrt{3}(b+3)i=0$

a, b가 실수이므로

$a+b^2+6b-3=0$ $\cdots$㉠

$2\sqrt{3}(b+3)=0$ $\cdots$㉡

㉡에서 $b=-3$

이를 ㉠에 대입하면 $a=12$

$\therefore\ a+b=9$

답 9

R017 | 답 ⑤

[풀이]

이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 근은 2, 3이다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$2+3=-a$, $2\times3=b$

정리하면

$a=-5$, $b=6$

이차방정식 $ax^2+bx+2=0$의 두 근을 각각 α, β라고 하자.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\therefore\ \alpha+\beta=-\dfrac{b}{a}=\dfrac{6}{5}$

답 ⑤

R018 | 답 ②

[풀이1]

α가 주어진 이차방정식의 한 근이므로

$\alpha^2+7\alpha+1=0$ $\cdots$㉠

β가 주어진 이차방정식의 한 근이므로

$\beta^2+7\beta+1=0$ $\cdots$㉡

㉠+㉡을 하면

$(\alpha^2+\beta^2)+7(\alpha+\beta)+2=0$

$\therefore\ (\alpha^2+\beta^2)+7(\alpha+\beta)=-2$

답 ②

[풀이2]

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-7$, $\alpha\beta=1$

곱셈공식에 의하여

$\therefore\ (\alpha^2+\beta^2)+7(\alpha+\beta)$

$=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+7(\alpha+\beta)=-2$

답 ②

R019 | 답 ⑤

[풀이]

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$, $\alpha\beta=-\dfrac{1}{2}$

곱셈공식에 의하여

$\therefore\ \alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=11$

답 ⑤

R020 | 답 38

[풀이1]

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-5$, $\alpha\beta=7$

곱셈공식에 의하여

$\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=11$

이고, $\alpha^2\beta^2=49$이므로

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

두 근이 α^2과 β^2인 이차방정식은

$x^2-11x+49=0$

$a=-11$, $b=49$이므로

$\therefore\ a+b=38$

답 38

[풀이2]

$x^2+5x+7=0$의 두 근이 α와 β이므로

$\alpha^2+5\alpha+7=0$ 즉, $\alpha=-\dfrac{\alpha^2+7}{5}$

$\beta^2+5\beta+7=0$ 즉, $\beta=-\dfrac{\beta^2+7}{5}$

α^2과 β^2을 두 근으로 갖는 이차방정식은

$\left(-\dfrac{x+7}{5}\right)^2+5\left(-\dfrac{x+7}{5}\right)+7=0$

정리하면

$x^2-11x+49=0$

$a=-11$, $b=49$이므로

$\therefore\ a+b=38$

답 38

R021 | 답 ④

[풀이1]

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=5$, $\alpha\beta=-2$

$\therefore\ \dfrac{1}{\alpha+1}+\dfrac{1}{\beta+1}=\dfrac{\alpha+\beta+2}{\alpha\beta+\alpha+\beta+1}=\dfrac{7}{4}$

답 ④

[풀이2]

$\alpha+1$, $\beta+1$을 두 근으로 갖는 이차방정식은

$(x-1)^2-5(x-1)-2=0$

정리하면

$x^2-7x+4=0$

$\dfrac{1}{\alpha+1}$, $\dfrac{1}{\beta+1}$을 두 근으로 갖는 이차방정식은

$\left(\dfrac{1}{x}\right)^2-7\left(\dfrac{1}{x}\right)+4=0$

정리하면

$x^2-\dfrac{7}{4}x+\dfrac{1}{4}=0$

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\therefore\ \dfrac{1}{\alpha+1}+\dfrac{1}{\beta+1}=\dfrac{7}{4}$

답 ④

R022 | 답 ③

[풀이]

이차방정식

$x^2+(p+q)x+pq-2=0$

의 두 근이 α와 β이므로

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=-(p+q)$, $\alpha\beta=pq-2$

이를 이차방정식

$x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta+2=0$에

대입하면

$x^2+(p+q)x+pq=0$

인수분해하면

$(x+p)(x+q)=0$

풀면

$\therefore\ x=-p$ 또는 $x=-q$

답 ③

R023 | 답 ②

[풀이]

주어진 방정식은

$x^2+(a-2)x-3=0$ $\cdots㉠$

또는

$x^2+(a-2)x-1=0$ $\cdots㉡$

㉠의 두 실근을 α, β라고 하면

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2-a$

㉡의 두 실근을 γ, δ라고 하면

이차방정식의 근과 계수와이 관계에 의하여

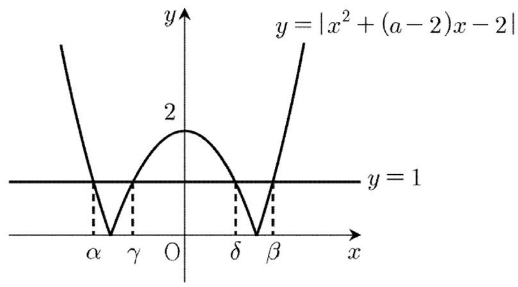
$\gamma+\delta=2-a$

주어진 조건에 의하여

$\alpha+\beta+\gamma+\delta=2(2-a)=0$

풀면

$a=2$



답 ②

R024 | 답 ⑤

[풀이]

〈증명〉

자연수 n에 대하여 a^n-b^n은 $a-b$로 나누어떨어지므로

㉠ (A)에 의하여

$f(a)-f(b)$는 $a-b$로 나누어떨어진다.

($\because$ $f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(단, $a_n\neq0$, a_{n-1}, $\cdots$, a_1, a_0은 정수)로 두면

$f(a)-f(b)$

$=a_n(a^n-b^n)+a_{n-1}(a^{n-1}-b^{n-1})+\cdots+a_1(a-b)$

$=a_n(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+\cdots+b^{n-1})$

$+a_{n-1}(a-b)(a^{n-2}+a^{n-3}b+\cdots+b^{n-2})$

$+\cdots+a_1(a-b)$

이므로 $f(a)-f(b)$는 $a-b$로 나누어떨어진다.)

따라서 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$는 정수이다.

$\dfrac{f(a)}{a-b}$와 $\dfrac{-f(b)}{a-b}$를 두 근으로 하는 이차방정식은 근과 계수와의 관계와

㉡ (B)에 의하여 $x^2-\left(\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}\right)x+1=0$이다.

$\dfrac{f(a)}{a-b}$는

㉢ (A)에 의하여 유리수이고 $\dfrac{f(a)-f(b)}{a-b}$는 정수이므로,

㉣ (C)에 의하여 $\dfrac{f(a)}{a-b}$는 정수이다.

위의 증명 과정에서 밑줄 친 부부 중 (A), (B), (C)를 잘못 이용한 곳은 없다.

답 ⑤

R025 | 답 ①

[풀이]

함수 $f(x)$의 그래프를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동시킨 그래프가 함수 $g(x)$의 그래프와 일치한다고 하자.

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=x^2-2x+a-4$

함수 $g(x)$의 그래프가 x축에 접하므로 방정식

$g(x)=0$ 즉, $x^2-2x+a-4=0$ $\cdots(*)$

은 중근을 갖는다.

이차방정식 (*)의 판별식을 D라고 하면

$D/4=(-1)^2-1\times(a-4)=0$

풀면

$\therefore\ a=5$

답 ①

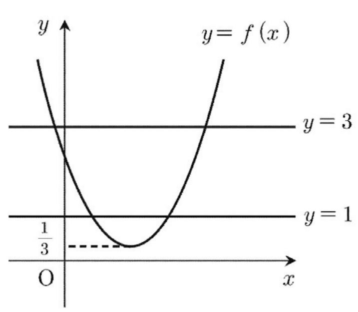
R026 | 답 ③

[풀이]

주어진 방정식을 정리하면

$\{f(x)-1\}\{f(x)-3\}=0$

$f(x)=1$ 또는 $f(x)=3$



함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=1$은 두 점에서 만난다.

이때, 두 교점의 x좌표를 각각 $\alpha_i(i=1,\ 2)$라고 하자.

함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=3$은 두 점에서 만난다.

이때, 두 교점의 x좌표를 각각 $\beta_j(j=1,\ 2)$라고 하자.

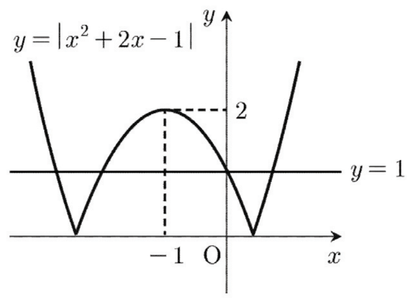
그런데 $\alpha_i\neq\beta_j$이므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 4이다.

답 ③

R027 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $y=|x^2+2x-1|$의 그래프와 직선 $y=1$을 좌표평면 위에 나타내자.



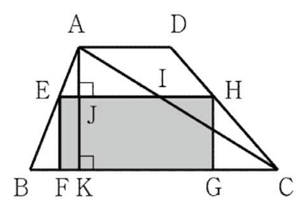
위의 그림에서 함수 $y=|x^2+2x-1|$의 그래프와 직선 $y=1$의 교점의 개수는 4이다.

답 ⑤

R028 | 답 ③

[풀이]

아래 그림처럼 주어진 사다리꼴의 각 꼭짓점을 각각 A, B, C, D라고 하자. 그리고 이 사다리꼴에 내접하는 직사각형의 꼭짓점을 각각 E, F, G, H라고 하자. (단, 두 점 F, G는 선분 BC 위에 있고, 두 점 E, H는 각각 두 선분 AB, CD 위에 있다.) 점 A에서 선분 BC에 내린 수선의 발을 K, 두 선분 AK, EH의 교점을 J, 두 선분 AC, EH의 교점을 I라고 하자.



선분 EF의 길이를 x라고 하자. (단, $0<x<20$)

서로 닮은 두 삼각형 AEI, ABC에 대하여

$\overline{AJ}:\overline{EI}=\overline{AK}:\overline{BC}$

대입하면

$20-x:\overline{EI}=20:40$

정리하면

$\overline{EI}=40-2x$ $\cdots$㉠

서로 닮은 두 삼각형 CIH, CAD에 대하여

$\overline{KJ}:\overline{IH}=\overline{KA}:\overline{AD}$

대입하면

$x:\overline{IH}=20:15$

정리하면

$\overline{IH}=\dfrac{3}{4}x$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\overline{EH}=\overline{EI}+\overline{IH}=-\dfrac{5}{4}x+40$

$(\square\mathrm{EFGH}$의 넓이$)=\overline{\mathrm{EH}}\,\overline{\mathrm{EF}}$

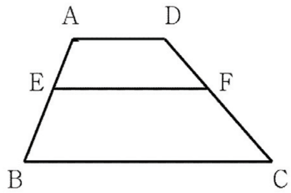
$=-\dfrac{5}{4}x^2+40x$

$=-\dfrac{5}{4}(x-16)^2+320\le 320$

(단, 등호는 $x=16$일 때 성립한다.)

답 ③

[참고]



사다리꼴 ABCD에 대하여 두 점 E, F가 각각 두 선분 AB, DC의 $m:n$ 내분점일 때, 선분 EF의 길이는 다음과 같다.

$\overline{\mathrm{EF}}=\dfrac{m\overline{\mathrm{BC}}+n\overline{\mathrm{AD}}}{m+n}$

R029 | 답 3.25

[풀이1]

$-1\le x\le 1$일 때, $-\dfrac{1}{4}\le x^2-x\le 2$이므로

$-1\le x\le 1$일 때, $x+a\le x^2$이 항상 성립하는

a의 범위는 $a\le-\dfrac{1}{4}$이다.

$-1\le x\le 1$일 때, $-1\le x^2-2x\le 3$

$-1\le x\le 1$일 때, $x^2\le 2x+b$가 항상 성립하는

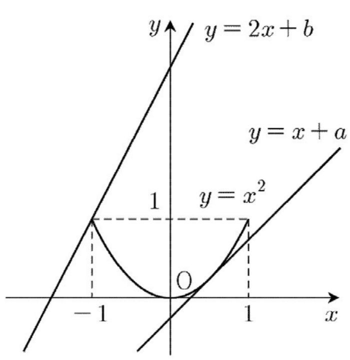
b의 범위는 $b\ge 3$

따라서 $b-a$의 최솟값은

$3-\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{13}{4}=3.25$

답 3.25

[풀이2]



구간 $[-1,\ 1]$에서 직선 $y=2x+b$가 곡선 $y=x^2$ 위에 있을 b의 범위는

$b\ge$(직선 $y=2x+b$가 점 $(-1,\ 1)$을 지날 때의 b의 값)$=3$

구간 $[-1,\ 1]$에서 직선 $y=x+a$가 곡선 $y=x^2$ 아래에 있을 a의 범위는

$a\le$(직선 $y=x+a$가 곡선 $y=x^2$에 접할 때의 a의 값)$=-\dfrac{1}{4}$

따라서 $b-a$의 최솟값은

$3-\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{13}{4}=3.25$

답 3.25

R030 | 답 ①

[풀이]

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d\,(a\ne 0)$라고 하자.

나머지 정리에 의하여

$f(1)+1=0,\ f(2)+1=0,$

$f(-1)-1=0,\ f(-2)-1=0$

대입하면

$f(1)=a+b+c+d=-1$ …㉠

$f(2)=8a+4b+2c+d=-1$ …㉡

$f(-1)=-a+b-c+d=1$ …㉢

$f(-2)=-8a+4b-2c+d=1$ …㉣

㉠+㉢: $b+d=0$

㉡+㉣: $2b+d=0$

b, d에 대한 연립일차방정식을 풀면

$b=d=0$

이를 ㉠, ㉡에 대입하면

$a+c=-1,\ 8a+2c=-1$

a, c에 대한 연립일차방정식을 풀면

$a=\dfrac{1}{6},\ c=-\dfrac{7}{6}$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\dfrac{1}{6}x^3-\dfrac{7}{6}x$

방정식 $f(x)=0$의 세 실근을 각각 α, β, γ라고 하자.

(단, $\alpha<\beta<\gamma$)

방정식 $f(x)=0$의 좌변을 인수분해하면

$\dfrac{1}{6}x(x+\sqrt{7})(x-\sqrt{7})=0$

풀면

$\alpha=-\sqrt{7},\ \beta=0,\ \gamma=\sqrt{7}$

이므로

$\alpha+\beta+\gamma=0$

※ 혹은 삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여 세 근의 합이 0임을 보여도 좋다.

답 ①

R031 | 답 ④

[풀이1]

주어진 방정식에 $x=1+\sqrt{2}i$를 대입하면

$(1+\sqrt{2}i)^3+a(1+\sqrt{2}i)^2+b(1+\sqrt{2}i)-3=0$

복소수의 연산에 의하여

$-a+b-8+(2\sqrt{2}a+\sqrt{2}b+\sqrt{2})i=0$

a와 b가 실수이므로 복소수의 상등에 의하여

$-a+b-8=0,\ 2\sqrt{2}a+\sqrt{2}b+\sqrt{2}=0$

정리하면

$-a+b-8=0,\ 2a+b+1=0$

연립방정식을 풀면

$a=-3,\ b=5$

$\therefore\ ab=-15$

답 ④

[풀이2]

주어진 삼차방정식의 계수가 모두 실수이므로

$1+\sqrt{2}i$의 켤레복소수인 $1-\sqrt{2}i$는

주어진 삼차방정식의 한 근이다.

주어진 삼차방정식의 나머지 한 근을 α라고 하자.

삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha\times(1+\sqrt{2}i)\times(1-\sqrt{2}i)=3$

풀면

$\alpha=1$

주어진 삼차방정식의 세 근은 각각

$1,\ 1+\sqrt{2}i,\ 1-\sqrt{2}i$

삼차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$1+(1+\sqrt{2}i)+(1-\sqrt{2}i)=-a$

$1\times(1+\sqrt{2}i)+(1+\sqrt{2}i)\times(1-\sqrt{2}i)$

$+(1-\sqrt{2}i)\times1=b$

계산하면

$a=-3,\ b=5$

$\therefore\ ab=-15$

답 ④

R032 | 답 −11

[풀이]

주어진 방정식의 한 허근이 ω이므로

$\omega^3=1$ $\cdots$ ㉠

우변을 좌변으로 이항하여 좌변을 인수분해하면

$(\omega-1)(\omega^2+\omega+1)=0$

그런데 $\omega\neq1$이므로

$\omega^2+\omega+1=0$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$$f(1)=\frac{\omega^2}{\omega+1}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$$

$$f(2)=\frac{\omega^4}{\omega^2+1}=\frac{\omega}{-\omega}=-1$$

$$f(3)=\frac{\omega^6}{\omega^3+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$$f(4)=\frac{\omega^8}{\omega^4+1}=\frac{\omega^2}{\omega+1}=\frac{\omega^2}{-\omega^2}=-1$$

$$f(5)=\frac{\omega^{10}}{\omega^5+1}=\frac{\omega}{\omega^2+1}=\frac{\omega}{-\omega}=-1$$

$$f(6)=\frac{\omega^{12}}{\omega^6+1}=\frac{1}{1+1}=\frac{1}{2}$$

$\vdots$

자연수 k에 대하여

$f(3k-2)=f(3k-1)=-1$

$f(3k)=\frac{1}{2}$

$20=6\times3+2$이므로

$\therefore\ f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(20)$

$=6\left(-1-1+\frac{1}{2}\right)-1-1=-11$

답 -11

R033 | 답 ④

[풀이]

(1) $x>y$인 경우

$x\vee y=x$이고 $x\wedge y=y$이므로

주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} x=2x^2+y^2 \\ y=x+y-1 \end{cases}$$

정리하면

$$\begin{cases} 2x^2-x+y^2=0 \\ x=1 \end{cases}$$

풀면

$x=1$, $y^2=-1$

그런데 y는 실수이므로 $y^2 \geq 0$이다.

$x>y$일 때, 문제에서 주어진 연립방정식을 만족시키는 실수 x, y는 존재하지 않는다.

(2) $x<y$인 경우

$x \vee y = y$이고 $x \wedge y = x$이므로

주어진 연립방정식은

$$\begin{cases} y = 2x^2 + y^2 \\ x = x + y - 1 \end{cases}$$

정리하면

$$\begin{cases} 2x^2 + y^2 - y = 0 \\ y = 1 \end{cases}$$

풀면

$x=0$, $y=1$

(1), (2)에서

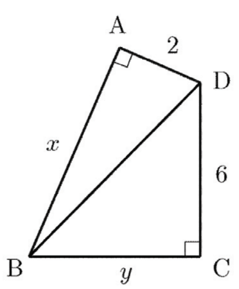
$\therefore\ x+y=1$

답 ④

R034 |답 24

[풀이]

두 선분 $\overline{AB}$, $\overline{BC}$의 길이를 각각 x, y라고 하자.



직각삼각형 ABD에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{BD}^2 = x^2 + 2^2$

직각삼각형 BCD에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{BD}^2 = y^2 + 6^2$

아래와 같은 등식을 얻는다.

$x^2 + 2^2 = y^2 + 6^2$

정리하면

$x^2 - y^2 = 32$

좌변을 인수분해하면

$(x+y)(x-y) = 32$

$32 = 32 \times 1$이므로

$$\begin{cases} x + y = 32 \\ x - y = 1 \end{cases}$$

이 연립방정식을 만족시키는 자연수 x는 존재하지 않는다.

$32 = 16 \times 2$이므로

$$\begin{cases} x + y = 16 \\ x - y = 2 \end{cases}$$

이 연립방정식을 풀면 $x=9$, $y=7$

$32 = 8 \times 4$이므로

$\begin{cases} x + y = 8 \\ x - y = 4 \end{cases}$에서

이 연립방정식을 풀면 $x=6$, $y=2$

$x+y$의 최댓값은 16이다.

따라서 주어진 사각형의 둘레 길이의 최댓값은 24이다.

답 24

R035 |답 ①

[풀이]

주어진 부등식을 풀면

$-b-a \leq x \leq b-a$

주어진 조건에서

$-b-a=-1$, $b-a=2$

위의 두 식을 변변히 곱하면

$\therefore\ a^2-b^2=-2$

답 ①

R036 |답 ⑤

[풀이]

주어진 방정식의 좌변을 전개하면

$x^2+2x-3<5$

정리하면

$x^2+2x-8<0$

좌변을 인수분해하면

$(x+4)(x-2)<0$

풀면

$-4<x<2$

따라서 주어진 부등식을 만족시키는 정수 x는 -3, -2, -1, 0, 1이다.

답 ⑤

R037 |답 ③

[풀이1]

$x-1=t$로 두면 주어진 부등식은

$f(t)<0$

주어진 그림에서

$1<t<3$ 즉, $1<x-1<3$

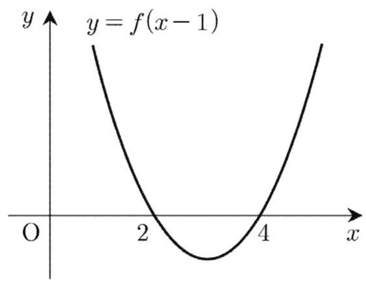
풀면

$\therefore\ 2<x<4$

답 ③

[풀이2]

함수 $f(x)$의 그래프를 x축으로 1만큼 평행이동시키면 함수 $f(x-1)$의 그래프와 일치한다.



문제에서 주어진 부등식을 만족시키는 x의 범위는

$\therefore\ 2<x<4$

답 ③

R038 |답 ④

[풀이]

주어진 일차부등식을 풀면

$x<4$ $\cdots$㉠

주어진 이차부등식의 좌변을 인수분해하면

$(x-5)(x+1)<0$

풀면

$-1<x<5$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $-1<x<4$

따라서 주어진 연립부등식을 만족시키는 정수 x는 0, 1, 2, 3이다.

답 ④

R039 |답 ④

[풀이]

문제에서 주어진 첫 번째 부등식의 좌변을 인수분해하면

$(x+4)(x-2)\le 0$

풀면

$-4\le x\le 2$ $\cdots$㉠

문제에서 주어진 두 번째 부등식의 좌변을 인수분해하면

$(2x-1)(x-3)>0$

풀면

$x<\frac{1}{2}$ 또는 $x>3$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 주어진 연립부등식의 해는

$-4\le x<\frac{1}{2}$이므로 $\alpha=-4$, $\beta=\frac{1}{2}$

$\therefore\ \alpha\beta=-2$

답 ④

R040 |답 ③

[풀이1]

부등식 $x^2+ax+b\le 0$의 해가 $-1\le x\le 3$이므로

방정식 $x^2+ax+b=0$은 서로 다른 두 실근 -1, 3을 갖는다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에서

$(-1)+3=-a$에서 $a=-2$

$(-1)\times 3=b$에서 $b=-3$

부등식 $x^2-ax+b\le 0$은 $x^2+2x-3\le 0$

좌변을 인수분해하면

$(x+3)(x-1)\le 0$

풀면

$\therefore\ -3\le x\le 1$

답 ③

[풀이2]

부등식 $x^2+ax+b\le 0$의 해가 $-1\le x\le 3$이므로

x 대신에 $-t$를 대입하면

부등식 $(-t)^2+a(-t)+b\le 0$의 해는 $-1\le -t\le 3$이다.

정리하면 부등식 $t^2-at+b\le 0$의 해는 $-3\le t\le 1$이다.

따라서 부등식 $x^2-ax+b\le 0$의 해는 $-3\le x\le 1$이다.

답 ③

R041 |답 ⑤

[풀이]

주어진 부등식이 모든 실수 x에 대하여 성립하기 위해서는

$a>0$ $\cdots$㉠

이고 이차방정식

$ax^2-(a-1)x+a=0$ $\cdots$(*)

은 중근을 갖거나 허근을 가져야 한다.

(*)의 판별식을 D라고 하면

$D=(1-a)^2-4\times a\times a\le 0$

정리하면

$(a+1)(3a-1)\ge 0$

풀면 $a \leq -1$ 또는 $a \geq \frac{1}{3}$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서 $a \geq \frac{1}{3}$

따라서 a의 최솟값은 $\frac{1}{3}$이다.

답 ⑤

R042 |답 ①

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x) = a\left(x + \frac{b}{a}\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a}$

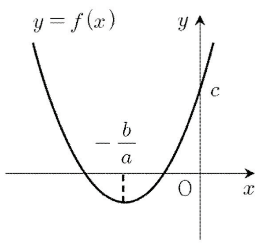
함수 $f(x)$의 꼭짓점의 좌표는

$\left(-\frac{b}{a},\ \frac{ac-b^2}{a}\right)$

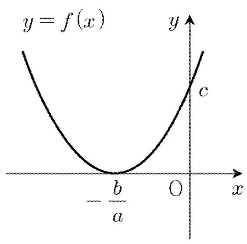
$x \geq 0$인 모든 x에 대하여 $f(x) > 0$이 성립하기 위해서는 $a > 0$이어야 한다.

(1) 함수 $f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 0 보다 작은 경우

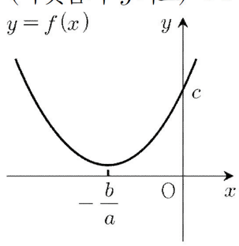
(함수 $f(x)$의 꼭짓점의 x좌표)$= -\frac{b}{a} < 0$



(꼭짓점의 y좌표)< 0



(꼭짓점의 y좌표)$= 0$



(꼭짓점의 y좌표)> 0

위의 그림에서

$f(0) = c > 0$

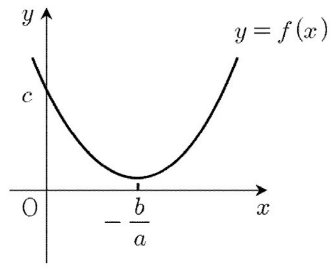
정리하면

$ab > 0,\ c > 0$

하지만 $ac - b^2$의 부호는 결정되지 않는다.

(2) 함수 $f(x)$의 꼭짓점의 x좌표가 0 이상인 경우

(함수 $f(x)$의 꼭짓점의 x좌표)$= -\frac{b}{a} \geq 0$



위의 그림에서

$f(0) = c > 0$

(꼭짓점의 y좌표)$= \frac{ac - b^2}{a} > 0$

a가 양수이므로 $b^2 < ac$

정리하면

$ab \leq 0,\ c > 0,\ b^2 - ac < 0$

(1), (2)에서 항상 옳은 것은 ㄱ뿐이다.

답 ①

R043 |답 ①

[풀이]

$a,\ b,\ c$가 자연수이므로

$abc > 0$

조건 (Ⅰ)에서 주어진 등식의 우변은 양수이다.

만약 $a \leq b$이면 $a^2 \leq b^2$이므로

조건 (Ⅰ)에서 주어진 등식의 좌변은 음수이다.

이는 가정에 모순이므로 $a > b$이다.

마찬가지의 방법으로 $\boxed{a > c}$이다.

$a > b$이고 $\boxed{a > c}$이므로

$2a > b + c$

조건 (Ⅱ)에서 주어진 등식에 의하여

$4a > 2(b + c) = a^2$

정리하면

$a^2 - 4a < 0$

좌변을 인수분해하면

$a(a - 4) < 0$

풀면

$0 < a < 4$

그런데 a는 $\boxed{\text{짝수}}$이므로

$a = \boxed{2}$

이를 조건 (Ⅱ)에 대입하면

$b + c = 2$

$\therefore\ a + b + c = \boxed{4}$

(가): $a > c$ (나): 짝수 (다): 2 (라): 4

답 ①

R044 | 답 ②

[풀이1] ★

• 문제에서 주어진 연립부등식의 해가 존재하면 $a+c<b$가 성립함을 보이자.

이차방정식 $ax^2-bx+c=0$의 두 실근을 각각 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하자.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$$\alpha+\beta=\frac{b}{a}>0,\ \alpha\beta=\frac{c}{a}>0$$

이므로 $\alpha>0$, $\beta>0$이다.

그리고

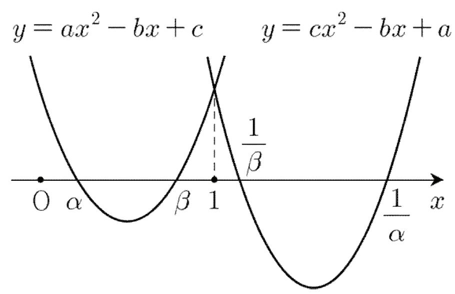
$$a\alpha^2-b\alpha+c=0,\ a\beta^2-b\beta+c=0$$

에서 아래의 두 등식을 유도할 수 있다.

$$c\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2-\frac{b}{\alpha}+a=0,\ c\left(\frac{1}{\beta}\right)^2-\frac{b}{\beta}+a=0$$

이차방정식 $cx^2-bx+a=0$의 두 실근은 각각 $\frac{1}{\alpha}$, $\frac{1}{\beta}$이다.

(1) $0<\alpha<\beta\le 1$인 경우



이차부등식 $ax^2-bx+c<0$의 해는

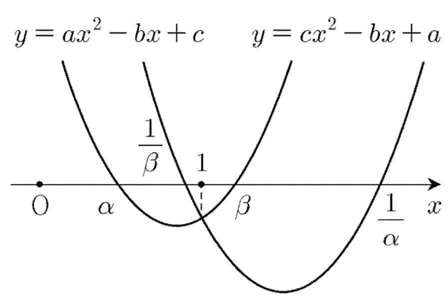
$\alpha<x<\beta$

이차부등식 $cx^2-bx+a<0$의 해는

$\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$

그런데 $\beta\le\frac{1}{\beta}$이므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.

(2) $0<\alpha<1<\beta$인 경우



이차부등식 $ax^2-bx+c<0$의 해는

$\alpha<x<\beta$

이차부등식 $cx^2-bx+a<0$의 해는

$\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$

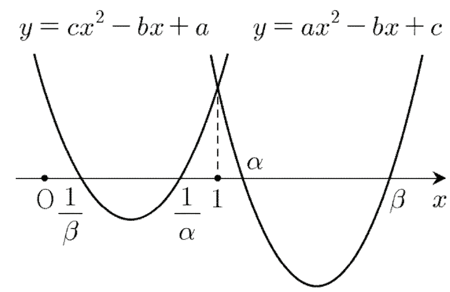
그런데 $\frac{1}{\beta}<\beta$이므로 주어진 연립부등식의 해는

$\frac{1}{\beta}<x<\beta$

위의 해집합은 1을 포함하므로 1을 주어진 연립부등식에 대입하면

$a-b+c<0$ 즉, $a+c<b$

(3) $1\le\alpha<\beta$인 경우



이차부등식 $ax^2-bx+c<0$의 해는

$\alpha<x<\beta$

이차부등식 $cx^2-bx+a<0$의 해는

$\frac{1}{\beta}<x<\frac{1}{\alpha}$

그런데 $\frac{1}{\alpha}\le\alpha$이므로 주어진 연립부등식의 해는 없다.

(1), (2), (3)에서 주어진 연립부등식의 해가 존재하면

$a+c<b$

• $a+c<b$이면 문제에서 주어진 연립부등식의 해가 존재함을 보이자.

$a+c<b$이면 $a-b+c<0$이므로

문제에서 주어진 연립부등식은 1을 해로 갖는다.

이상에서 주어진 연립부등식의 해가 존재하기 위한 필요충분조건은

$a+c<b$

답 ②

[풀이2]

• 문제에서 주어진 연립부등식의 해가 존재하면 $a+c<b$가 성립함을 보이자.

이차방정식 $ax^2-bx+c=0$의 두 실근을 각각 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하자.

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$$\alpha=\frac{b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a},\ \beta=\frac{b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

이차부등식 $ax^2-bx+c<0$을 풀면

$\alpha < x < \beta$

이차방정식 $cx^2 - bx + a = 0$의 두 실근을 각각 γ, $\delta(\gamma < \delta)$라고 하자.

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$$\gamma = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c},\ \delta = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c}$$

이차부등식 $cx^2 - bx + a < 0$을 풀면

$\gamma < x < \delta$

주어진 연립부등식이 해를 갖는 경우는 다음과 같다.

(1) $\alpha < \gamma < \beta < \delta$인 경우

$$\alpha = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \gamma$$

정리하면

$(c - a)(b - \sqrt{b^2 - 4ac}) < 0$

그런데 $b - \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$이므로

$c < a$ $\cdots$㉠

$$\gamma = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} < \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \beta$$

정리하면

$b(a - c) < (a + c)\sqrt{b^2 - 4ac}$

(위의 부등식에서 좌변, 우변 모두 양수이다.)

양변을 제곱하여 정리하면

$ac(a + b + c)(a - b + c) < 0$

그런데 $a > 0$, $c > 0$, $a + b + c > 0$이므로

$b > a + c$ $\cdots$㉡

$$\beta = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \delta$$

정리하면

$(c - a)(b + \sqrt{b^2 - 4ac}) < 0$

그런데 $b + \sqrt{b^2 - 4ac} > 0$이므로

$c < a$ $\cdots$㉢

㉠, ㉡, ㉢에서 $c < a$, $b > a + c$

이때, 주어진 연립부등식의 해는 $\gamma < x < \beta$

(2) $\gamma < \alpha < \delta < \beta$인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로

$a < c$, $b > a + c$

이때, 주어진 연립부등식의 해는 $\alpha < x < \delta$

(3) $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$인 경우

$$\alpha = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \gamma,$$

$$\beta = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \delta$$

에서 $a = c$

주어진 연립부등식은 아래의 부등식과 필요충분조건이다.

$ax^2 - bx + c < 0$(단, $a = c$)

이 이차부등식의 해가 존재하기 위해서는

(판별식)$= (-b)^2 - 4ac > 0$

정리하면

$b^2 - 4a^2 > 0$

좌변을 인수분해하면

$(b + 2a)(b - 2a) > 0$

$b + 2a > 0$이므로 $b > 2a$ 즉, $b > a + c$

이때, 주어진 연립부등식의 해는 $\alpha < x < \beta$

(4) $\gamma < \alpha < \beta < \delta$인 경우

$$\gamma = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} < \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \alpha$$

에서 $a < c$이고,

$$\beta = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \delta$$

에서 $c < a$이므로 가정에 모순이다.

이때, 주어진 연립부등식의 해는 없다.

(5) $\alpha < \gamma < \delta < \beta$인 경우

$$\alpha = \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} < \frac{b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} = \gamma$$

에서 $c < a$이고,

$$\delta = \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2c} < \frac{b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \beta$$

에서 $a < c$이므로 가정에 모순이다.

이때, 주어진 연립부등식의 해는 없다.

(1)~(5)에서 주어진 연립부등식의 해가 존재하면

$a + c < b$

• $a + c < b$이면 문제에서 주어진 연립부등식의 해가 존재함을 보이자.

$a + c < b$이면 $a - b + c < 0$이므로

문제에서 주어진 연립부등식은 1을 해로 갖는다.

이상에서 주어진 연립부등식의 해가 존재하기 위한 필요충분조건은

$a + c < b$

답 ②

S 도형의 방정식 (평가원)

1	⑤	2	①	3	③	4	⑤	5	①
6	③	7	10	8	③	9	②	10	④
11	⑤	12	④	13	①	14	③	15	17
16	④	17	11	18	④	19	①	20	④
21	①	22	②	23	①	24	①	25	①
26	⑤	27	③	28	2	29	④	30	⑤
31	②	32	②	33	8	34	②	35	③
36	⑤	37	3	38	−3	39	④	40	①
41	③	42	①						

S001 | 답 ⑤

[풀이1]

$$\left|\frac{a+b}{2}-a\right|+\left|\frac{a+b}{2}-b\right|$$

$$=\left|\frac{(a+b)-2a}{2}\right|+\left|\frac{(a+b)-2b}{2}\right|$$

$$=\left|\frac{b-a}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|$$

$$=\left|\frac{a-b}{2}\right|+\left|\frac{a-b}{2}\right|$$

$$=2\left|\frac{a-b}{2}\right|=2\frac{|a-b|}{2}=|a-b|$$

답 ⑤

[풀이2]

$\left|\frac{a+b}{2}-a\right|=$(두 점 $\mathrm{P}(a)$, $\mathrm{P}\left(\frac{a+b}{2}\right)$ 사이의 거리)

$\left|\frac{a+b}{2}-b\right|=$(두 점 $\mathrm{P}\left(\frac{a+b}{2}\right)$, $\mathrm{P}(b)$ 사이의 거리)

점 $\mathrm{P}\left(\frac{a+b}{2}\right)$는 두 점 $\mathrm{P}(a)$, $\mathrm{P}(b)$의 중점이므로

$\left|\frac{a+b}{2}-a\right|+\left|\frac{a+b}{2}-b\right|$

$=$(두 점 $\mathrm{P}(a)$, $\mathrm{P}(b)$ 사이의 거리)

$=|a-b|$

답 ⑤

S002 | 답 ①

[풀이]

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{AB}}=\sqrt{(1+4)^2+(5+7)^2}=13$

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(1-5)^2+(5-2)^2}=5$

점 D는 $\angle\mathrm{A}$의 이등분선이 변 BC와 만나는 점이므로

$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}$

즉, $\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DC}}=13:5$

점 D는 선분 $\overline{\mathrm{BC}}$의 $13:5$ 내분점이다.

내분점의 공식에 의하여

$\mathrm{D}\left(\frac{-4\times5+5\times13}{5+13},\ \frac{-7\times5+2\times13}{5+13}\right)$

정리하면

$\mathrm{D}\left(\frac{5}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

답 ①

S003 | 답 ③

[풀이]

곡선 $y=x^2$과 직선 $y=2x+k$가 만나는 두 점 A, B의 x좌표를 각각 α, β라고 하자.

곡선과 직선의 방정식을 연립하면

$x^2=2x+k$

정리하면

$x^2-2x-k=0$

α, β는 이 이차방정식의 서로 다른 두 실근이다.(단, $\alpha<\beta$)

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=2$ ⋯㉠

$\alpha\beta=-k$ ⋯㉡

두 점 A, B의 좌표는 각각

$\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$

내분점의 공식에 의하여

$\mathrm{P}\left(\frac{2\alpha+\beta}{3},\ \frac{2\alpha^2+\beta^2}{3}\right)$

점 P가 y축 위에 있으므로

$\frac{2\alpha+\beta}{3}=0$ 즉, $2\alpha+\beta=0$ ⋯㉢

㉠, ㉢을 연립하면 $\alpha=-2$, $\beta=4$

이를 ㉡에 대입하면 $\therefore\ k=8$

답 ③

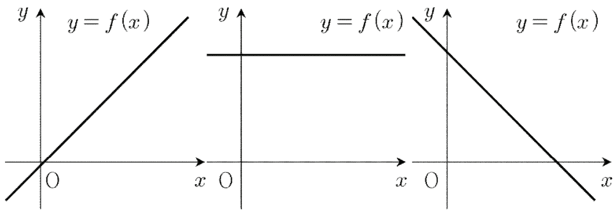
S004 | 답 ⑤

[풀이]

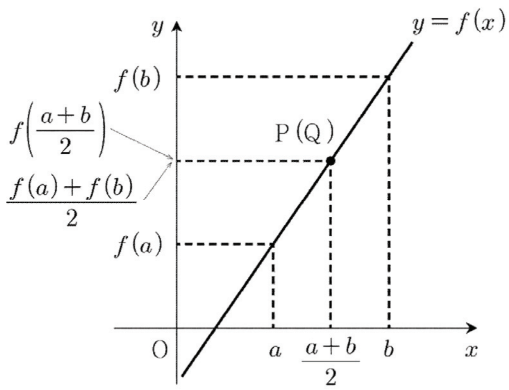
임의의 두 실수 a, b에 대하여 두 점 P, Q를

$\mathrm{P}\left(\frac{a+b}{2},\ f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right)$, $\mathrm{Q}\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{f(a)+f(b)}{2}\right)$

• 함수 $f(x)$가 일차함수이거나 상수함수인 경우



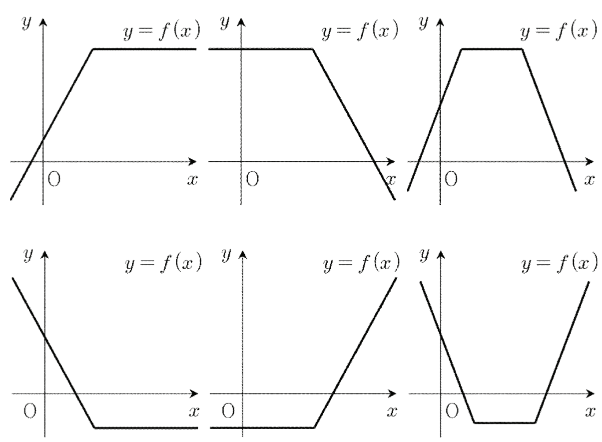
예를 들어 함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.



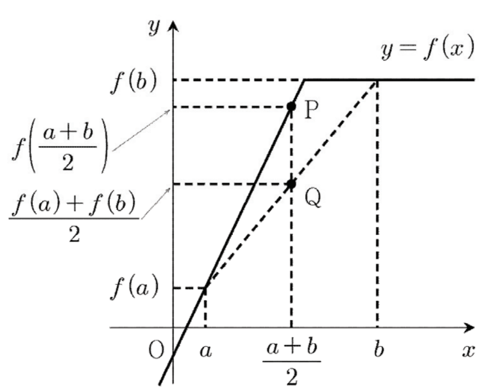
두 점 P, Q는 일치하므로

$f\left(\frac{a+b}{2}\right)=\frac{f(a)+f(b)}{2}$

• 함수 $f(x)$가 어떤 구간에서는 일차함수이고 어떤 구간에서는 상수함수인 경우



예를 들어 함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.
(단, $x \le \alpha$일 때 $f(x)$는 일차함수이고
$x > \alpha$일 때 $f(x)$는 상수함수이다.)

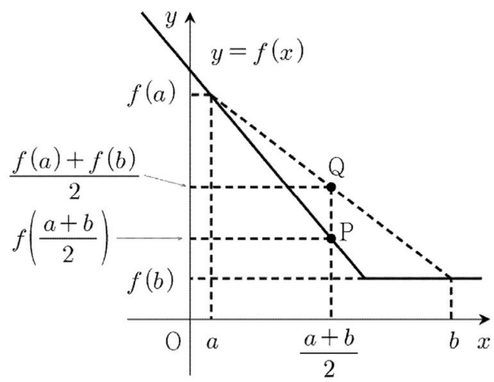


점 P의 y좌표가 점 Q의 y좌표보다 크거나 같으므로

$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge \frac{f(a)+f(b)}{2}$

(단, 등호는 $a=b$이거나 a와 b가 모두 α 이하이거나 a와 b가 모두 α 이상일 때 성립한다.)

예를 들어 함수 $f(x)$의 그래프가 아래와 같다고 하자.
(단, $x \le \beta$일 때 $f(x)$는 일차함수이고
$x > \beta$일 때 $f(x)$는 상수함수이다.)

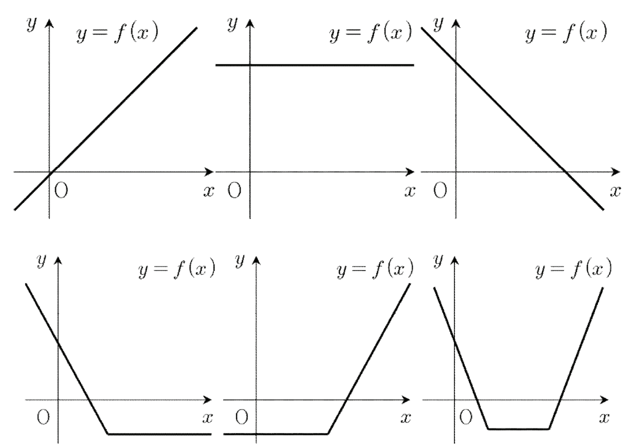


점 P의 y좌표가 점 Q의 y좌표보다 작거나 같으므로

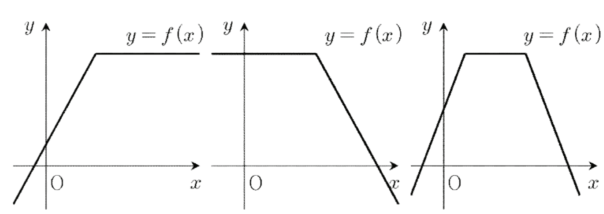
$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$

(단, 등호는 $a=b$이거나 a와 b가 모두 β 이하이거나 a와 b가 모두 β 이상일 때 성립한다.)

함수 $f(x)$의 그래프로 가능한 것은



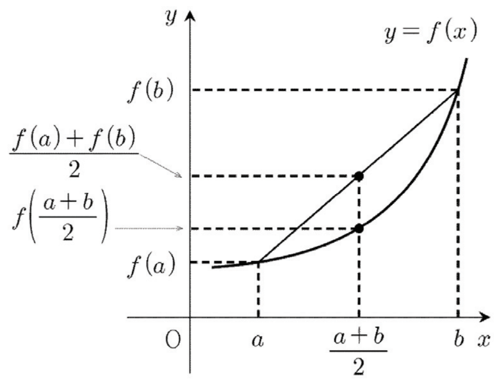
함수 $f(x)$의 그래프로 불가능한 것은



답 ⑤

[참고1]

• 함수 $f(x)$가 아래로 볼록인 경우

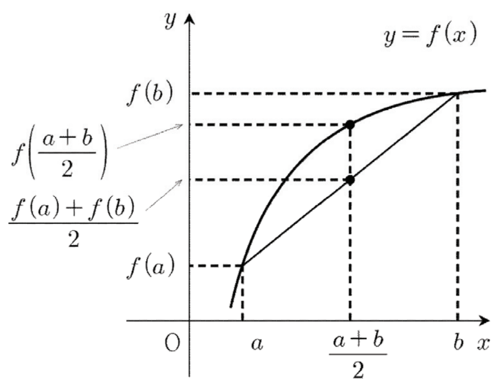


모든 실수 a, b에 대하여

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

- 함수 $f(x)$가 위로 볼록인 경우



모든 실수 a, b에 대하여

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \ge \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

[참고2]

다음의 두 조건이 성립할 때, $f(x)$는 일차함수임을 보이자.

(가) $f(x)$는 다항함수이다.

(나) 모든 실수 a, b에 대하여

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f(a)+f(b)}{2} \qquad \cdots (*)$$

함수 $f(x)$를 다음과 같이 두자.

$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0$

(단, $a_n \ne 0$)

$((*)$의 좌변$)=a_n\left(\frac{a+b}{2}\right)^n+\cdots+a_0$

$=\frac{a_n}{2^n}a^n+\cdots+a_0$

$((*)$의 우변$)=\frac{a_n}{2}(a^n+b^n)+\cdots+\frac{a_0+b_0}{2}$

항등식의 성질에 의하여

$\frac{a_n}{2^n}=\frac{a_n}{2}$이므로 $n=1$

따라서 $f(x)$는 일차함수이다.

[참고3] +미적분2(미분법)

실수 전체의 집합에서 함수 $f(x)$가 이계도함수를 갖는다고 하자.

함수 $f(x)$가 위로 볼록이면 모든 실수 x에 대하여

$f''(x)<0$

함수 $f(x)$가 아래로 볼록이면 모든 실수 x에 대하여

$f''(x)>0$

모든 실수 x에 대하여 $f''(x)=0$이면

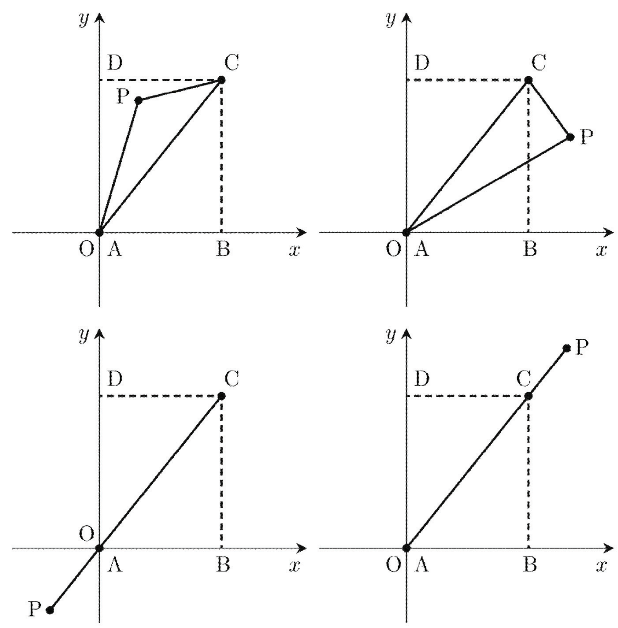
$f(x)$는 일차함수이거나 상수함수이다.

S005 | 답 ①

[풀이]

우선 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PC}}$의 길이가 최소가 되는 점 P의 위치를 결정하자.

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PC}}$의 길이가 최소가 되는 점 P가 선분 AC 위에 없다고 가정하자.



선분 AC 위의 임의의 점을 Q라고 하면

$\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PC}}>\overline{\mathrm{QA}}+\overline{\mathrm{QC}}=\overline{\mathrm{AC}}$

이므로 가정에 모순이다.

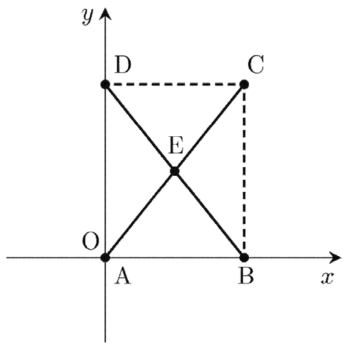
따라서 $\overline{\mathrm{PA}}+\overline{\mathrm{PC}}$의 길이가 최소가 되는 점 P는 선분 AC 위에 있다.

마찬가지의 방법으로

$\overline{\mathrm{PB}}+\overline{\mathrm{PD}}$의 길이가 최소가 되는 점 P는 선분 BD 위에 있다.

두 선분 $\overline{AC}$, $\overline{BD}$의 교점을 E라고 하자.

점 P가 점 E 위에 있을 때, $\overline{PA}+\overline{PB}+\overline{PC}+\overline{PD}$의 길이는 최소가 된다.



내분점의 공식에 의하여 점 E의 좌표를 구하면

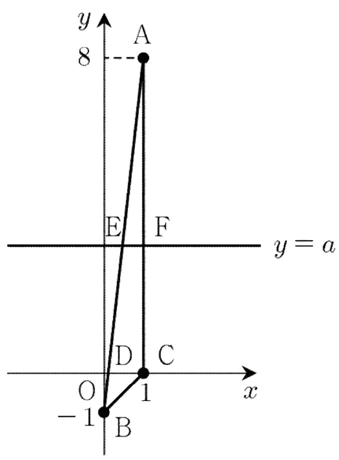
$E\left(2,\ \frac{5}{2}\right)$

답 ①

S006 | 답 ③

[풀이]

직선 AB가 x축과 만나는 점을 D, 직선 $y=a$가 두 직선 AB, AC와 만나는 점을 각각 E, F라고 하자.



삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

(△ADC의 넓이):(△DBC의 넓이)

$=\frac{1}{2}\times\overline{DC}\times|$점 A의 y좌표$|:\frac{1}{2}\times\overline{DC}\times|$점 B의 y좌표$|$

$=|$점 A의 y좌표$|:|$점 B의 y좌표$|$

$=8:1$

이므로 $a>0$이어야 한다.

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

(△ABC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{AC}\times|$점 C의 x좌표$|=4$

주어진 조건에 의하여

(△AEF의 넓이)$=2=\frac{1}{2}\times$(△ABC의 넓이)

직선 AB의 방정식은

$y=9x-1$

직선 AB의 방정식과 직선 $y=a$의 방정식을 연립하면

$x=\frac{a+1}{9}$(단, $0<a<8$)

두 점 E, F의 좌표는

$E\left(\frac{a+1}{9},\ a\right)$, $F(1,\ a)$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

(△AEF의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{EF}\times\overline{AF}$

$=\frac{1}{2}\times\frac{8-a}{9}\times(8-a)=2$

정리하면

$\frac{1}{18}(8-a)^2=2$

a에 대한 이차방정식을 풀면

$\therefore\ a=2$

답 ③

[참고]

도형의 닮음비를 이용하여 삼각형 AEF의 넓이를 구할 수도 있다.

직선 AB의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$0=9x-1$ 풀면 $x=\frac{1}{9}$

점 D의 좌표는 $D\left(\frac{1}{9},\ 0\right)$

서로 닮은 두 직각삼각형 AEF, ADC에 대하여

$\overline{EF}:\overline{FA}=\overline{DC}:\overline{CA}$

대입하면

$\overline{EF}:8-a=\frac{8}{9}:8$ 즉, $\overline{EF}=\frac{8-a}{9}$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

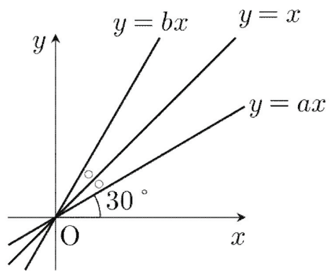
(△AEF의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{EF}\times\overline{AF}=\frac{1}{18}(8-a)^2$

S007 | 답 10

[풀이]

두 직선 $y=ax$, $y=bx$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 $a\neq b$이다.

(1) $a<b$인 경우



(단, 위의 그림에서 ○는 15° 이다.)
두 직선 $y=ax$, $y=bx$가 이루는 예각의 크기는 30° 이므로 두 직선 $y=ax$, $y=x$가 이루는 예각의 크기는 15° $\left(=30^\circ\times\dfrac{1}{2}\right)$이다.

직선 $y=x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 45° 이므로 직선 $y=ax$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 30° (= 45° − 15°)이다.

$a=\tan 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

직선 $y=x$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 45° 이므로 직선 $y=bx$가 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기는 60° (= 45° + 15°)이다.

$b=\tan 60^\circ=\sqrt{3}$

$3(a^2+b^2)=3\left(\dfrac{1}{3}+3\right)=10$

(2) $a>b$인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로 $3(a^2+b^2)=10$

(1), (2)에 의하여

$\therefore\ 3(a^2+b^2)=10$

답 10

S008 | 답 ③

[풀이1]
주어진 식의 좌변을 k에 대하여 내림차순으로 정리하면

$(x-1)k^2+(2x-y)k+x-1=0$

항등식의 성질에 의하여

$x-1=0$, $2x-y=0$

연립방정식을 풀면

$x=1$, $y=2$

문제에서 주어진 직선이 실수 k의 값에 관계없이 지나는 점은 $(1,\ 2)$

이 점을 지나면서 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3(x-1)+2$

정리하면 $y=3x-1$

답 ③

[풀이2]
문제에서 주어진 직선의 방정식에 $k=0$을 대입하면

$x=1$

문제에서 주어진 직선의 방정식에 $k=-1$을 대입하면

$y=2$

두 직선 $x=1$과 $y=2$의 교점은 $(1,\ 2)$이다.

따라서 문제에서 주어진 직선이 실수 k의 값에 관계없이 지나는 점은 $(1,\ 2)$이다.

점 $(1,\ 2)$를 지나면서 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3(x-1)+2$ 정리하면 $y=3x-1$

답 ③

[풀이3]
주어진 직선이 실수 k의 값에 관계없이 지나는 점을 A라고 하자.

(1) $k=0$인 경우

주어진 직선의 방정식은 $x=1$

이 직선은 y축에 평행하므로 기울기를 갖지 않는다.

(2) $k\neq 0$인 경우

주어진 직선의 방정식을 정리하면

$y=\dfrac{(k+1)^2}{k}x-\dfrac{k^2+1}{k}$

이 직선의 기울기가 3이면

$\dfrac{(k+1)^2}{k}=3$

정리하면 $k^2+1=k$에서 $\dfrac{k^2+1}{k}=1$

따라서 점 A를 지나고 기울기가 3인 직선의 방정식은

$y=3x-1$

답 ③

S009 | 답 ②

[풀이]
점 P가 1초에 1만큼씩 움직인다고 가정해도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

시각 t에서의 점 P의 y좌표를 $y(t)$라고 하면

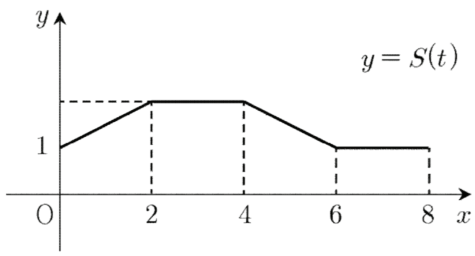
$$y(t)=\begin{cases}2+t & (0\le t<2)\\ 4 & (2\le t<4)\\ 8-t & (4\le t<6)\\ 2 & (6\le t\le 8)\end{cases}$$

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S(t)=(\triangle\mathrm{OPQ}\text{의 넓이})=\dfrac{1}{2}\times(\text{점 P의 }y\text{좌표})$

$$=\begin{cases} 1+\dfrac{t}{2} & (0 \le t < 2) \\ 2 & (2 \le t < 4) \\ 4-\dfrac{t}{2} & (4 \le t < 6) \\ 1 & (6 \le t \le 8) \end{cases}$$

함수 $S(t)$의 그래프는



답 ②

S010 | 답 ④

[풀이]

5개의 점 A, B, C, D, E의 좌표가 각각

A$(-4,\ 3)$, B$(-5,\ -3)$, C$(2,\ -1)$,

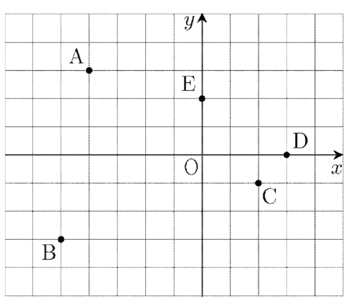
D$(3,\ 0)$, E$(0,\ 2)$

'가', '나', '다', '라', '마'의 좌표가 각각

가$(-3,\ 0)$, 나$(-2,\ -2)$, 다$\left(-1,\ -\dfrac{3}{2}\right)$,

라$(0,\ 0)$, 마$(-1,\ 1)$

이 되도록 좌표평면을 도입해도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.



좌표평면에서 도매상점에 대응되는 점을 P$(x,\ y)$라고 하자.

- 점 P가 '나'인 경우

$|A|=14,\ |B|=12,\ |C|=10,\ |D|=14,\ |E|=12$

이므로 $|A|+|B|+|C|+|D|+|E|=62$

- 점 P가 '나'가 아닌 경우

$|A|=2|x+4|+2|y-3|$

$|B|=2|x+5|+2|y+3|$

$|C|=2|x-2|+2|y+1|$

$|D|=2|x-3|+2|y|$

$|E|=2|x|+2|y-2|$

이므로

$|A|+|B|+|C|+|D|+|E|$

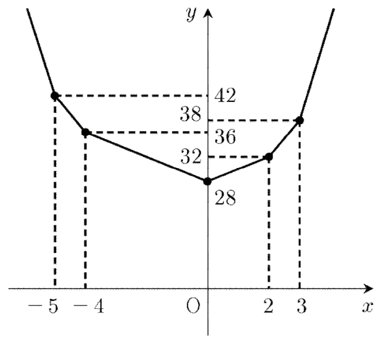
$=2|x+4|+2|x+5|+2|x-2|+2|x-3|+2|x|$

$+2|y-3|+2|y+3|+2|y+1|+2|y|+2|y-2|$

함수

$y=2|x+4|+2|x+5|+2|x-2|+2|x-3|+2|x|$

의 그래프는



위의 그림에서

$2|x+4|+2|x+5|+2|x-2|+2|x-3|+2|x|$

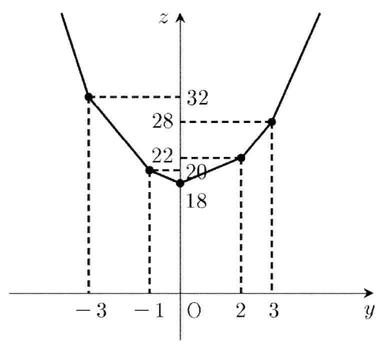
≥ 28

(단, 등호는 $x=0$일 때 성립한다.)

함수

$z=2|y-3|+2|y+3|+2|y+1|+2|y|+2|y-2|$

의 그래프는



위의 그림에서

$2|y-3|+2|y+3|+2|y+1|+2|y|+2|y-2|$

≥ 18

(단, 등호는 $y=0$일 때 성립한다.)

$|A|+|B|+|C|+|D|+|E| \ge 46$

(단, 등호는 $x=0,\ y=0$일 때 성립한다.)

이상에서 점 P가 '라'이면 문제에서 주어진 식의 값은 최소가 된다.

답 ④

S011 | 답 ⑤

[풀이1]

$a=3$이라고 하면 문제에서 주어진 두 직선의 방정식은 각각

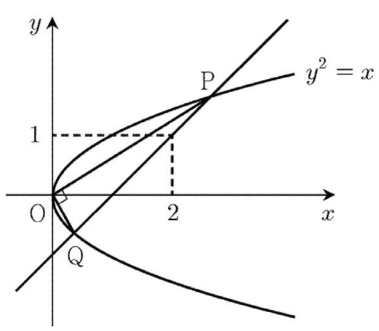
$y=-3x+1,\ x=\dfrac{1}{3}$

두 직선은 서로 수직으로 만나지 않는다.
따라서 $a \neq 3$이다.
$a \neq 3$일 때, 두 직선의 기울기는 각각
$-a$, $\frac{3}{3-a}$
두 직선이 서로 수직으로 만나므로
$-a \times \frac{3}{3-a} = -1$
풀면
$\therefore\ a = \frac{3}{4}$
답 ⑤

[풀이2] +기하와 벡터(벡터의 내적)
문제에서 주어진 두 직선의 법선벡터를 각각
$\overrightarrow{n_1} = (a,\ 1)$, $\overrightarrow{n_2} = (3,\ a-3)$
문제에서 주어진 두 직선이 서로 수직으로 만나므로
$\overrightarrow{n_1} \cdot \overrightarrow{n_2} = (a,\ 1) \cdot (3,\ a-3) = 4a - 3 = 0$
풀면
$\therefore\ a = \frac{3}{4}$
답 ⑤

S012 | 답 ④

[풀이]



직선 PQ의 기울기를 m이라고 하자.
직선 PQ의 방정식은
$y = m(x-2)+1$
직선 PQ의 방정식을 주어진 포물선의 방정식과 연립하면
$y = m(y^2-2)+1$
정리하면
$my^2 - y - 2m + 1 = 0$ $\cdots(*)$
두 점 P, Q의 좌표를 각각
$\mathrm{P}(y_1^2,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(y_2^2,\ y_2)$
(단, $y_1 > 0$, $y_2 < 0$)

(직선 OP의 기울기)$= \frac{1}{y_1}$
(직선 OQ의 기울기)$= \frac{1}{y_2}$
주어진 조건에서 두 직선 OP와 OQ가 이루는 각의 크기는 90° 이므로
$\frac{1}{y_1} \times \frac{1}{y_2} = -1$ 즉, $y_1 y_2 = -1$
이차방정식 (*)의 두 실근이 y_1, y_2이므로
이차방정식의 근과 계수와의 관계에서
$y_1 y_2 = \frac{-2m+1}{m} = -1$
풀면
$m = 1$
따라서 직선 PQ의 방정식은
$y = x - 1$
답 ④

S013 | 답 ①

[풀이]
직선 BC를 x축, BC변의 수직이등분선을 y축으로 잡고,
$\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(-c,\ 0)$, $\mathrm{C}(c,\ 0)$라고 하자.
(단, $b \neq 0$, $c > 0$)
(1) $a \neq c$이고 $a \neq -c$일 때,
직선 AC의 기울기는 $\frac{b}{a-c}$이므로, 변 AC의 중점 E를 지나고 변 AC에 수직인 직선의 방정식은
$y = \boxed{\frac{c-a}{b}}\left(x - \frac{a+c}{2}\right) + \frac{b}{2}$
$= \boxed{\frac{c-a}{b}}x + \boxed{\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}}$ $\cdots$ ㉠
같은 방법으로, 변 AB의 중점 D를 지나고 변 AB에 수직인 직선의 방정식은
$y = -\frac{a+c}{b}x + \boxed{\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}}$ $\cdots$ ㉡
두 직선 ㉠, ㉡의 y절편이 같으므로 세 변의 수직이등분선은 y축 위의 점 $\left(0,\ \boxed{\frac{a^2+b^2-c^2}{2b}}\right)$에서 만난다.
따라서 △ABC의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.
(2) $a = c$ 또는 $a = -c$일 때,
△ABC는 $\boxed{\text{직각삼각형}}$이므로, 세 변의 수직이등분선은 D 또는 E에서 만난다.
(1), (2)에서 △ABC의 세 변의 수직이등분선은 한 점에서 만난다.

(가): $-\dfrac{a-c}{b}$

(나): $\dfrac{a^2+b^2-c^2}{2b}$

(다): 직각삼각형

답 ①

S014 | 답 ③

[풀이1]

문제에서 주어진 두 점을 지나는 직선의 방정식은

$x+y-4=0$

이 직선과 원점 사이의 거리를 d라고 하자.

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

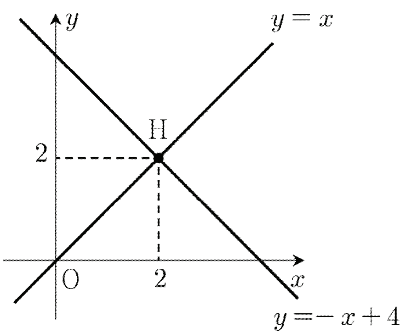
$$d=\frac{|0+0-4|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{4}{\sqrt{2}}=2\sqrt{2}$$

답 ③

[풀이2]

원점에서 직선 $y=-x+4$에 내린 수선의 발을 H라고 하자.

이때, 직선 $y=-x+4$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 점 H는 두 직선 $y=-x+4$, $y=x$의 교점과 일치한다.



두 점 사이의 거리 공식에 의하여

(원점에서 직선 $y=-x+4$까지의 거리)

$=\overline{\mathrm{OH}}=2\sqrt{2}$

답 ③

S015 | 답 17

[풀이1]

문제에서 주어진 두 직선의 기울기는 서로 같으므로 두 직선은 서로 평행하다.

두 직선 사이의 거리를 d라고 하자.

직선 $x+\sqrt{3}y-1=0$ 위의 점 $(1,\ 0)$에서

직선 $x+\sqrt{3}y-35=0$까지의 거리는 d이다.

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$$d=\frac{|1+\sqrt{3}\times 0-35|}{\sqrt{1+(\sqrt{3})^2}}=\frac{34}{2}=17$$

답 17

[풀이2]

문제에서 주어진 두 직선의 기울기는 서로 같으므로 두 직선은 서로 평행하다.

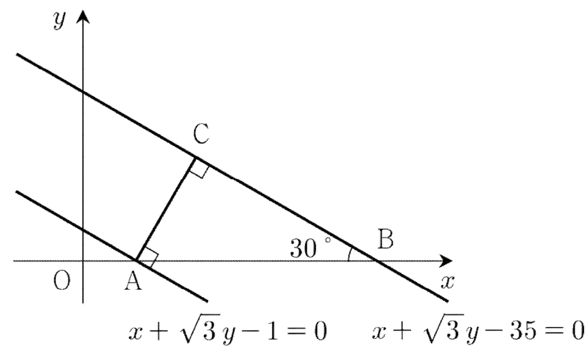
두 직선

$x+\sqrt{3}y-1=0$, $x+\sqrt{3}y-35=0$

이 x축과 만나는 점을 각각 A, B, 점 A에서 직선

$x+\sqrt{3}y-35=0$

에 내린 수선의 발을 C라고 하자.



문제에서 주어진 두 직선은 서로 평행하므로

(직선 AC)$\perp$(직선 $x+\sqrt{3}y-1=0$)

문제에서 주어진 두 직선 사이의 거리는 선분 AC의 길이와 같다.

직선 $x+\sqrt{3}y-35=0$이 x축의 양의 방향과 이루는 각의 크기를 θ라고 하자.

(단, $0\le\theta<\pi$)

$\tan\theta=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$에서 $\theta=150^\circ$이므로 $\angle\mathrm{ABC}=30^\circ$

직각삼각형 ABC에서 삼각비에 의하여

$$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\sin 30^\circ=34\times\frac{1}{2}=17$$

따라서 문제에서 주어진 두 직선 사이의 거리는 17이다.

답 17

S016 | 답 ④

[풀이]

직선 l의 방정식을

$ax+by+c=0$ $\cdots$㉠

으로 두자.

직선 l은 x축에 평행하지 않으므로

$a\neq 0$

직선 l은 y축에 평행하지 않으므로

$b \neq 0$

두 직선 l과 PH는 서로 수직하므로

(직선 l의 기울기)×(직선 PH의 기울기)

$= -\dfrac{a}{b} \times$(직선 PH의 기울기)$= -1$

직선 PH의 기울기는 $\dfrac{b}{a}$이므로

직선 PH의 방정식은

$$y - y_1 = \boxed{\frac{b}{a}(x - x_1)} \quad \cdots ㉡$$

㉠과 ㉡을 연립하면

$$x_2 - x_1 = \frac{-a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

$$y_2 - y_1 = \frac{-b(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

따라서 구하는 선분 PH의 길이는

$$\overline{\mathrm{PH}} = \boxed{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}}$$

$$= \sqrt{\frac{(ax_1 + by_1 + c)^2}{a^2 + b^2}} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

(가): $\dfrac{b}{a}(x - x_1)$

(나): $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

답 ④

[참고] +기하와 벡터(벡터의 내적)

벡터의 내적을 이용하여 평면에서 점과 직선 사이의 거리를 구할 수도 있다.

직선 l의 법선벡터를

$\vec{n} = (a,\ b)$

두 벡터 $\vec{n}$, $\overrightarrow{\mathrm{PH}}$는 서로 평행하므로

$\overrightarrow{\mathrm{PH}} = t\vec{n}$ (단, $t \neq 0$)

위치벡터로 표현하면

$\overrightarrow{\mathrm{OH}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + t\vec{n}$

벡터를 성분으로 표현하면

$(x_2,\ y_2) = (x_1,\ y_1) + t(a,\ b)$

성분에 의한 벡터의 연산에 의하여

$(x_2,\ y_2) = (x_1 + at,\ y_1 + bt)$

벡터의 상등의 정의에 의하여

$x_2 = x_1 + at,\ y_2 = y_1 + bt$

점 H는 직선 l 위에 있으므로

$a(x_1 + at) + b(y_1 + bt) + c = 0$

정리하면

$$t = -\frac{ax_1 + by_1 + c}{a^2 + b^2}$$

성분으로 주어진 벡터의 크기를 구하는 공식에 의하여

$$\overline{\mathrm{PH}} = |\overrightarrow{\mathrm{PH}}| = |t| \times |\vec{n}|$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{a^2 + b^2} \times \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$= \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

S017 | 답 11

[풀이]

주어진 원의 방정식을 표준형으로 정리하면

$(x - 5)^2 + (y - 1)^2 = 5^2$

따라서 주어진 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이는 각각 $(5,\ 1)$, 5이다.

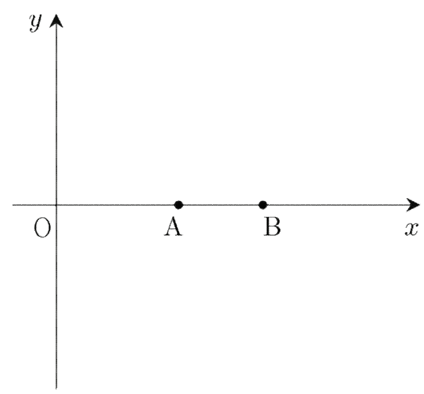
$\therefore\ a + b + r = 11$

답 11

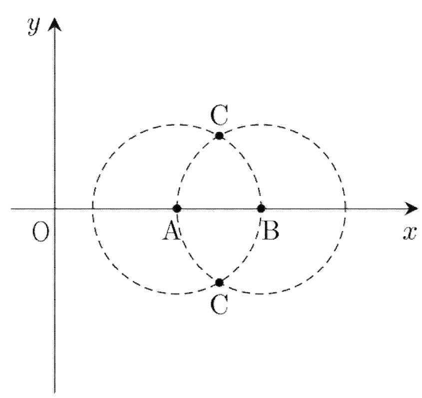
S018 | 답 ④

[풀이]

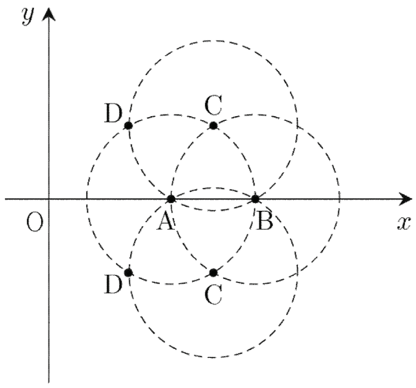
조건 (가), (나)를 만족시키도록 두 점 A, B의 위치를 정하자.



조건 (다)에서 $\overline{\mathrm{AB}} = \overline{\mathrm{AC}} = \overline{\mathrm{BC}}$이므로 점 C는 점 A를 중심으로 하고 반지름이 $\overline{\mathrm{AB}}$인 원과 점 B를 중심으로 하고 반지름이 $\overline{\mathrm{AB}}$인 원의 교점이다.



조건 (다)에서 $\overline{AC}=\overline{AD}=\overline{CD}$이므로 점 D는 점 A를 중심으로 하고 반지름이 $\overline{AC}$인 원과 점 C를 중심으로 하고 반지름이 $\overline{AC}$인 원의 교점이다. 단, 주어진 조건에 의하여 점 D는 점 B가 아니다.



위의 그림에서

$\therefore\ d<a<c<b$

답 ④

S019 | 답 ①

[풀이]

집합에서 주어진 식

$x^2+y^2-x=n$

(단, $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

을 변형하면

$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2=n+\frac{1}{4}$

(단, $n=0,\ 1,\ 2,\ 3$)

집합에서 주어진 도형은 중심이 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$이고 반지름의 길이가 $\sqrt{n+\frac{1}{4}}$ 인 원이다.

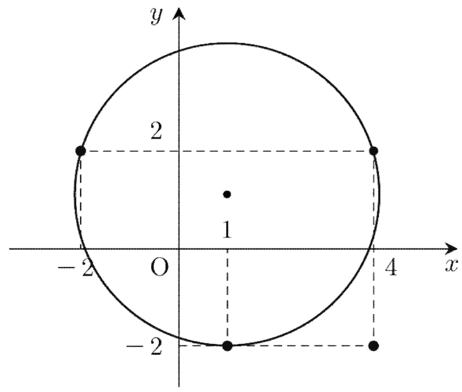
따라서 하나의 좌표평면에 나타나는 4개의 등고선은 중심이 $\left(\frac{1}{2},\ 0\right)$으로 같은 동심원이다.

답 ①

S020 | 답 ④

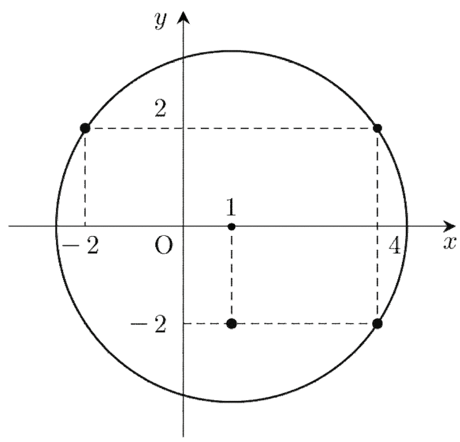
[풀이1]

- 세 점 $(-2,\ 2)$, $(4,\ 2)$, $(1,\ -2)$에 대하여 로봇 팔의 길이를 최소로 할 수 있는 점의 위치를 결정하자.



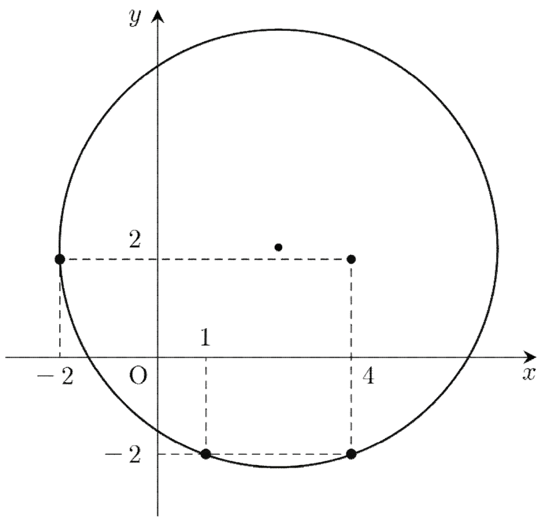
세 점 $(-2,\ 2)$, $(4,\ 2)$, $(1,\ -2)$를 모두 지나는 원의 중심에 로봇 팔의 한쪽 끝을 고정시키면 된다. 이때, 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이는 각각 $\left(1,\ \frac{9}{8}\right)$, $\frac{25}{8}$이고, 점 $(4,\ -2)$는 이 원의 외부에 있다.

- 세 점 $(-2,\ 2)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ -2)$에 대하여 로봇 팔의 길이를 최소로 할 수 있는 점의 위치를 결정하자.



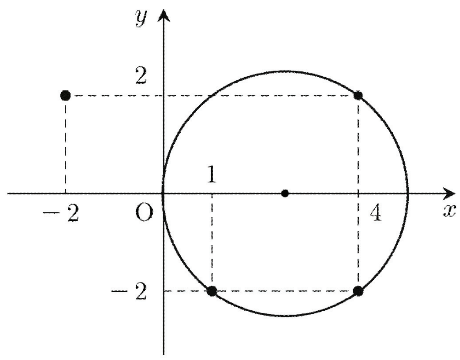
세 점 $(-2,\ 2)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ -2)$를 모두 지나는 원의 중심에 로봇 팔의 한쪽 끝을 고정시키면 된다. 이때, 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이는 각각 $(1,\ 0)$, $\sqrt{13}$이고, 점 $(1,\ -2)$는 이 원의 내부에 있다.

- 세 점 $(-2,\ 2)$, $(1,\ -2)$, $(4,\ -2)$에 대하여 로봇 팔의 길이를 최소로 할 수 있는 점의 위치를 결정하자.



세 점 $(-2,\ 2)$, $(1,\ -2)$, $(4,\ -2)$를 모두 지나는 원의 중심에 로봇 팔의 한쪽 끝을 고정시키면 된다. 이때, 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이는 각각 $\left(\frac{5}{2},\ \frac{9}{4}\right)$, $\frac{5}{4}\sqrt{13}$이고, 점 $(4,\ 2)$는 이 원의 내부에 있다.

- 세 점 $(4,\ 2)$, $(1,\ -2)$, $(4,\ -2)$에 대하여 로봇 팔의 길이를 최소로 할 수 있는 점의 위치를 결정하자.



세 점 $(4,\ 2)$, $(1,\ -2)$, $(4,\ -2)$를 모두 지나는 원의 중심에 로봇 팔의 한쪽 끝을 고정시키면 된다. 이때, 원의 중심의 좌표와 반지름의 길이는 각각 $\left(\frac{5}{2},\ 0\right)$, $\frac{5}{2}$이고, 점 $(-2,\ 2)$는 이 원의 외부에 있다.

이상에서 로봇 팔의 길이를 최소로 할 수 있는 점 P의 위치는 $(1,\ 0)$이다.

답 ④

S021 | 답 ①

[풀이]

직선 AB의 기울기는 $\frac{y}{x+1}$

주어진 조건에서 $\therefore\ t=\frac{y}{x+1}$

답 ①

S022 | 답 ②

[풀이]

원의 방정식과 직선의 방정식을 연립하면

$x^2+t^2(x+1)^2=1$

정리하면

$(t^2+1)x^2+2t^2x+t^2-1=0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$x=\frac{-t^2+1}{t^2+1}$ 또는 $x=-1$

그런데 $-1<x\le 1$에서 $x\ne -1$이므로

$\therefore\ x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$

답 ②

S023 | 답 ①

[풀이1]

(1) $a=b=0$인 경우

$a^2+b^2=0$이고 $a+2b=0$이다.

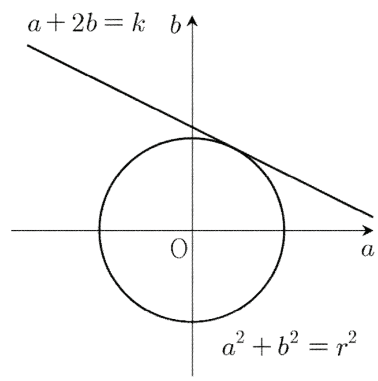
$a+2b$의 최댓값은 0이며 문제에서 주어진 5개의 보기는 모두 성립한다.

(2) $a\ne 0$ 또는 $b\ne 0$인 경우

문제에서 주어진 조건에서

$a^2+b^2=r^2(r>0)$ … ㉠

점 $(a,\ b)$의 자취는 중심이 원점이고 반지름의 길이가 r인 원이다.



$a+2b=k$ … ㉡

직선 ㉡이 원 ㉠과 만나야 하므로 원점에서 직선 ㉡까지의 거리는 원의 반지름의 길이 이하여야 한다.

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$$\frac{|0+2\times 0-k|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{|k|}{\sqrt{5}}\le r$$

정리하면 $-\sqrt{5}r \le k \le \sqrt{5}r$

$a+2b=\sqrt{5}r$을 ㉠에 대입하면

$a^2+b^2=\dfrac{(a+2b)^2}{5}$ 정리하면 $(2a-b)^2=0$

$\therefore\ b=2a$

답 ①

[풀이2]

주어진 조건에서

$a^2+b^2=c$ ⋯㉠

(단, c는 음이 아닌 실수)

$a+2b=k$로 두면

$a=-2b+k$ ⋯㉡

㉡을 ㉠에 대입하면

$(-2b+k)^2+b^2=c$

정리하면

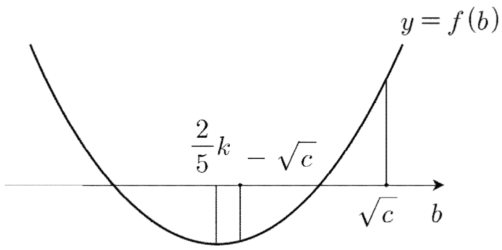
$5b^2-4kb+k^2-c=0$ ⋯㉢

(단, $-\sqrt{c} \le b \le \sqrt{c}$)

이제 $f(b)=5b^2-4kb+k^2-c$로 두고

이차방정식의 근의 분리를 하자.

(1) $\dfrac{2}{5}k<-\sqrt{c}$인 경우



$f(-\sqrt{c})=4c+4k\sqrt{c}+k^2=(2\sqrt{c}+k)^2 \le 0$

$f(\sqrt{c})=4c-4k\sqrt{c}+k^2=(2\sqrt{c}-k)^2 \ge 0$

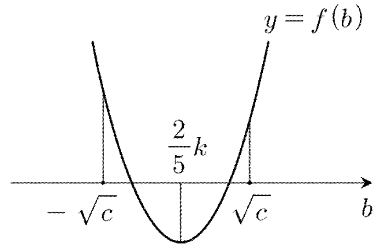
위의 연립부등식을 풀면

$k=-2\sqrt{c}$

이는 부등식 $\dfrac{2}{5}k<-\sqrt{c}$를 만족시키지 않는다.

따라서 $\dfrac{2}{5}k<-\sqrt{c}$일 때, 이차방정식 ㉢은 실근을 갖지 않는다.

(2) $-\sqrt{c} \le \dfrac{2}{5}k \le \sqrt{c}$인 경우



이차방정식 ㉢의 판별식을 D라고 하면

$D/4=(-2k)^2-5\times(k^2-c) \ge 0$

정리하면

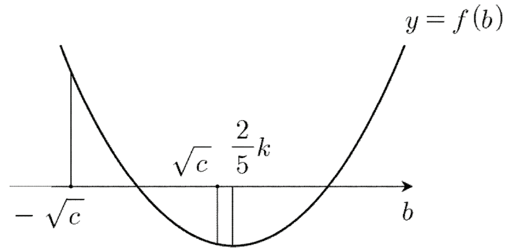
$k^2 \le 5c$

풀면

$-\sqrt{5c} \le k \le \sqrt{5c}$

이 k의 범위는 $-\sqrt{c} \le \dfrac{2}{5}k \le \sqrt{c}$에 속한다.

(3) $\dfrac{2}{5}k>\sqrt{c}$인 경우



$f(-\sqrt{c})=4c+4k\sqrt{c}+k^2=(2\sqrt{c}+k)^2 \ge 0$

$f(\sqrt{c})=4c-4k\sqrt{c}+k^2=(2\sqrt{c}-k)^2 \le 0$

위의 연립부등식을 풀면

$k=2\sqrt{c}$

이는 부등식 $\dfrac{2}{5}k>\sqrt{c}$를 만족시키지 않는다.

따라서 $\dfrac{2}{5}k>\sqrt{c}$일 때, 이차방정식 ㉢은 실근을 갖지 않는다.

(1), (2), (3)에서 k의 최댓값은 $\sqrt{5c}$이다.

$a+2b=\sqrt{5c}$와 ㉠을 연립하면

$a^2+b^2=\dfrac{(a+2b)^2}{5}$

정리하면

$(2a-b)^2=0$

$\therefore\ b=2a$

답 ①

[풀이3] +수학2(절대부등식)

문제에서 주어진 조건에 의하여

$a^2+b^2=c$(단, c는 음이 아닌 실수)

코시-슈바르츠 절대부등식에 의하여

$(1^2+2^2)(a^2+b^2) \geq (a+2b)^2$

즉, $(a+2b)^2 \leq 5c$

(단, 등호는 $\dfrac{a}{1} = \dfrac{b}{2}$일 때 성립한다.)

$a+2b$가 최대일 때, a와 b의 관계식은

$\therefore\ b = 2a$

답 ①

S024 | 답 ①

[풀이]

주어진 원의 반지름의 길이를 r이라고 하자.

주어진 원의 중심에서 주어진 직선까지의 거리는 r과 같아야 한다.

주어진 직선의 방정식은 $3x-4y-2=0$이므로

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

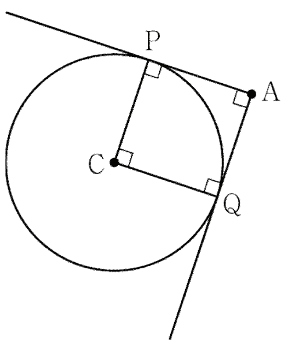
$\therefore\ r = \dfrac{|3-16-2|}{\sqrt{3^2+(-4)^2}} = 3$

답 ①

S025 | 답 ①

[풀이]

문제에서 주어진 원의 중심을 C, 점 A에서 이 원에 접선을 그었을 때 생기는 두 접점을 각각 P, Q라고 하자.



두 접선이 서로 수직이므로

$\angle \mathrm{QAP} = 90^\circ$

원의 접선의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{APC} = 90^\circ$, $\angle \mathrm{CQA} = 90^\circ$

사각형의 내각의 합은 360°이므로

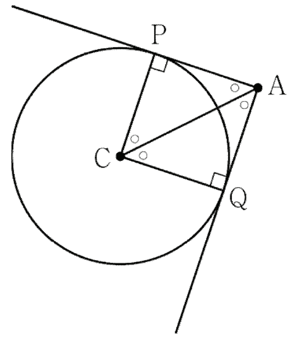
$\angle \mathrm{PCQ} = 90^\circ$

직사각형의 정의에 의하여 □APCQ는 직사각형이다.

그런데 원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{CP}} = \overline{\mathrm{CQ}}$이므로 $\overline{\mathrm{AP}} = \overline{\mathrm{AQ}}$이다.

따라서 □APCQ는 정사각형이다.



두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}} = \sqrt{(5-1)^2+(4-2)^2} = 2\sqrt{5}$

직각이등변삼각형 ACQ에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{CQ}} = \overline{\mathrm{AC}}\cos 45^\circ = \sqrt{10}$

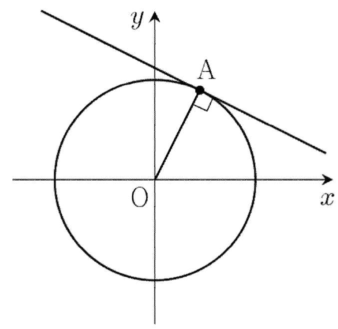
따라서 문제에서 주어진 원의 반지름의 길이는 $\sqrt{10}$이다.

답 ①

S026 | 답 ⑤

[풀이1]

접선을 l, 접점을 $\mathrm{A}(1, 2)$로 두자.



$\overline{\mathrm{OA}} \perp l$이므로

(직선 OA의 기울기)$\times$(직선 l의 기울기)$=-1$

직선 OA의 기울기는 2이므로

(직선 l의 기울기)$= -\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y = -\dfrac{1}{2}(x-1)+2$

정리하면

$\therefore\ x+2y=5$

답 ⑤

[풀이2]

주어진 원 위의 점 $(1, 2)$에서의 접선은 y축에 평행하지 않는다.

접선의 기울기를 k로 두고 접선의 방정식을 세우면

$y = k(x-1)+2$ 즉, $kx-y-k+2=0$

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

(원의 중심에서 접점까지의 거리)

$= \dfrac{|-k+2|}{\sqrt{k^2+(-1)^2}} = \sqrt{5} =$(원의 반지름의 길이)

양변을 제곱하여 정리하면

$(2-k)^2 = 5(k^2+1)$

다시 정리하면

$4k^2+4k+1=0$

좌변을 인수분해하면 $(2k+1)^2=0$ 풀면 $k=-\dfrac{1}{2}$

따라서 구하는 접선의 방정식은

$y=-\dfrac{1}{2}(x-1)+2$

정리하면

$\therefore\ x+2y=5$

답 ⑤

S027 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 원의 방정식에 $x=0$을 대입하면

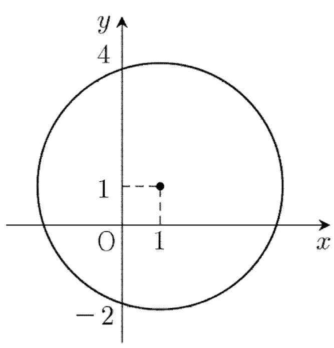
$(0-1)^2+(y-1)^2=10$

정리하면

$(y-1)^2=9$, $(y-4)(y+2)=0$

풀면

$y=4$ 또는 $y=-2$



주어진 원이 y축과 만나는 두 점의 좌표는 각각

$(0,\ 4)$, $(0,\ -2)$

이 두 점 사이의 거리는 $|4-(-2)|=6$이다.

답 ③

S028 | 답 2

[풀이]

문제에서 주어진 원의 반지름의 길이를 r, 주어진 원의 중심에서 주어진 직선까지의 거리를 d라고 하자.

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$d = \dfrac{|3\times1+4\times2-1|}{\sqrt{3^2+4^2}} = 2$

$r=d$이면 주어진 원은 주어진 직선에 접한다.

$\therefore\ r=2$

답 2

S029 | 답 ④

[풀이1]

문제에서 주어진 원의 방정식은

$(x-4)^2+(y-4)^2=4$ …㉠

직선 OC의 방정식은

$y=x$ …㉡

㉡을 ㉠에 대입하여 정리하면

$(x-4)^2=2$

이차방정식을 풀면

$x=4+\sqrt{2}$ 또는 $x=4-\sqrt{2}$

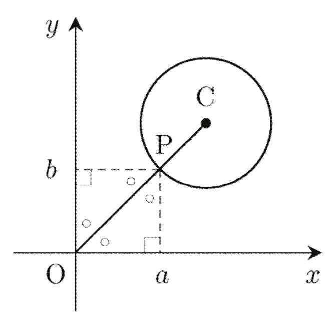
점 P의 x좌표는 4보다 작으므로

P의 좌표는 $\mathrm{P}(4-\sqrt{2},\ 4-\sqrt{2})$이다.

$\therefore\ a=4-\sqrt{2}$

답 ④

[풀이2]



선분 OP의 길이는 원점과 주어진 원 위의 점 사이의 최단거리이다.

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{OC}} = \sqrt{(4-0)^2+(4-0)^2} = 4\sqrt{2}$

선분 OP의 길이를 구하면

$\overline{\mathrm{OP}} = \overline{\mathrm{OC}} - 2 = 4\sqrt{2}-2$

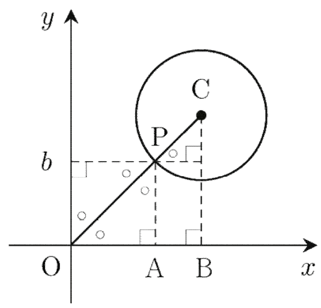
직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기는 45°이므로 직각삼각형에서 삼각비의 정의에 의하여

$\therefore\ a = \overline{\mathrm{OP}}\cos45^\circ = 4-\sqrt{2}$

답 ④

[풀이3]

두 점 P, C에서 x축에 내린 수선의 발을 각각 A, B라고 하자.



직선 OP가 x축의 양의 방향과 이루는 예각의 크기는 $45°$이므로 직각삼각형에서 삼각비의 정의에 의하여

$\overline{AB}=\overline{PC}\cos 45° = \sqrt{2}$

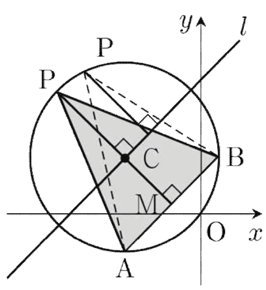
$\therefore\ a=\overline{OB}-\overline{AB}=4-\sqrt{2}$

답 ④

S030 | 답 ⑤

[풀이1]

문제에서 주어진 원의 중심을 C, 선분 AB의 중심을 M, 점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 직선을 l이라고 하자. 이때, 이등변삼각형의 성질에 의하여 $\overline{CM}\perp\overline{AB}$이다.



삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

(△PAB의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times$(점 P에서 직선 AB까지의 거리)

$=\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times$(점 P에서 직선 l까지의 거리)

$+\dfrac{1}{2}\times\overline{AB}\times$(점 C에서 직선 AB까지의 거리)

두 직선 AB, l이 서로 평행하므로 점 C에서 직선 AB까지의 거리는 일정하다.

따라서 점 P에서 직선 l까지의 거리가 최대일 때, 삼각형 PAB의 넓이는 최대가 된다.

점 P에서 직선 l까지의 거리가 원 C의 반지름의 길이와 같아질 때, 점 P에서 직선 l까지의 거리는 최대가 된다. 즉, 점 P에서 직선 l에 내린 수선의 발이 C일 때, 점 P에서 직선 l까지의 거리는 최대가 된다.

삼각형 PAB의 넓이가 최대일 때, 세 점 P, C, M은 한 직선 위에 있으며 점 P는 선분 AB의 수직이등분선 위에 있다. (단, 점 P는 제2사분면의 점이다.)

직선 AB의 기울기는 1이므로 직선 CM의 방정식은

$y=-(x+8)+6$ 즉, $y=-x-2$

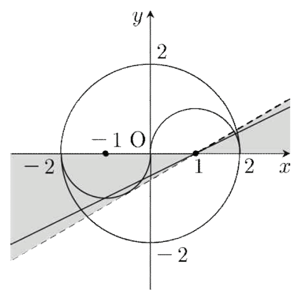
$a=-1$, $b=-2$ $\therefore\ a+b=-3$

답 ⑤

S031 | 답 ②

[풀이]

직선 $y=a(x-1)$은 기울기(a)에 관계없이 항상 점 $(1,\ 0)$을 지난다.



직선

$y=a(x-1)$ $\cdots(*)$

이 위의 그림의 색칠된 영역만을 지나면 직선과 태극문양의 교점의 개수는 5이다. (단, 색칠된 영역에서 경계선은 제외한다.)

(1) 직선 (*)의 기울기는 양수이므로 $a>0$이다.

(2) 직선 (*)이 반원 $(x+1)^2+y^2=1(y\le 0)$에 접할 때, a의 값을 구하자.

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

(점 $(-1,\ 0)$에서 직선 (*)까지의 거리)

$=\dfrac{|-a-0-a|}{\sqrt{a^2+(-1)^2}}=1=$(반원의 반지름의 길이)

정리하면

$|2a|=\sqrt{a^2+1}$

양변을 제곱하여 정리하면

$3a^2=1$

이차방정식을 풀면

$a=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(\because a>0)$

직선 (*)의 기울기는 $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$보다 작아야 한다.

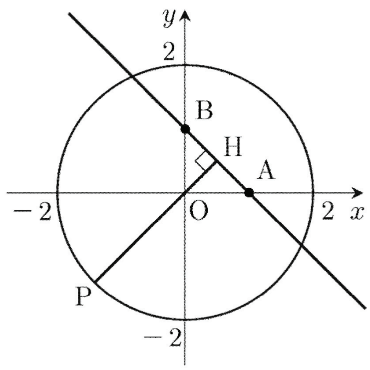
따라서 (1), (2)에서 a의 범위는

$\therefore\ 0<a<\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

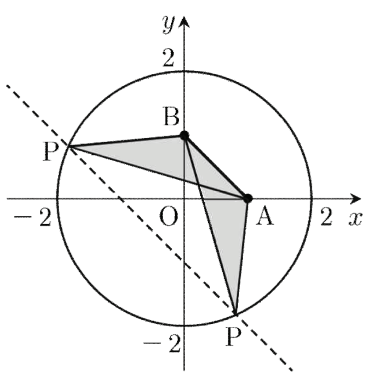
답 ②

S032 | 답 ②

[풀이1]
두 점 (1, 0), (0, 1)을 각각 A, B, 점 P와 직선 AB 사이의 거리를 h라고 하자.
삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여
($\triangle$ABP의 넓이)
$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times h=\frac{\sqrt{2}}{2}h=1$에서 $h=\sqrt{2}$
원점 O에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H라고 하자.



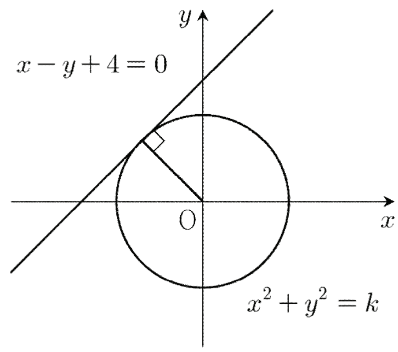
(점 P와 직선 AB 사이의 거리의 최댓값)
=(원 O의 반지름의 길이)+$\overline{\mathrm{OH}}$
$=2+\frac{\sqrt{2}}{2}>\sqrt{2}$



위의 그림처럼 $h=\sqrt{2}$인 점 P의 개수는 2이다.
답 ②

S033 | 답 8

[풀이1]
$x^2+y^2=k$로 두자. (단, k는 음이 아닌 상수)
$k=0$이라고 하면
$x^2+y^2=0$
x, y는 실수이므로
$x=y=0$
이를 문제에서 주어진 직선의 방정식에 대입하면
(좌변)$=4\neq 0=$(우변)
이는 가정에 모순이다. 따라서 $k>0$이다.

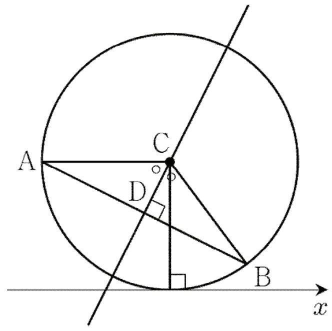


원 $x^2+y^2=k$이 직선 $x-y+4=0$에 접할 때, k의 값은 최소가 된다.
점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여
(원점과 직선 $x-y+4=0$ 사이의 거리)
$=\frac{|0-0+4|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=2\sqrt{2}\leq\sqrt{k}$
=(원의 반지름의 길이)
k의 범위를 구하면 $k\geq 8$
따라서 x^2+y^2의 최솟값은 8이다.
답 8

[풀이2]
$y=x+4$이므로
$x^2+y^2=x^2+(x+4)^2=2(x+2)^2+8$
모든 실수 x에 대해서 $2(x+2)^2\geq 0$이므로
$x^2+y^2\geq 8$
(단, 등호는 $x=-2$, $y=2$일 때 성립한다.)
따라서 x^2+y^2의 최솟값은 8이다.
답 8

S034 | 답 ②

[풀이1]
문제에서 주어진 원의 중심을 C(a, b), 각 $\angle$BCA의 이등분선이 선분 AB와 만나는 점을 D라고 하자. 이때, 두 직각삼각형 CAD, CBD는 서로 합동이므로 $\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{BD}}$이다. 즉, 점 D는 선분 AB의 중점이다.



직선 AB의 기울기는 $-\dfrac{1}{2}$이고, 점 D의 좌표는 D$(4,\ 3)$이므로 선분 AB의 수직이등분선의 방정식은

$y=2(x-4)+3$ 즉, $2x-y-5=0$

점 C(중심)은 선분 AB의 수직이등분선 위에 있으므로

$2a-b-5=0$에서 $b=2a-5$

점 C의 좌표는 C$(a,\ 2a-5)$이다.

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{(a-0)^2+(2a-10)^2}=\sqrt{5a^2-40a+100}$

원 C가 x축에 접하므로

(원 C의 반지름의 길이)=(원 C의 y좌표)$=\overline{\mathrm{AC}}$

대입하면

$2a-5=\sqrt{5a^2-40a+100}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2-20a+75=0$

좌변을 인수분해하면

$(a-5)(a-15)=0$

$0\le a\le 8$이므로 $a=5$

점 C의 좌표는 C$(5,\ 5)$이다.

내분점의 공식에 의하여 점 D의 좌표는

D$(4,\ 3)$

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{5}$

답 ②

[참고1]

선분 $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이는 다음과 같이 구할 수도 있다.

$\overline{\mathrm{AC}}=$|두 점 A, C의 x좌표의 차|$=5$

$\overline{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}=2\sqrt{5}$

직각삼각형 ADC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}=\sqrt{\overline{\mathrm{AC}}^2-\overline{\mathrm{AD}}^2}=\sqrt{5^2-(2\sqrt{5})^2}=\sqrt{5}$

[참고2]

선분 $\overline{\mathrm{CD}}$의 길이는 다음과 같이 구할 수도 있다.

직선 AB의 방정식은

$x+2y-10=0$

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{CD}}=\dfrac{|5+2\times5-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$

[풀이2]

문제에서 주어진 원이 x축에 접하므로 이 원의 반지름의 길이는 중심의 y좌표의 절댓값과 같다.

주어진 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-b)^2=b^2$ … (*)

(*)가 점 A$(0,\ 5)$를 지나므로

$(0-a)^2+(5-b)^2=b^2$

정리하면

$a^2-10b+25=0$ … ㉠

(*)가 점 B$(8,\ 1)$을 지나므로

$(8-a)^2+(1-b)^2=b^2$

정리하면

$a^2-16a-2b+65=0$ … ㉡

$b=\dfrac{a^2+25}{10}$(㉠)을 ㉡에 대입하여 정리하면

$a^2-20a+75=0$

좌변을 인수분해하면

$(a-5)(a-15)=0$

$0\le a\le 8$이므로 $a=5$

이를 ㉠에 대입하면 $b=5$

주어진 원의 중심은 $(5,\ 5)$이다.

직선 AB의 방정식은

$x+2y-10=0$

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

(원의 중심 $(5,\ 5)$와 직선 AB 사이의 거리)

$=\dfrac{|5+2\times5-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\sqrt{5}$

답 ②

S035 | 답 ③

[풀이]

점 P$(a,\ b)$가 원 $x^2+y^2=4$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=4$ … ㉠

원 $x^2+y^2=4$ 위의 점 P에서의 접선의 방정식은

$ax+by=4$

이 접선이 원 $(x-5)^2+y^2=1$과 서로 다른 두 점에서 만나려면 중심 $(5,\ 0)$에서 이 접선에 이르는 거리가 원의 반지름의 길이 1보다 작아야 한다.

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$$\frac{|5a-4|}{\sqrt{a^2+b^2}}<1 \qquad \cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하면

$|5a-4|<2$, $-2<5a-4<2$

a에 대한 연립부등식을 풀면

$\therefore \ \frac{2}{5}<a<\frac{6}{5}$

답 ③

S036 | 답 ⑤

[풀이]

점 $(a,\ b)$가 일사분면 위에 있으므로

$a>0$, $b>0$

$x^2+y^2=5$ 위의 점 $(a,\ b)$에서 그은 접선의 방정식은

$ax+by=5$

이 직선이 x축, y축과 만나는 교점을 각각 A, B라고 하면

$A\left(\frac{5}{a},\ 0\right)$, $B\left(0,\ \frac{5}{b}\right)$

주어진 조건에서 삼각형 OAB의 넓이가 5이므로

(삼각형 OAB의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{a}\times\frac{5}{b}=5$

정리하면 $ab=\frac{5}{2}$ $\cdots ㉠$

한편 $(a,\ b)$는 원 $x^2+y^2=5$ 위의 점이므로

$a^2+b^2=5$ $\cdots ㉡$

$(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$이므로

㉠, ㉡에서

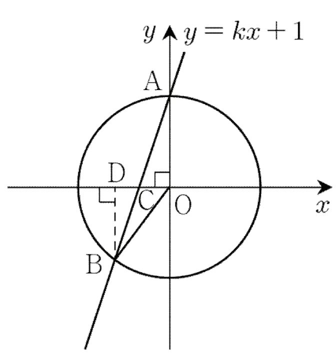
$\therefore \ a+b=\sqrt{a^2+b^2+2ab}=\sqrt{10}$

답 ⑤

S037 | 답 3

[풀이1]

점 B에서 x축에 내린 수선의 발을 D라고 하자.



삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle$AOC의 넓이)$=\frac{1}{2}\overline{AO}\,\overline{CO}$

($\triangle$BOC의 넓이)$=\frac{1}{2}\overline{BD}\,\overline{CO}$

$\triangle$AOC, $\triangle$BOC의 넓이의 비가 $5:4$이므로

$\overline{AO}:\overline{BD}=5:4$

$\overline{AO}=|$점 A의 y좌표$|=1$

이므로 $\overline{BD}=|$점 B의 y좌표$|=\frac{4}{5}$

점 B는 제3사분면 위의 점이므로

점 B의 좌표를 $B\left(t,\ -\frac{4}{5}\right)$으로 두자.(단, $-1<t<0$)

점 B는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$t^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2=1$ 풀면 $t=-\frac{3}{5}$

점 B의 좌표는 $B\left(-\frac{3}{5},\ -\frac{4}{5}\right)$이다.

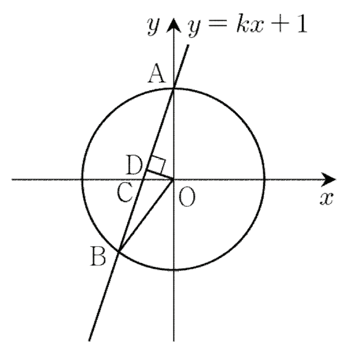
k는 직선 AB의 기울기이므로

$$\therefore \ k=\frac{1-\left(-\frac{4}{5}\right)}{0-\left(-\frac{3}{5}\right)}=3$$

답 3

[풀이2]

점 O에서 선분 AB에 내린 수선의 발을 D라고 하자.



삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle$AOC의 넓이)$=\frac{1}{2}\overline{AC}\,\overline{OD}$

($\triangle$BOC의 넓이)$=\frac{1}{2}\overline{CB}\,\overline{OD}$

$\triangle$AOC, $\triangle$BOC의 넓이의 비가 $5:4$이므로

$\overline{AC}:\overline{CB}=5:4$ 즉, $\overline{AB}:\overline{CB}=9:4$

점 B는 선분 AC의 $9:4$ 외분점이다.

두 점 A, C의 좌표는 각각

$A(0,\ 1)$, $C\left(-\frac{1}{k},\ 0\right)$

외분점의 공식에 의하여 $B\left(-\frac{9}{5k},\ -\frac{4}{5}\right)$

점 B는 원 $x^2+y^2=1$ 위의 점이므로

$\left(-\frac{9}{5k}\right)^2+\left(-\frac{4}{5}\right)^2=1$

정리하면 $k^2=9$

풀면

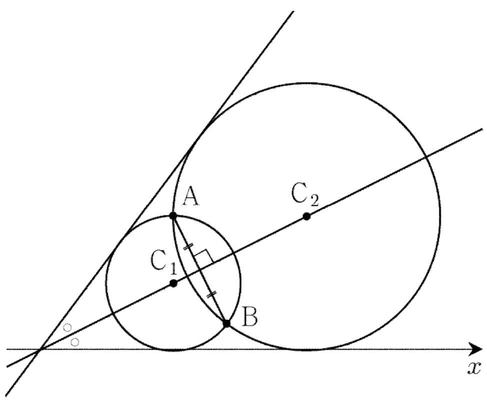
$\therefore\ k=3(\because\ k>1)$

답 3

S038 | 답 −3

[풀이]

문제에서 주어진 서로 다른 두 원의 중심을 각각 C_1, C_2라고 하자. (단, 원 C_1의 반지름의 길이가 원 C_2의 반지름의 길이보다 작다.)



직선 AB의 기울기는 -2이고,

선분 AB의 중점은 $(3,\ 3)$이다.

직선 C_1C_2는 선분 AB의 수직이등분선이므로

직선 C_1C_2의 방정식은

$y=\frac{1}{2}(x-3)+3$ 즉, $y=\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}$ $\cdots(*)$

그런데 x축은 문제에서 주어진 서로 다른 두 원의 공통외접선이므로

이제 직선 (*)과 x축의 교점의 좌표를 구하면 된다.

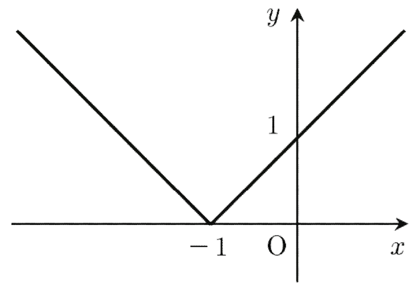
$\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}=0$ 풀면 $\therefore\ x=-3$

답 -3

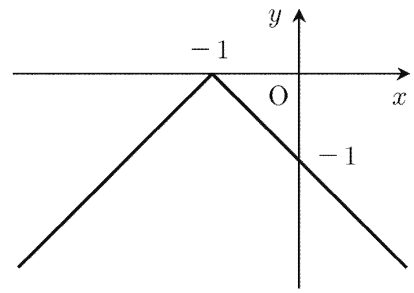
S039 | 답 ④

[풀이]

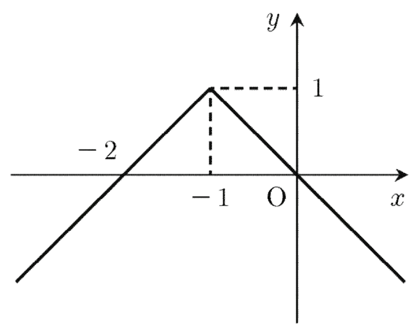
함수 $y=|x|$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동시키면 함수 $y=|x+1|$의 그래프와 일치한다.



함수 $y=|x+1|$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동시키면 함수 $y=-|x+1|$의 그래프와 일치한다.



함수 $y=-|x+1|$의 그래프를 y축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 함수 $y=1-|x+1|$와 일치한다.



따라서 구하는 함수의 방정식은

$|x+1|+y=1$

답 ④

S040 | 답 ①

[풀이1]

점 $A(-1,\ g(-1))$을 직선 $y=4$에 대하여 대칭이동한 점을 $A'(a,\ f(a))$라고 하자.

두 직선 AA', $y=4$는 서로 수직이어야 하므로 점 A'의 x좌표는 -1이다.

점 A'의 좌표는 $A'(-1,\ 20)$이다.

선분 AA'의 중점은 직선 $y=4$ 위에 있어야 하므로

$\frac{20+g(-1)}{2}=4$ 풀면 $g(-1)=-12$

$\therefore\ g(-1)=-12$

답 ①

[풀이2]

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 직선 $y=4$에 대하여 대칭이므로

모든 실수 x에 대하여

$\frac{f(x)+g(x)}{2}=4$

정리하면

$g(x)=8-f(x)$

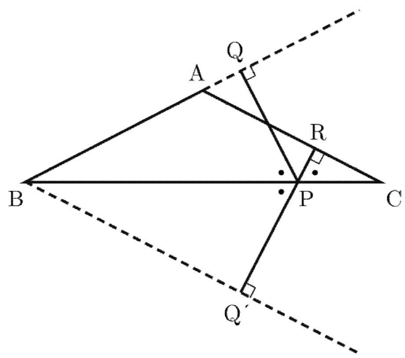
$\therefore\ g(-1)=8-f(-1)=8-20=-12$

답 ①

S041 | 답 ③

[풀이1]

점 Q를 직선 BC에 대하여 대칭이동시킨 점을 Q′이라고 하자.



이등변삼각형의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{ABC}=\angle \mathrm{ACB}$

직각삼각형 QBP에서

$\angle \mathrm{BPQ}=\frac{\pi}{2}-\angle \mathrm{ABC}$

직각삼각형 RCP에서

$\angle \mathrm{CPR}=\frac{\pi}{2}-\angle \mathrm{ACB}$

이므로

$\angle \mathrm{BPQ}=\angle \mathrm{CPR}$

두 점 Q, Q′은 직선 BC에 대하여 서로 대칭이므로

$\angle \mathrm{BPQ}=\angle \mathrm{BPQ'}$

선분 BC 위의 점 P에 대하여

$\angle \mathrm{CPR}=\angle \mathrm{BPQ'}$

이므로 세 점 R, P, Q′은 한 직선 위에 있다.

$\overline{\mathrm{AC}}\perp\overline{\mathrm{RQ'}}$, $\overline{\mathrm{BQ'}}\perp\overline{\mathrm{RQ'}}$

이므로 선분 RQ′의 길이는 서로 평행한 두 직선 AC, BQ′ 사이의 거리와 같다.

점 P의 위치에 관계없이 선분 RQ′의 길이는 일정하므로

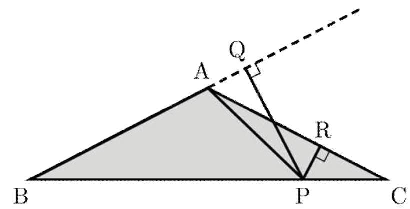
$y=\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{PQ'}}+\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{RQ'}}=$(일정)

따라서 함수의 그래프의 개형은 ③과 같다.

답 ③

[풀이2]

삼각형 ABC의 넓이를 S라고 하자.



($\triangle$ABP의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{PQ}}$

($\triangle$APC의 넓이)$=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AC}}\times\overline{\mathrm{PR}}$

이므로

$S=$($\triangle$ABP의 넓이)$+$($\triangle$APC의 넓이)

주어진 조건에 의하여 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$이므로

$S=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times(\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}})$

점 P의 위치에 관계없이 선분 AB의 길이와 S의 값은 일정하므로

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}=\frac{2S}{\overline{\mathrm{AB}}}=$(일정)

따라서 함수의 그래프의 개형은 ③과 같다.

답 ③

[풀이3]

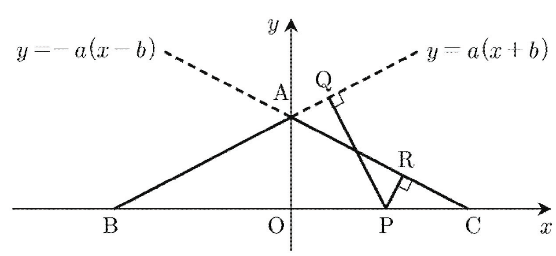
세 점 A, B, C의 좌표가 각각

A$(ab,\ 0)$, B$(-b,\ 0)$, C$(b,\ 0)$

이 되도록 좌표평면을 도입하자.

그리고 점 P의 좌표를 P$(c,\ 0)$이라고 하자.

(단, $a>0$, $b>0$, $-b<c<b$)



점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}=$(점 P와 직선 AB 사이의 거리)

$=\frac{ac+ab}{\sqrt{a^2+1}}$

$\overline{\mathrm{PR}}=$(점 P와 직선 AC 사이의 거리)

$=\frac{ab-ac}{\sqrt{a^2+1}}$

이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}=\dfrac{2ab}{\sqrt{a^2+1}}=$(일정)

따라서 함수의 그래프의 개형은 ③과 같다.

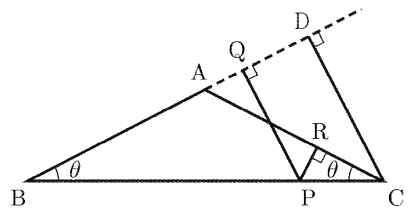
답 ③

[풀이4]

$\angle \mathrm{ABC}=\theta$, 점 C에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 D라고 하자.

이등변삼각형의 성질에 의하여

$\angle \mathrm{ACB}=\theta$



직각삼각형 BPQ에서 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{PQ}}=\overline{\mathrm{BP}}\sin\theta$

직각삼각형 CPR에서 삼각비에 의하여

$\overline{\mathrm{PR}}=\overline{\mathrm{CP}}\sin\theta$

이므로

$\overline{\mathrm{PQ}}+\overline{\mathrm{PR}}=(\overline{\mathrm{BP}}+\overline{\mathrm{CP}})\sin\theta$

$=\overline{\mathrm{BC}}\sin\theta=\overline{\mathrm{CD}}=$(일정)

따라서 함수의 그래프의 개형은 ③과 같다.

답 ③

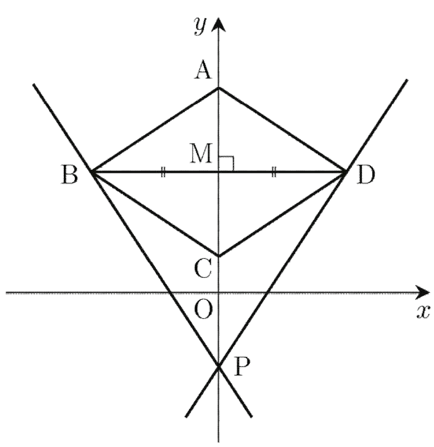
S042 | 답 ①

[풀이]

마름모의 성질에 의하여 마름모 ABCD의 두 대각선 $\overline{\mathrm{AC}}$와 $\overline{\mathrm{BD}}$는 서로 다른 것을 수직이등분한다.

두 점 A와 C가 y축 위에 있으므로

직선 BD는 x축에 평행하다.



두 대각선의 교점을 M이라고 하면

$\overline{\mathrm{BM}}=\overline{\mathrm{MD}}$

이므로 두 점 B와 D는 y축에 대하여 대칭이다.

따라서 두 직선 PB, PD는 y축에 대하여 대칭이다.

직선 PB의 방정식은

$-3x-2y=1$

$a=-3,\ b=-2$

$\therefore\ a+b=-5$

답 ①

T 집합과 명제 (평가원)

1	③	2	④	3	④	4	③	5	④
6	⑤	7	④	8	⑤	9	④	10	5
11	③	12	①	13	7	14	16	15	②
16	④	17	10	18	7	19	③	20	③
21	①	22	③	23	23	24	8	25	4
26	8	27	24	28	13	29	6	30	13
31	20	32	②	33	⑤	34	15	35	⑤
36	⑤	37	④	38	②	39	③	40	④
41	①	42	②	43	①	44	③	45	⑤
46	④	47	②	48	④	49	5	50	④
51	①	52	⑤	53	⑤	54	⑤	55	④
56	③	57	②	58	①	59	②	60	④

T001 | 답 ③

[풀이]

집합 A가 집합 B의 부분집합이므로

$7 \in A$이면 $7 \in B$이어야 한다.

따라서 a는 7일 수 밖에 없다.

답 ③

T002 | 답 ④

[풀이]

두 집합 A, B의 모든 원소가 같아야하므로

$a+1=3$, $5=b$ 즉, $a=2$, $b=5$

$\therefore\ a+b=7$

답 ④

T003 | 답 ④

[풀이]

주어진 부등식의 좌변을 인수분해하면

$(x-k+1)(x-k-1) \le 0$

풀면

$k-1 \le x \le k+1$ $\cdots(*)$

(*)이 집합 $\{x \mid 4 \le x \le 8\}$의 부분집합이므로

$4 \le k-1$, $k+1 \le 8$

k에 대한 연립부등식을 풀면

$\therefore\ 5 \le k \le 7$

답 ④

T004 | 답 ③

[풀이]

두 집합 A, B에 모두 속하는 원소는 3, 4, 5이므로

$A \cap B = \{3,\ 4,\ 5\}$

$\therefore\ n(A \cap B) = 3$

답 ③

T005 | 답 ④

[풀이]

집합 A에 속하거나 집합 B에 속하는 원소는 1, 2, 4이므로

$A \cup B = \{1,\ 2,\ 4\}$

따라서 구하는 값은 $1+2+4=7$이다.

답 ④

T006 | 답 ⑤

[풀이]

주어진 조건 $A \cap B = \{4,\ 5\}$에서 $4 \in A$이므로

$a^2 - a - b = 4$ $\cdots$㉠

주어진 조건 $A \cap B = \{4,\ 5\}$에서 $4 \in B$, $5 \in B$이므로

$b-3=4$, $a^2+4a+7=5$ $\cdots$㉡

또는

$b-3=5$, $a^2+4a+7=4$ $\cdots$㉢

㉡에서 $b=7$이고, 이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$a^2 - a - 11 = 0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$a = \dfrac{1+3\sqrt{5}}{2}$ 또는 $a = \dfrac{1-3\sqrt{5}}{2}$

이 두 근은 ㉡에서 주어진 a에 대한 이차방정식의 해가 될 수 없다.

즉, ㉠, ㉡을 모두 만족시키는 a, b는 존재하지 않는다.

이제 ㉠, ㉢을 연립하자.

㉢에서 $b=8$이고, 이를 ㉠에 대입하여 정리하면

$a^2 - a - 12 = 0$

좌변을 인수분해하면

$(a-4)(a+3)=0$

풀면

$a=4$ 또는 $a=-3$ $\cdots$㉣

㉢에서 주어진 a에 대한 일차방정식은

$a^2+4a+3=0$

좌변을 인수분해하면

$(a+1)(a+3)=0$

풀면

$a=-1$ 또는 $a=-3$ $\cdots$ ㉤

㉣, ㉤에서 $a=-3$

$\therefore\ a+b=-3+8=5$

답 ⑤

T007 | 답 ④

[풀이]

(가), (나), (다)의 집합을 각각 A, B, C라고 하자.

두 집합 A, $\{1,\ 2\}$의 합집합이 $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이므로

$\{3,\ 5\}\subset A\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$ $\cdots$ ㉠

두 집합 C, $\{1,\ 5\}$의 합집합이 B이므로

$\{1,\ 5\}\subset B$

두 집합 B, $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$의 교집합이 A이므로

$\{1,\ 5\}\subset A$ $\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에 의하여

$\{1,\ 3,\ 5\}\subset A$ $\cdots$ ㉢

그런데 집합 A는 두 집합 $\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$, B의 교집합이므로

$2\not\in A$ $\cdots$ ㉣

㉠, ㉢, ㉣에 의하여 $A=\{1,\ 3,\ 5\}$이다.

답 ④

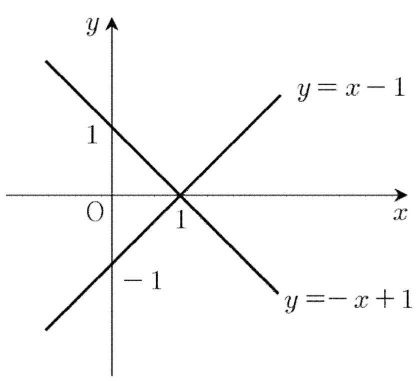
T008 | 답 ⑤

[풀이1]

집합 A에서 주어진 방정식을 풀면

$y=-x+1$ 또는 $y=x-1$

이를 좌표평면에 나타내면



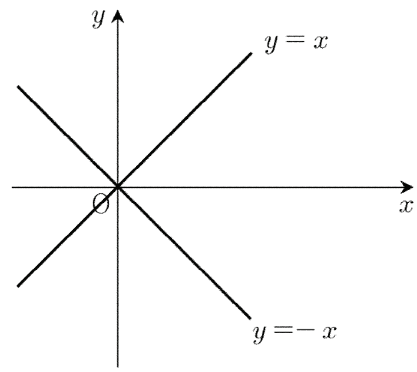
집합 B에서 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면

$(x+y)(x-y)=0$

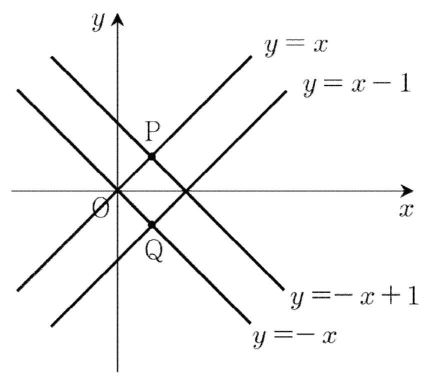
풀면

$y=-x$ 또는 $y=x$

이를 좌표평면에 나타내면



아래 그림처럼 집합 A에서 주어진 도형과 집합 B에서 주어진 도형은 서로 다른 두 점에서 만나며, 두 점을 각각 P, Q라고 하자.



집합 $A\cap B$는

$A\cap B=\{\mathrm{P},\ \mathrm{Q}\}$

$\therefore\ n(A\cap B)=2$

답 ⑤

[풀이2]

집합 A에서 주어진 방정식을 풀면

$y=-x+1$ $\cdots$ ㉠

또는

$y=x-1$ $\cdots$ ㉡

㉠을 집합 B에서 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-(-x+1)^2=0$

정리하면

$2x-1=0$

풀면 $x=\dfrac{1}{2}$

이를 ㉠에 대입하면 $y=\dfrac{1}{2}$

㉡을 집합 B에서 주어진 방정식에 대입하면

$x^2-(x-1)^2=0$

정리하면

$2x-1=0$

풀면 $x=\frac{1}{2}$

이를 ㉡에 대입하면 $y=-\frac{1}{2}$

집합 $A\cap B$는

$A\cap B=\left\{\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)\right\}$

$\therefore\ n(A\cap B)=2$

답 ⑤

T009 | 답 ④

[풀이1]

2와 서로소인 자연수는 1, 3, 5, 7, 9, $\cdots$이므로

$A_2=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots\}$

3과 서로소인 자연수는 1, 2, 4, 5, 7, $\cdots$이므로

$A_3=\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 7,\ 8,\ 10,\ 11,\ \cdots\}$

4와 서로소인 자연수는 1, 3, 5, 7, 9, $\cdots$이므로

$A_4=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11,\ \cdots\}$

6과 서로소인 자연수는 1, 5, 7, 11, 13, $\cdots$이므로

$A_6=\{1,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ \cdots\}$

▸ ㄱ. (참)

$A_2\subset A_4$이고 $A_4\subset A_2$이므로 $A_2=A_4$이다.

▸ ㄴ. (거짓)

$2\in A_3$이지만 $2\not\in A_6$이므로 $A_3\neq A_6$이다.

▸ ㄷ. (참)

$A_3\cap A_4=\{1,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ \cdots\}$

$(A_3\cap A_4)\subset A_6$이고 $A_6\subset(A_3\cap A_4)$이므로

$A_3\cap A_4=A_6$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

[풀이2]

▸ ㄱ. (참)

두 집합 A_2, A_4는 각각

$A_2=\{x\mid x$는 2와 서로소인 자연수$\}$

$A_4=\{x\mid x$는 4와 서로소인 자연수$\}$

집합 A_2에 속하는 임의의 원소 x에 대하여

x와 2의 최대공약수는 1이므로

x와 4의 최대공약수는 1이다.

따라서 x와 4는 서로소이므로 $x\in A_4$

$A_2\subset A_4$ $\cdots$㉠

집합 A_4에 속하는 임의의 원소 x에 대하여

x와 4의 최대공약수는 1이므로

x와 2의 최대공약수는 1이다.

따라서 x와 2는 서로소이므로 $x\in A_2$

$A_4\subset A_2$ $\cdots$㉡

㉠, ㉡에서 $A_2=A_4$이다.

▸ ㄴ. (거짓)

(반례)

두 집합 A_3, A_6은 각각

$A_3=\{x\mid x$는 3과 서로소인 자연수$\}$

$A_6=\{x\mid x$는 6과 서로소인 자연수$\}$

2와 3의 최대공약수는 1이다.

2와 3은 서로소이므로 $2\in A_3$ $\cdots$㉢

2와 6의 최대공약수는 2이다.

2와 6은 서로소가 아니므로 $2\not\in A_6$ $\cdots$㉣

㉢, ㉣에서 $A_3\neq A_6$이다.

▸ ㄷ. (참)

집합 A_6에 속하는 임의의 원소 x에 대하여

x와 3의 최대공약수는 1이므로 x와 3은 서로소다.

$x\in A_3$

집합 A_6에 속하는 임의의 원소 x에 대하여

x와 4의 최대공약수는 1이므로 x와 4는 서로소다.

$x\in A_4$

그러므로 $x\in A_3\cap A_4$ $\cdots$㉤

집합 $A_3\cap A_4$에 속하는 임의의 원소 x에 대하여

x와 6의 최대공약수는 1이므로 x와 6은 서로소다.

$x\in A_6$ $\cdots$㉥

㉤, ㉥에서 $A_6=A_3\cap A_4$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

T010 | 답 5

[풀이]

전체집합 U에 대하여 집합 B의 여집합은

$B^C=\{1,\ 3,\ 5,\ 7\}$

집합 A에 속하거나 집합 B^C에 속하는 원소는 1, 2, 3, 5, 7이므로

$A\cup B^C=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 7\}$

$\therefore\ n(A\cup B^C)=5$

답 5

T011 | 답 ③

[풀이]

집합 A의 원소 중에서 집합 B에 속하는 원소는 1, 5이므로

$A-B=\{3,\ 7\}$

따라서 구하는 값은 $10(=3+7)$이다.

답 ③

T012 | 답 ①

[풀이]

여집합과 차집합의 성질에 의하여

$B^C-A^C=B^C\cap(A^C)^C=B^C\cap A$

$=A\cap B^C=A-B=\{2,\ 6\}$

집합 B^C-A^C의 모든 원소의 합은 8이다.

답 ①

T013 | 답 7

[풀이]

차집합의 성질에 의하여

$A-B=A\cap B^C$

이므로 집합 B는 3을 원소로 가져야 한다.

$a-4=3$

$\therefore\ a=7$

답 7

T014 | 답 16

[풀이]

조건제시법에 의하여 집합 A^C은

$A^C=\{x\in U\mid x\text{는 짝수}\}$

차집합의 성질에 의하여

$A^C\cap B=B-A$

이므로 집합 $A^C\cap B$는 100 이하의 양의 3의 배수 중에서 짝수만을 원소로 갖는 집합이다.

다시 말하면 집합 $A^C\cap B$는 100 이하의 양의 6의 배수이다.

원소나열법에 의하여 집합 $A^C\cap B$는

$A^C\cap B=\{6,\ 12,\ 18,\ 24,\ \cdots,\ 96\}$

$100=6\times16+4$이므로

$\therefore\ n(A^C\cap B)=16$

답 16

T015 | 답 ②

[풀이]

주어진 벤 다이어그램에서 어두운 부분은 집합 A에서 집합 $B\cup C$를 제외한 것으로 생각할 수 있다.

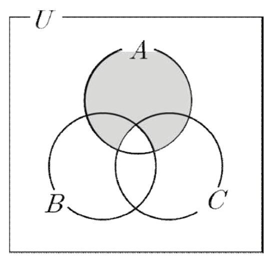
따라서 구하는 집합은 차집합의 성질에 의하여

$A-(B\cup C)=A\cap(B\cup C)^C$

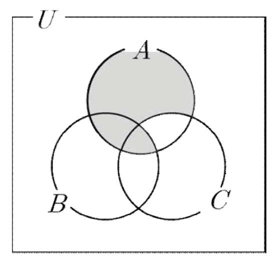
답 ②

[참고]

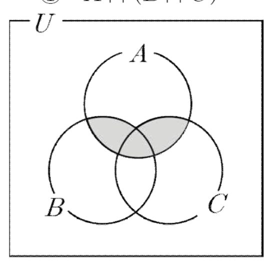
나머지 보기에서 주어진 집합을 벤 다이어그램을 이용하여 나타내면 다음과 같다.



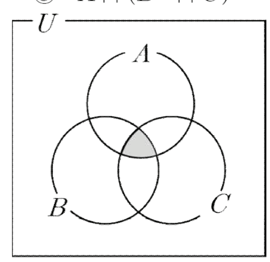
①: $A\cap(B\cap C)^C$



③: $A\cap(B^C\cap C)^C$



④: $A\cap(B^C\cap C^C)^C$



⑤: $A\cap(B^C\cup C^C)^C$

T016 | 답 ④

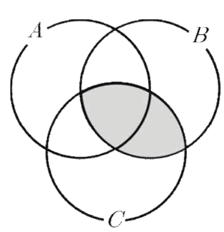
[풀이]

문제에서 주어진 벤 다이어그램에서 어두운 부분은 집합 $B\cap C$에서 집합 $A\cap B\cap C$를 제외한 집합이다.

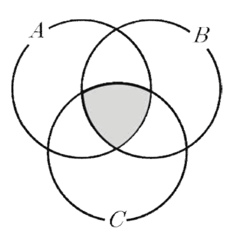
답 ④

[참고]

나머지 보기에서 주어진 집합을 벤 다이어그램을 이용하여 나타내면 다음과 같다.



①번, ⑤번



②번, ③번

T017 | 답 10

[풀이]

여집합의 정의에 의하여

$B^C = \{1,\ 2,\ 7,\ 8\}$

합집합의 정의에 의하여

$A \cup B^C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 7,\ 8\}$

차집합의 정의에 의하여

$(A \cup B^C) - C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$

따라서 구하는 값은

$1+2+3+4=10$

답 10

T018 | 답 7

[풀이]

원소나열법에 의하여 집합 A, A^C, B, C는 각각

$A = \{2,\ 3,\ 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 17,\ 19\}$

$A^C = \{1,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 18,\ 20\}$

$B = \{3,\ 6,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18\}$

$C = \{5,\ 10,\ 15,\ 20\}$

합집합의 정의에 의하여

$B \cup C = \{3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15,\ 18,\ 20\}$

차집합의 성질에 의하여

$(B \cup C) \cap A^C = (B \cup C) - A$

$= \{6,\ 9,\ 10,\ 12,\ 15,\ 18,\ 20\}$

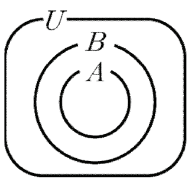
$\therefore\ n((B \cup C) \cap A^C) = 7$

답 7

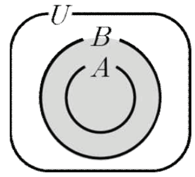
T019 | 답 ③

[풀이]

두 집합 A, B의 포함관계를 벤 다이어그램을 이용하여 나타내면 다음과 같다.

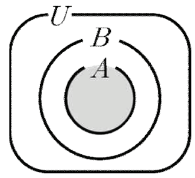


① (참)



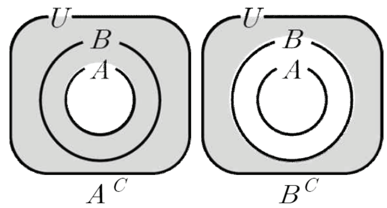
$A \subset B$이므로 $A \cup B = B$이다.

② (참)



$A \subset B$이므로 $A \cap B = A$이다.

③ (거짓)



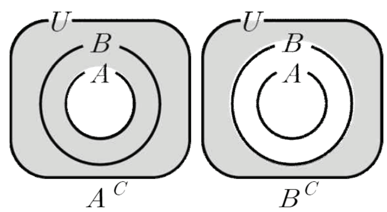
$A \cap B = A$이므로 $(A \cap B)^C = A^C$이다.

$A \subset B$이므로 $B^C \subset A^C$이다.

$B^C \subset (A \cap B)^C$이지만 $(A \cap B)^C \not\subset B^C$이므로

$(A \cap B)^C \neq B^C$

④ (참)



$A \subset B$이므로 $B^C \subset A^C$이다.

⑤ (참)

차집합의 성질에 의하여

$A - B = A \cap B^C = \varnothing$

이상에서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ③이다.

답 ③

T020 | 답 ③

[풀이]

집합의 연산법칙과 여집합의 성질에 의하여

$A \cup (A^C \cap C) = (A \cup A^C) \cap (A \cup C)$

$= U \cap (A \cup C) = A \cup C$

주어진 조건에 의하여 $A \cup C = A$이므로 $C \subset A$이다.

차집합의 성질에 의하여

$B \cap C^C = B - C = \varnothing$ 이므로 $B \subset C$이다.

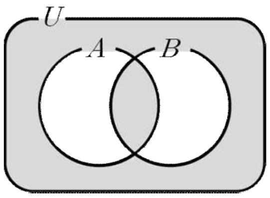
$\therefore \; B \subset C \subset A$

답 ③

T021 | 답 ①

[풀이]

집합 $A * B$를 벤 다이어그램을 이용하여 나타내면 다음과 같다.



① (거짓)

집합의 연산법칙과 여집합의 성질에 의하여

$A * U = (A \cap U) \cup (A \cup U)^C$

$= A \cup \varnothing = A \neq U$

왜냐하면 집합 A가 항상 전체집합인 것은 아니기 때문이다.

② (참)

집합의 연산법칙에 의하여

$B * A = (B \cap A) \cup (B \cup A)^C$

$= (A \cap B) \cup (A \cup B)^C = A * B$

③ (참)

집합의 연산법칙과 여집합의 성질에 의하여

$A * \varnothing = (A \cap \varnothing) \cup (A \cup \varnothing)^C = \varnothing \cup A^C = A^C$

④ (참)

집합의 연산법칙, 여집합의 성질, 드모르간 법칙에 의하여

$A^C * B^C = (A^C \cap B^C) \cup (A^C \cup B^C)^C$

$= (A \cup B)^C \cup (A \cap B) = (A \cap B) \cup (A \cup B)^C$

$= A * B$

⑤ (참)

집합의 연산법칙과 여집합의 성질에 의하여

$A * A^C = (A \cap A^C) \cup (A \cup A^C)^C$

$= \varnothing \cup U^C = \varnothing \cup \varnothing = \varnothing$

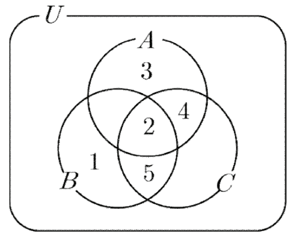
이상에서 항상 성립한다고 할 수 없는 것은 ①이다.

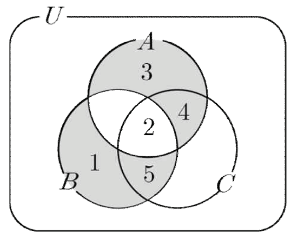
답 ①

T022 | 답 ③

[풀이]

세 집합 A, B, C를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.

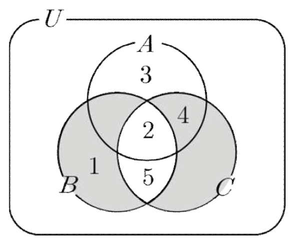




$A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$, $A \cap B = \{2\}$

$(A \cup B) - (A \cap B) = \{1, 3, 4, 5\}$

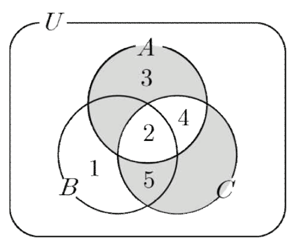
$1 \in B$이므로 B ⇨ A



$B \cup C = \{1, 2, 4, 5\}$, $B \cap C = \{2, 5\}$

$(B \cup C) - (B \cap C) = \{1, 4\}$

$1 \in B$이므로 B ⇨ C



$A \cup C = \{2, 3, 4, 5\}$, $A \cap C = \{2, 4\}$

$(A \cup C) - (A \cap C) = \{3, 5\}$

$3 \in A$이므로 A ⇨ C

이상에서 아래의 관계를 얻는다.

B ⇨ A ⇨ C

답 ③

T023 | 답 23

[풀이]

차집합의 성질에 의하여

$A \cap B^C = A - B = A$이므로 $A \cap B = \varnothing$이다.

$n(A \cap B) = 0$이므로

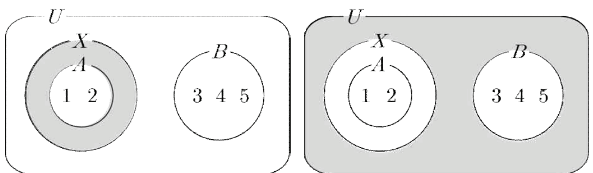
$\therefore \; n(A \cup B) = n(A) + n(B) = 9 + 14 = 23$

답 23

T024 | 답 8

[풀이]
문제에서 주어진 조건 $X\cup A=X$에서
$A\subset X$
문제에서 주어진 조건 $X\cap B^C=X$에서
$X\subset B^C$이므로 $A\subset X\subset B^C$
$A=\{1,\ 2\}$, $B^C=U-B=\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$
이므로
$\{1,\ 2\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$
다시 말하면 집합 $\{1,\ 2,\ 6,\ 7,\ 8\}$의 부분집합인
X는 1과 2를 반드시 원소로 가져야 한다.
집합 X의 개수는 집합 $\{6,\ 7,\ 8\}$의 부분집합의 개수와
같으므로 집합 X의 개수는 $8(=2^{5-2}=2^3)$이다.
답 8

[참고]
집합 X의 개수를 다음과 같이 구해도 좋다.

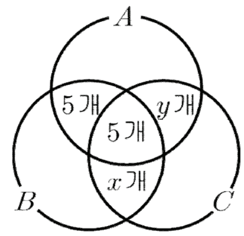


$X-A$　　　$(U-B)-X$

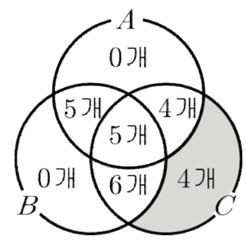
6, 7, 8은 각각 집합 $X-A$의 원소이거나
집합 $(U-B)-X$의 원소이다.
따라서 곱의 법칙에 의하여 집합 X의 개수는 2^3이다.

T025 | 답 4

[풀이]
문제에서 주어진 조건에 의하여
$n(A\cap B)=10$, $n(A\cap B\cap C)=5$
이므로
$n((A\cap B)-C)=10-5=5$
이다.
$n((B\cap C)-A)=x$, $n((C\cap A)-B)=y$
로 두자. (단, x는 6 이하의 음이 아닌 정수이고,
y는 4 이하의 음이 아닌 정수이다.)



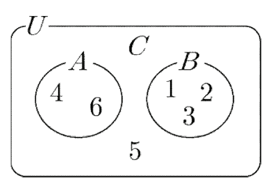
$n(C)$의 값이 일정하므로 x, y의 값이 각각 최대가 될 때,
$n(C-(A\cup B))$의 값은 최소가 된다.
$n(C-(A\cup B))=19-(5+x+y)\geq 19-(5+6+4)=4$
(단, 등호는 $x=6$, $y=4$일 때 성립한다.)



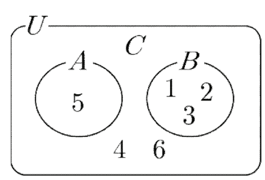
답 4

T026 | 답 8

[풀이]
$B=\{1,\ 2,\ 3\}$, $C=U-(A\cup B)$로 두자.
문제에서 주어진 조건은
$A\cap B=\varnothing$
이므로
$1\not\in A$, $2\not\in A$, $3\not\in A$
4, 5, 6은 각각 집합 A의 원소이거나, 집합 C의 원소이다.
이때, $A\cap C=\varnothing$이다.
예를 들어 $4\in A$, $5\in C(5\not\in A)$, $6\in A$이면



예를 들어 $4\in C(4\not\in A)$, $5\in A$, $6\in C(6\not\in A)$이면



곱의 법칙에 의하여 모든 집합 A의 개수는
$2\times2\times2=8$이다.
답 8

T027 | 답 24

[풀이1]
우선 $\{2, 3\} \cap A = \varnothing$을 만족시키는 집합 A의 개수를 구하자.
집합 A의 개수는 집합 $\{1, 4, 5\}$의 부분집합의 개수와 같으므로
곱의 법칙에 의하여 집합 A의 개수는 2^3이다.
곱의 법칙에 의하여 전체집합 U의 부분집합의 개수가 2^5이므로
집합 A의 개수는 $2^5 - 2^3 = 24$
답 24

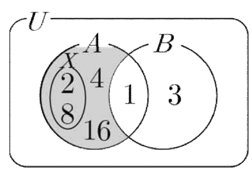
[풀이2]
주어진 조건에서 집합 A는 2 또는 3 중에서 적어도 하나 이상을 원소로 가져야 한다.
(1) $2 \in A$, $3 \not\in A$인 경우
집합 A의 개수는 집합 $\{1, 4, 5\}$의 부분집합의 개수와 같다.
왜냐하면 집합 A는 집합 $\{1, 4, 5\}$의 부분집합과 집합 $\{2\}$의 합집합이기 때문이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 2^3이다.
(2) $2 \not\in A$, $3 \in A$인 경우
집합 A의 개수는 집합 $\{1, 4, 5\}$의 부분집합의 개수와 같다.
왜냐하면 집합 A는 집합 $\{1, 4, 5\}$의 부분집합과 집합 $\{3\}$의 합집합이기 때문이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 2^3이다.
(3) $2 \in A$, $3 \in A$인 경우
집합 A의 개수는 집합 $\{1, 4, 5\}$의 부분집합의 개수와 같다.
왜냐하면 집합 A는 집합 $\{1, 4, 5\}$의 부분집합과 집합 $\{2, 3\}$의 합집합이기 때문이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 2^3이다.
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$2^3 + 2^3 + 2^3 = 24$
답 24

T028 | 답 13

[풀이]
조건 (나)에서 주어진 식을 정리하자.
$A \cap (A^C \cup B) = (A \cap A^C) \cup (A \cap B)$
$= \varnothing \cup (A \cap B) = A \cap B \neq \varnothing$이므로
$n(A \cap B) \geq 1$이다.
$n(B - A) = n(U) - n(A - B) - n(A \cap B)$
$= 25 - 11 - n(A \cap B)$ ($\because$ 조건(가), (다))
≤ 13
(단, 등호는 $n(A \cap B) = 1$일 때 성립한다.)
따라서 구하는 값은 13이다.
답 13

T029 | 답 6

[풀이]
집합 B에서 주어진 방정식의 좌변을 인수분해하면
$(x-1)(x-3) = 0$
풀면
$x = 1$ 또는 $x = 3$
그러므로
$B = \{1, 3\}$
$A - B = \{2, 4, 8, 16\}$
$X - (A - B) = \varnothing$이므로
$X \subset A - B$
그런데 $n(X) = 2$이므로 X는 집합 $A - B$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 집합이다.
예를 들어 다음과 같이 $X = \{2, 8\}$인 경우가 가능하다.



따라서 집합 X의 개수는 조합의 수에 의하여
${}_4C_2 = 6$
답 6

T030 | 답 13

[풀이]
20종류의 스티커의 집합을 U,
갑이 모은 4종류의 스티커의 집합을 A,
을이 모은 5종류의 스티커의 집합을 B,
병이 모은 5종류의 스티커의 집합을 C
라고 하면 주어진 조건에서
$n(U) = 20$, $n(A) = 4$, $n(B) = 5$, $n(C) = 5$
$n(A \cap B) = n(B \cap C) = n(C \cap A) = 3$
$n(A \cap B \cap C) = 2$

이므로

$n(A\cup B\cup C)=n(A)+n(B)+n(C)$

$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$

$+n(A\cap B\cap C)$

$=4+5+5-3-3-3+2=7$

따라서 최소로 더 필요한 스티커의 종류의 수는 13이다.

답 13

T031 | 답 20

[풀이]

전체집합을 U로 두면

$U=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ 30\}$

문제에서 예를 든 집합

$\{1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 20\}$

의 원소 중에는 3의 배수가 없으므로 이 집합에 속하는 어떤 두 원소의 곱도 6의 배수가 아니다.

문제에서 예를 든 집합

$\{3,\ 5,\ 9,\ 15\}$

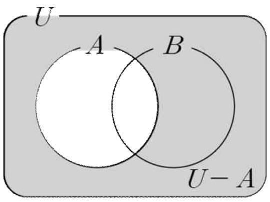
의 원소 중에는 2의 배수가 없으므로 이 집합에 속하는 어떤 두 원소의 곱도 6의 배수가 아니다.

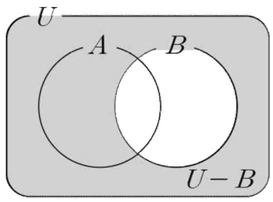
따라서 U의 부분집합 중에서 2의 배수와 3의 배수가 동시에 속하지 않는 집합을 찾으면 된다.

U의 부분집합 중 2의 배수만을 원소로 갖는 집합을 A, 3의 배수만을 원소로 갖는 집합을 B라고 하면

$n(A)=15$이므로 $n(U-A)=15$

$n(B)=10$이므로 $n(U-B)=20$





따라서 구하는 집합 M은 $U-B$이다. 이때, 집합 M의 원소의 개수는 20이다.

답 20

T032 | 답 ②

[풀이] ★

▸ ㄱ. (참)

여집합의 성질에 의하여

$A\cup A^C=U,\ A\cap A^C=\varnothing$

$f(A)+f(A^C)=1+2+\cdots+100$

$f(U)=1+2+\cdots+100$

이므로

$f(A)+f(A^C)=f(U)$

식을 변형하면

$f(A^C)=f(U)-f(A)$

▸ ㄴ. (참)

(1) $A=B$인 경우

$A=B$이므로 $f(A)=f(B)$

(2) 집합 A가 집합 B의 진부분집합인 경우

$A\cup(B-A)=B,\ A\cap(B-A)=\varnothing$

보기 ㄱ의 결과에 의하여

$f(B-A)=f(B)-f(A)>0(\because B-A\neq\varnothing)$

정리하면

$f(A)<f(B)$

(1), (2)에서

$f(A)\leq f(B)$(단, 등호는 $A=B$일 때 성립한다.)

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

$A=\{1\},\ B=\{1\}$이라고 하면 $A\cup B=\{1\}$이다.

$f(A)=1,\ f(B)=1,\ f(A\cup B)=1$

이므로

$f(A\cup B)=1\neq 2=f(A)+f(B)$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

T033 | 답 ⑤

[풀이]

차집합의 성질에 의하여

$A-B=A\cap B^C$

이므로

$(A\cap B^C)^C\subset B$

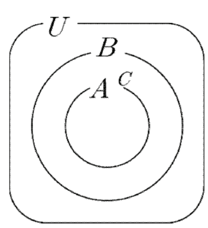
드모르간의 법칙에 의하여

$(A^C\cup B)\subset B$

이므로

$A^C\subset B$

이를 벤 다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



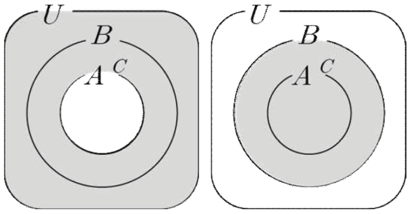
이때, 집합 A^C가 반드시 집합 B의 진부분집합인 것은 아니다.

즉, 두 집합 A^C, B가 같을 수도 있다.

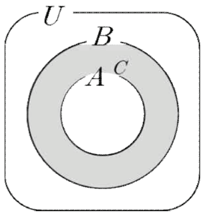
▸ ㄱ. (거짓)

(1) 집합 A^C가 집합 B의 진부분집합인 경우

두 집합 A, B는 각각



이므로 집합 $A\cap B$는



$A\cap B\neq\varnothing$

(2) 두 집합 A^C, B가 같은 경우

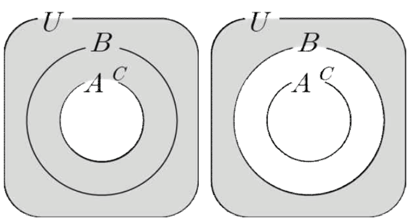
여집합의 성질에 의하여

$A\cap B=A\cap A^C=\varnothing$

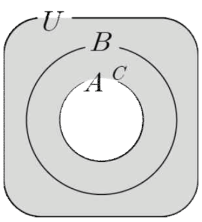
(1), (2)에서 $A\cap B$가 반드시 공집합인 것은 아니다.

▸ ㄴ. (참)

두 집합 A, B^C은 각각



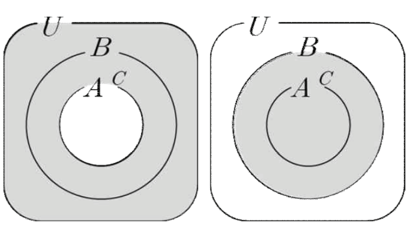
이므로 집합 $A\cup B^C$은



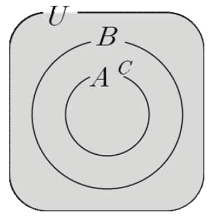
$A\cup B^C=A$

▸ ㄷ. (참)

두 집합 A, B는 각각



이므로 집합 $A\cup B$는



$A\cup B=U$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

T034 | 답 15

[풀이]

두 방정식 $P(x)=0$, $Q(x)=0$의 해집합을 각각 P, Q라고 하자.

그리고 두 방정식 $P(x)=0$, $Q(x)=0$의 서로 다른 실근을 각각 α_i, β_j라고 하자. (단, $1\le i\le 7$, $1\le j\le 9$)

$P\cap Q=\varnothing$이라고 가정하자. (즉, $\alpha_i\neq\beta_j$)

$P(\alpha_i)=0$, $Q(\alpha_i)\neq 0$이고 $P(\beta_j)\neq 0$, $Q(\beta_j)=0$

이므로 집합 A는

$A=\{(x,\ y)\mid x=y=\alpha_i,\ 1\le i\le 7\}$

$\cup\{(x,\ y)\mid x=y=\beta_j,\ 1\le j\le 9\}$

이는 A가 무한집합이라는 가정에 모순이다.

따라서 $P\cap Q\neq\varnothing$이고 $n(P\cap Q)\ge 1$

집합 B는

$B=\{(x,\ x)\mid P(x)Q(x)=0\}$

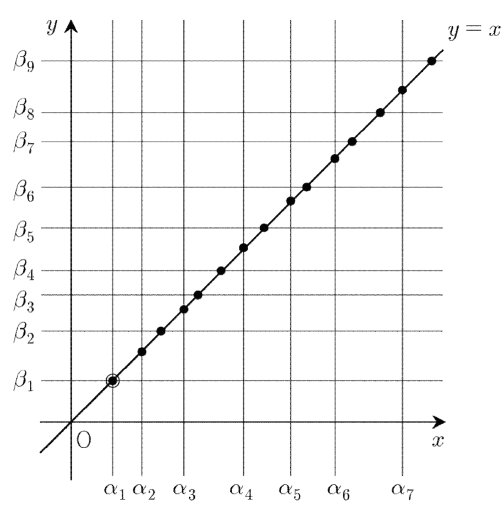
$=\{(x,\ x)\mid P(x)=0$ 또는 $Q(x)=0\}$

합집합과 교집합의 원소의 개수에 대한 공식에 의하여

$n(B)=n(P\cup Q)=n(P)+n(Q)-n(P\cap Q)$

$\le 7+9-1=15$

(단, 등호는 $n(P\cap Q)=1$일 때 성립한다.)



답 15

T035 | 답 ⑤

[풀이1]
주어진 이차부등식을 풀면
$x \le 0$ 또는 $x \ge 11$ (단, x는 정수)
p의 진리집합은
$P = \{\cdots,\ -2,\ -1,\ 0,\ 11,\ 12,\ \cdots\}$
$\sim p$의 진리집합은
$P^C = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$
$\therefore\ n(P^C) = 10$
답 ⑤

[풀이2]
$\sim p:\ x(x-11) < 0$
위의 이차부등식을 풀면
$0 < x < 11$ (단, x는 정수)
$\sim p$의 진리집합은
$P^C = \{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 10\}$
$\therefore\ n(P^C) = 10$
답 ⑤

T036 | 답 ⑤

[풀이]
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면
$P = \{x \mid x \ne -2,\ x \ne 4\}$,
$Q = \{x \mid -2 \le x \le 4\}$
(단, P, Q는 실수 전체의 집합의 부분집합이다.)
두 조건 $\sim p$, $\sim q$의 진리집합은 각각
$P^C = \{-2,\ 4\}$,
$Q^C = \{x \mid x < -2$ 또는 $x > 4\}$
① (거짓)
$P \not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
반례로 $x = 5$를 생각할 수 있다.
즉, $5 \in P$이지만 $5 \notin Q$이다.
② (거짓)
$P^C \not\subset Q^C$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
반례로 $x = -2$를 생각할 수 있다.
즉, $-2 \in P^C$이지만 $-2 \notin Q^C$이다.
③ (거짓)
$Q \not\subset P^C$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
반례로 $x = 0$을 생각할 수 있다.
즉, $0 \in Q$이지만 $0 \notin P^C$이다.
④ (거짓)
④에서 주어진 명제는 ②에서 주어진 명제의 대우이다.
②의 명제가 거짓이므로 ④의 명제도 거짓이다.
⑤ (참)
$P^C \subset Q$이므로 주어진 명제는 참이다.
이상에서 참인 명제는 ⑤뿐이다.
답 ⑤

T037 | 답 ④

[풀이]
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.
$p \Rightarrow q$이므로 $P \subset Q$이다. 즉, $a \in Q$이다.
$a^2 - 3a - 4 \le 0$, $(a-4)(a+1) \le 0$
풀면
$-1 \le a \le 4$
따라서 실수 a의 최댓값은 4이다.
답 ④

T038 | 답 ②

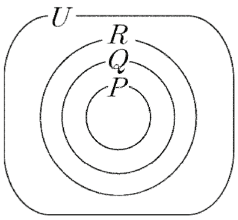
[풀이]
세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R이라고 하면
$P = \{x \mid x < -4$ 또는 $x > 4\}$
$Q = \{x \mid -3 \le x \le 3\}$
$R = \{x \mid x \le 3\}$
(단, 세 집합 P, Q, R은 실수 전체의 집합의 부분집합이다.)
▸ ㄱ. (참)
$Q \subset R$이므로 명제 $q \to r$는 참이다.
▸ ㄴ. (참)
q의 부정 $\sim q$의 진리집합은
$Q^C = \{x \mid x < -3$ 또는 $x > 3\}$
$P \subset Q^C$이므로 명제 $p \to \sim q$는 참이다.
▸ ㄷ. (거짓)
p의 부정 $\sim p$의 진리집합은
$P^C = \{x \mid -4 \le x \le 4\}$
$R \not\subset P^C$이므로 명제 $r \to \sim p$는 거짓이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ②

T039 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 조건에서

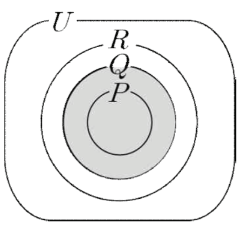
$p \to q$이므로 $P \subset Q$, $q \to r$이므로 $Q \subset R$



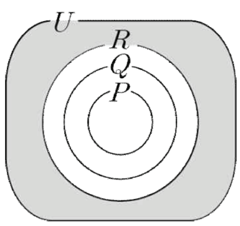
▸ ㄱ. (참)

$P \subset Q$이고 $Q \subset R$이므로 $P \subset R$이다.

▸ ㄴ. (거짓)



$P \cup Q$

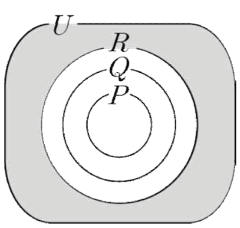


R^C

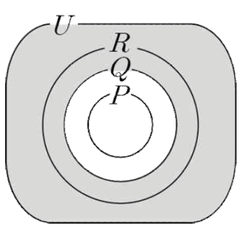
$P \cup Q = Q$이므로 $P \cup Q \subset R$이다.

$\therefore$ $P \cup Q \not\subset R^C$

▸ ㄷ. (참)



$P^C \cap R^C$



Q^C

$P \cup R = R$이므로 드모르간의 법칙에 의하여

$P^C \cap R^C = (P \cup R)^C = R^C$이다.

$\therefore$ $(P^C \cap R^C) \subset Q^C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

T040 | 답 ④

[풀이]

모든 양의 실수 x에 대하여 주어진 부등식

$x > a - 4$

가 성립하기 위해서는

$a - 4 \leq 0$ 즉, $a \leq 4$

a는 4 이하의 자연수이므로 a의 개수는 4이다.

답 ④

T041 | 답 ①

[풀이]

카드의 한 쪽 면에 '홀수' 가 쓰여 있으면 다른 쪽 면에 '자음' 이 쓰여 있어야 한다.(⋯(*)) 이를 확인하기 위하여 '홀수' ⑦이 쓰인 카드를 확인해야 한다.

(*)의 대우명제는 다음과 같다.

카드의 한 쪽 면에 '모음' 이 쓰여 있으면 다른 쪽 면에 '짝수' 가 쓰여 있어야 한다. 이를 확인하여 위하여 '모음' Ⓤ 가 쓰인 카드를 확인해야 한다.

답 ①

T042 | 답 ②

[풀이]

주어진 명제의 가정을 p, 결론을 q라고 하면

'p: $a \geq \sqrt{3}$' 이므로 '$\sim p$: $a < \sqrt{3}$'

'q: $a^2 \geq 3$' 이므로 '$\sim q$: $a^2 < 3$'

$p \to q$의 대우는 $\sim q \to \sim p$이므로

주어진 명제의 대우는 다음과 같다.

'$a^2 < 3$이면 $a < \sqrt{3}$이다.'

답 ②

T043 | 답 ①

[풀이]

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.

조건 p에서 주어진 일차방정식을 풀면

$x = 1 + \frac{a}{2}$ 즉, $P = \left\{1 + \frac{a}{2}\right\}$

조건 q에서 주어진 연립일차부등식을 풀면

$\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{13}{2}$ 즉, $Q = \left\{x \,\middle|\, \frac{3}{2} \leq x \leq \frac{13}{2}\right\}$

p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$이다.

$\frac{3}{2} \leq 1 + \frac{a}{2} \leq \frac{13}{2}$

연립일차부등식을 풀면

$1 \leq a \leq 11$

따라서 자연수 a의 개수는 11이다.

답 ①

T044 | 답 ③

[풀이]

조건 p의 부정은

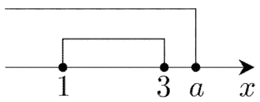
$\sim p$: $x^2-4x+3 \le 0$

위의 이차부등식의 좌변을 인수분해하면

$(x-1)(x-3) \le 0$

풀면

$\sim p$: $1 \le x \le 3$



$\sim p$가 q이기 위한 충분조건이 되도록 하는 실수 a의 범위는

$a \ge 3$

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다.

답 ③

T045 | 답 ⑤

[풀이]

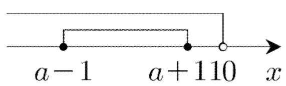
조건 p에서 주어진 부등식을 풀면

$-1 \le x-a \le 1$, $a-1 \le x \le a+1$

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P=\{x \mid a-1 \le x \le a+1\}$, $Q=\{x \mid x<10\}$

p가 q이기 위한 충분조건이므로 $P \subset Q$이다.



$a+1<10$이어야 하므로 $a<9$

따라서 정수 a의 최댓값은 8이다.

답 ⑤

T046 | 답 ④

[풀이]

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하면

$P \subset Q$이므로 $a \in Q$이다.

$3a^2-a^2-32=0$, $a^2=16$

$\therefore\ a=4(\because a>0)$

답 ④

T047 | 답 ②

▶ 실전풀이: [풀이2]

[풀이1]

(1) $a=0$인 경우

$|a|=0$이므로 문제에서 주어진 부등식은

$0<|b| \Leftrightarrow |b| \ne 0 \Leftrightarrow b \ne 0$

예를 들어 $(a,\ b)=(0,\ -1)$은

문제에서 주어진 부등식을 만족시킨다.

① $(a,\ b)=(0,\ -1)$은 부등식 $a<b$를 만족시키지 않는다.

③ $\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}$에서 a는 0일 수 없다.

④ $(a,\ b)=(0,\ -1)$은 부등식 $|a|<b$를 만족시키지 않는다.

따라서 ①, ③, ④는 답일 수 없다.

(2) $a \ne 0$인 경우

$|a| \ne 0$이므로

문제에서 주어진 부등식이 성립하기 위해서는

$|b| \ne 0$이다.

이제 $A=|a|$, $B=|b|$로 두고,

문제에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$A<B$

②에서 주어진 부등식을 다시 쓰면

$A^2<B^2$ $(\because\ |a|^2=a^2,\ |b|^2=b^2)$

그런데 A, B가 실수이고, $A>0$, $B>0$일 때,

다음의 필요충분조건이 성립한다.

$A<B \Leftrightarrow A^2<B^2$ (← 교과서 본문에 소개됨)

따라서 a, b가 실수일 때,

$|a|<|b| \Leftrightarrow a^2<b^2$ (그러므로 ②가 답이다.)

$(a,\ b)=(-1,\ 0)$이면 $|-1|>|0|$이므로

문제에서 주어진 부등식은 만족시키지 않지만

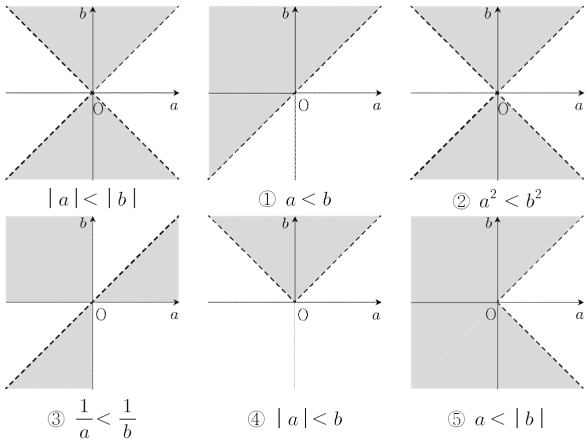
$-1<|0|$이므로 ⑤에서 주어진 부등식은 만족시킨다.

따라서 문제에서 주어진 부등식과 ⑤에서 주어진 부등식은 필요충분조건이 아니다.

답 ②

[풀이2]

문제에서 주어진 6개의 부등식의 영역을 서로 다른 좌표평면에 나타내면



이상에서 주어진 부등식과 필요충분조건인 부등식은 ②이다.

답 ②

[풀이3] (선택)

문제에서 주어진 부등식을 풀자.

$b=0$을 문제에서 주어진 부등식에 대입하면

$|a|<0$

이를 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

따라서 $b\neq 0$이다.

$b>0$이면 문제에서 주어진 부등식은

$|a|<b$

$a\geq 0$이면 $a<b$

$a<0$이면 $-a<b$

$b<0$이면 문제에서 주어진 부등식은

$|a|<-b$

$a\geq 0$이면 $a<-b$

$a<0$이면 $-a<-b$

이상에서 부등식의 해는

$a\geq 0$, $b>0$일 때, $a<b$ …㉠

$a<0$, $b>0$일 때, $-a<b$ …㉡

$a\geq 0$, $b<0$일 때, $a<-b$ …㉢

$a<0$, $b<0$일 때, $-a<-b$ …㉣

① (필요충분조건×)

$a=0$, $b=-1$이면

부등식 $|a|<|b|$은 성립하지만

부등식 $a<b$는 성립하지 않는다.

② (필요충분조건○)

(1) $|a|<|b|$이면 $a^2<b^2$임을 보이자.

$a\geq 0$, $b>0$일 때, ㉠에 의하여

$|a|<|b|$은 $0\leq a<b$이므로

$a^2<b^2$

$a<0$, $b>0$일 때, ㉡에 의하여

$|a|<|b|$은 $0<-a<b$이므로

$(-a)^2<b^2$ 즉, $a^2<b^2$

$a\geq 0$, $b<0$일 때, ㉢에 의하여

$|a|<|b|$은 $0\leq a<-b$이므로

$a^2<(-b)^2$ 즉, $a^2<b^2$

$a<0$, $b<0$일 때, ㉣에 의하여

$|a|<|b|$은 $0<-a<-b$이므로

$(-a)^2<(-b)^2$ 즉, $a^2<b^2$

요컨대 $|a|<|b|$이면 $a^2<b^2$이다.

(2) $a^2<b^2$이면 $|a|<|b|$임을 보이자.

$b=0$을 $a^2<b^2$에 대입하면

$a^2<0$

이를 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

따라서 $b\neq 0$이다.

부등식 $a^2<b^2(b\neq 0)$을 변형하면

$a^2-b^2<0$

좌변을 인수분해하면

$(a+b)(a-b)<0$ …㉤

$a\geq 0$, $b>0$일 때, $a+b>0$이므로

㉤을 풀면 $a-b<0$ 즉, $0\leq a<b$(㉠과 같다.)

$a\geq 0$, $b<0$일 때, $a-b>0$이므로

㉤을 풀면 $a+b<0$ 즉, $0\leq a<-b$(㉢과 같다.)

$a<0$, $b>0$일 때, $a-b<0$이므로

㉤을 풀면 $a+b>0$ 즉, $0<-a<b$(㉡과 같다.)

$a<0$, $b<0$일 때, $a+b<0$이므로

㉤을 풀면 $a-b>0$ 즉, $0<-a<-b$(㉣과 같다.)

요컨대 $a^2<b^2$이면 $|a|<|b|$이다.

(1), (2)에서 두 부등식

$|a|<|b|$, $a^2<b^2$

은 서로 필요충분조건이다.

③ (필요충분조건×)

$a=2$, $b=1$이면

부등식 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$은 성립하지만

부등식 $|a|<|b|$는 성립하지 않는다.

④ (필요충분조건×)

$b<0$이면 부등식 $|a|<b$는 성립하지 않는다.

그런데 부등식 $|a|<|b|$은 $b<0$인 경우에도 해를 가지므로

두 부등식

$|a|<|b|$, $|a|<b$

는 서로 필요충분조건이 아니다.

혹은 다음과 같이 두 부등식이 서로 필요충분조건이 아님을 증명해도 좋다.

부등식 $|a|<b$에 대하여

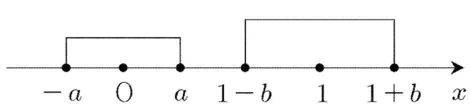
$a\geq 0$일 때, $0\leq a<b$이므로 $|a|<|b|$이다.

$a<0$일 때, $0<-a<b$이므로 $|a|<|b|$이다.
요컨대 $|a|<b$이면 $|a|<|b|$이다.
하지만 $a=0$, $b=-1$이면
부등식 $|a|<|b|$은 성립하지만
부등식 $|a|<b$는 성립하지 않는다.
따라서 $|a|<b$는 $|a|<|b|$이기 위한 충분조건이다.
⑤ (필요충분조건×)
$a\ge 0$, $b>0$일 때, ㉠에 의하여
$|a|<|b|$은 $0\le a<b$이므로
$a<|b|$
$a<0$, $b>0$일 때, ㉡에 의하여
$|a|<|b|$은 $0<-a<b$이므로
$a<0<|b|$ 즉, $a<|b|$
$a\ge 0$, $b<0$일 때, ㉢에 의하여
$|a|<|b|$은 $0\le a<-b$이므로
$a<|-b|$ 즉, $a<|b|$
$a<0$, $b<0$일 때, ㉣에 의하여
$|a|<|b|$은 $0<-a<-b$이므로
$a<0<|-b|$ 즉, $a<|b|$
요컨대 $|a|<|b|$이면 $a<|b|$이다.
하지만 $a=-1$, $b=0$이면
부등식 $a<|b|$은 성립하지만
부등식 $|a|<|b|$은 성립하지 않는다.
이상에서 주어진 부등식과 필요충분조건인 부등식은 ②이다.
답 ②

[참고]
문제에서 주어진 부등식과 ②의 부등식이 필요충분조건임을 다음과 같이 보여도 좋다.
$|a|<|b|$(단, $b\ne 0$) $\Leftrightarrow$ $|a|-|b|<0$
$\Leftrightarrow$ $(|a|-|b|)(|a|+|b|)<0$ ($\because$ $|a|+|b|>0$)
$\Leftrightarrow$ $|a|^2-|b|^2<0$ $\Leftrightarrow$ $|a|^2<|b|^2$ $\Leftrightarrow$ $a^2<b^2$

T048 | 답 ④

[풀이]
집합 A에서 주어진 부등식을 풀면
$-a\le x\le a$
집합 A는 $A=\{x\mid -a\le x\le a\}$
집합 B에서 주어진 부등식을 풀면
$1-b\le x\le 1+b$
집합 B는 $B=\{x\mid 1-b\le x\le 1+b\}$



$a<1-b$이면 $A\cap B=\varnothing$이고, 이 역도 성립한다.
따라서 $A\cap B=\varnothing$이기 위한 필요충분조건은
$a+b<1$
답 ④

T049 | 답 5

[풀이]
조건 p에서 주어진 부등식의 좌변을 인수분해하면
$(x-3)(x-5)\le 0$
풀면
$3\le x\le 5$
조건 p의 진리집합을 P라고 하면
$P=\{x\mid 3\le x\le 5\}$
조건 q에서 주어진 부등식을 풀면
$a<2$일 때, $x<a$ 또는 $x>2$
$a=2$일 때, x는 2가 아닌 모든 실수
$a>2$일 때, $x<2$ 또는 $x>a$
조건 q의 진리집합을 Q라고 하면
$a<2$일 때, $Q^C=\{x\mid a\le x\le 2\}$ $\cdots$㉠
$a=2$일 때, $Q^C=\{2\}$ $\cdots$㉡
$a>2$일 때, $Q^C=\{x\mid 2\le x\le a\}$ $\cdots$㉢
p가 $\sim q$이기 위한 충분조건이면
$P\subset Q^C$ $\cdots$(*)
㉠, ㉡은 (*)를 만족시키지 않는다.
㉢이 (*)를 만족시킬 a의 범위는 $a\ge 5$이다.
따라서 a의 최솟값은 5이다.
답 5

T050 | 답 ④

[풀이]
조건 p에서 주어진 부등식을 풀면
$-3\le x-1\le 3$에서 $-2\le x\le 4$
조건 p의 진리집합을 P라고 하면
$P=\{x\mid -2\le x\le 4\}$
조건 q에서 주어진 부등식을 풀면
$-a\le x\le a$
조건 q의 진리집합을 Q라고 하면
$Q=\{x\mid -a\le x\le a\}$
p가 q이기 위한 충분조건이므로
$P\subset Q$
$-a\le -2$이고 $a\ge 4$
a는 자연수이므로 $a\ge 4$이다.

자연수 a의 최솟값은 4이다.

답 ④

T051 | 답 ①

[풀이]

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.

p가 q이기 위한 필요조건이므로

$q \Rightarrow p$ 즉, $Q \subset P$

조건 q에서 주어진 일차방정식의 해집합을 구하면

$Q=\{3\}$

$3 \in P$이므로 조건 p에서 주어진 이차방정식에 $x=3$을 대입하면

$3^2+2\times 3-a=0$

풀면

$\therefore\ a=15$

답 ①

T052 | 답 ⑤

[풀이]

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.

조건 p에서 주어진 이차방정식을 풀면

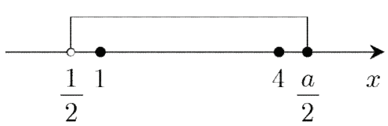
$x=1$ 또는 $x=4$이므로

$P=\{1,\ 4\}$

조건 q에서 주어진 일차연립부등식을 풀면

$\dfrac{1}{2}< x \le \dfrac{a}{2}$이므로

$Q=\left\{x \,\middle|\, \dfrac{1}{2}< x \le \dfrac{a}{2}\right\}$



p가 q이기 위한 충분조건이 되기 위해서는

$\dfrac{a}{2} \ge 4$이어야 한다. 즉, $a \ge 8$이다.

따라서 a의 최솟값은 8이다.

답 ⑤

T053 | 답 ⑤

[풀이]

〈증명〉

$\sqrt{2}$가 유리수(즉, 무리수가 아닌 실수)라고 가정하면

$\boxed{\text{서로소}}$인 자연수 m, n에 대하여

$\sqrt{2}=\dfrac{n}{m}$ 꼴로 나타낼 수 있다.

양변을 제곱하면 $2=\dfrac{n^2}{m^2}$이므로, $n^2=2m^2$이다.

따라서 $\boxed{n}$은 2의 배수이다.

$\boxed{n}=2k$라 놓으면 $n^2=2m^2$에서 $\boxed{m}^2=2k^2$이 된다.

따라서 $\boxed{m}$도 2의 배수이다.

이는 m, n이 $\boxed{\text{서로소}}$라는 가정에 모순된다.

그러므로 $\sqrt{2}$는 유리수가 될 수 없고, 무리수이다.

(가): 서로소, (나): n, (다): m

답 ⑤

[참고]

$n^2=2m^2$이면 n이 2의 배수임을 증명하자.

n이 다음과 같이 소인수분해된다고 하자.

$n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\cdots p_l^{\alpha_l}$

(단, l은 자연수, p_1, p_2, $\cdots$, p_l은 서로 다른 소수,

α_1, α_2, $\cdots$, α_l은 음이 아닌 정수이다.)

$n^2=p_1^{2\alpha_1}p_2^{2\alpha_2}\cdots p_l^{2\alpha_l}=2m^2$

p_1, p_2, $\cdots$, p_l 중에서 어느 한 수는 2이어야 한다.

따라서 n은 2의 배수이다.

마찬가지의 방법으로 m이 2의 배수임을 증명할 수 있다.

T054 | 답 ⑤

[풀이]

$\cdots$ (생략) $\cdots$

m, n이 정수이고 $3m^2=n^2+1$이므로, n^2+1은 3의 배수이다.

한편, 정수 n이 어떤 정수 k에 대하여,

$n=3k$이면

$n^2=(3k)^2=9k^2=3(3k^2)$,

$n=3k+1$이면

$n^2=(3k+1)^2=9k^2+6k+1=3(3k^2+2k)+1$,

$n=3k+2$이면

$n^2=(3k+2)^2=9k^2+12k+4=3(3k^2+4k+1)+1$

이므로, n^2을 3으로 나눈 나머지는 0또는 1이다.

따라서 n^2+1을 3으로 나눈 나머지는 1 또는 2이다.

이는 m, n이 정수라는 가정에 모순이다.

따라서 $3m^2=n^2+1$을 만족하는 m, n이 모두 정수인 해는 없다.

(가): m, n이 모두 정수인 해는 없다.

답 ⑤

T055 | 답 ④

[풀이]

$\dfrac{2x}{y}>0$, $\dfrac{8y}{x}>0$이므로

산술기하절대부등식에 의하여

$(2x+y)\left(\dfrac{8}{x}+\dfrac{1}{y}\right)=17+\dfrac{2x}{y}+\dfrac{8y}{x}$

$\geq 17+2\sqrt{\dfrac{2x}{y}\times\dfrac{8y}{x}}=25$

(단, 등호는 $x=2y$일 때 성립한다.)

답 ④

T056 | 답 ③

[풀이1]

바깥쪽 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y, 바깥쪽 직사각형의 넓이의 최댓값을 S라고 하자.

$2x>0$, $5y>0$이므로

산술기하절대부등식에 의하여

$2x+5y\geq 2\sqrt{10xy}=2\sqrt{10S}$

(단, 등호는 $2x=5y$일 때 성립한다.)

그런데 $x>y$이므로 $y=70$, $x=175$

농부가 사용한 철망의 길이는

$2\times175+5\times70=700$

답 ③

[풀이2]

바깥쪽 직사각형의 가로, 세로의 길이를 각각 x, y, 주어진 철망의 길이를 l이라고 하자.

$2x+5y=l$

(바깥쪽 직사각형의 넓이)$=xy=-\dfrac{5}{2}y^2+\dfrac{l}{2}y$

$=-\dfrac{5}{2}\left(y-\dfrac{l}{10}\right)^2+\dfrac{l^2}{40}\leq\dfrac{l^2}{40}$

(단, 등호는 $y=\dfrac{l}{10}$일 때 성립한다.)

주어진 조건에 의하여

$\dfrac{l}{10}=70$ 즉, $l=700$

따라서 농부가 사용한 철망의 길이는 700m이다.

답 ③

T057 | 답 ②

[풀이]

그림과 같이 길이가 a인 선분 AB를 지름으로 하는 원 위를 움직이는 점 P가 있다.

(단, 점 P는 점 A 또는 점 B가 아니다.)

$\overline{\mathrm{AB}}$는 주어진 원의 지름이므로 원의 성질에 의하여

$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$

직각삼각형 APB에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{PA}}^2+\overline{\mathrm{PB}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2=\boxed{a^2}$

선분 PA와 선분 PB의 중점을 각각 M과 N이라고 하자.

직각삼각형 APN에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{AN}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{PN}}^2=\overline{\mathrm{AP}}^2+\left(\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PB}}\right)^2$ …㉠

직각삼각형 BPM에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BM}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2+\overline{\mathrm{PM}}^2=\overline{\mathrm{BP}}^2+\left(\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{PA}}\right)^2$ …㉡

㉠+㉡: $\overline{\mathrm{AN}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2=\boxed{\dfrac{5}{4}a^2}$ …㉢

$\overline{\mathrm{AN}}>0$, $\overline{\mathrm{BM}}>0$

산술기하절대부등식에 의하여

$\dfrac{\overline{\mathrm{AN}}^2+\overline{\mathrm{BM}}^2}{2}\geq\overline{\mathrm{AN}}\times\overline{\mathrm{BM}}$ …㉣

(단, 등호는 $\overline{\mathrm{AN}}=\overline{\mathrm{BM}}$일 때 성립한다.)

㉢, ㉣에 의하여

$\overline{\mathrm{AN}}\cdot\overline{\mathrm{BM}}\leq\boxed{\dfrac{5}{8}a^2}$

따라서 $\overline{\mathrm{AN}}\cdot\overline{\mathrm{BM}}$의 최댓값은 $\boxed{\dfrac{5}{8}a^2}$이다.

(가): a^2 (나): $\dfrac{5}{4}a^2$ (다): $\dfrac{5}{8}a^2$

답 ②

T058 | 답 ①

[풀이]

집합 A에서 주어진 이차부등식의 좌변을 인수분해하면

$(x-1)(x-2)\leq0$

풀면

$1\leq x\leq2$

집합 A는 $A=\{x\,|\,1\leq x\leq2\}$

집합 B에서 주어진 이차부등식의 좌변을 인수분해하면

$(ax-a^2-1)(x-1)\leq0$

풀면

$1 \le x \le a+\dfrac{1}{a}$

($\because$ $a>0$일 때, 산술기하절대부등식에 의하여

$a+\dfrac{1}{a} \ge 2\sqrt{a\times\dfrac{1}{a}}=2$

단, 등호는 $a=1$일 때 성립한다.)

집합 B는 $B=\left\{x \,\middle|\, 1 \le x \le a+\dfrac{1}{a}\right\}$

$a+\dfrac{1}{a} \ge 2$이므로 보기 중에서 항상 성립하는 것은 $A \subset B$이다.

답 ①

T059 | 답 ②

[풀이]

점 P의 좌표를 P$(x,\ y)$라고 하자.

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$\overline{\mathrm{OP}}^2=x^2+y^2$

$\overline{\mathrm{AP}}^2=(x-2)^2+y^2$

$\overline{\mathrm{BP}}^2=(x-2)^2+(y-1)^2$

$\overline{\mathrm{OP}}^2+\overline{\mathrm{AP}}^2+\overline{\mathrm{BP}}^2$

$=3x^2-8x+3y^2-2y+9$

$=3\left(x-\dfrac{4}{3}\right)^2+3\left(y-\dfrac{1}{3}\right)^2+\dfrac{10}{3} \ge \dfrac{10}{3}$

(단, 등호는 $x=\dfrac{4}{3}$, $y=\dfrac{1}{3}$일 때 성립한다.)

따라서 구하는 회전중심의 좌표는

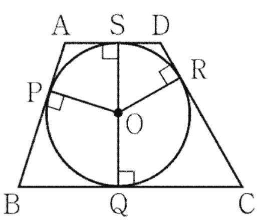
$\left(\dfrac{4}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$

답 ②

T060 | 답 ④

[풀이]

문제에서 주어진 사다리꼴의 네 꼭짓점을 각각 A, B, C, D, 단위원의 중심을 O라고 하자. 점 O에서 네 변 AB, BC, CD, DA에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R, S라고 하자.



$\overline{\mathrm{AS}}=a$, $\overline{\mathrm{DS}}=b$

로 두면 원의 외부에 있는 한 점에서 그 원에 그은 두 접선의 길이는 같으므로

$\overline{\mathrm{AP}}=a$, $\overline{\mathrm{DR}}=b$

마찬가지의 이유로

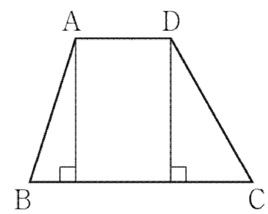
$\overline{\mathrm{BQ}}=c$, $\overline{\mathrm{CQ}}=d$

로 두면

$\overline{\mathrm{BP}}=c$, $\overline{\mathrm{CR}}=d$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$x=a+b$, $y=c+d$



위의 그림의 두 직각삼각형에서

피타고라스의 정리에 의하여

$(a+c)^2=(c-a)^2+2^2$

$(b+d)^2=(d-b)^2+2^2$

정리하면

$ac=1$, $bd=1$ $\cdots(*)$

▸ ㄱ. (참) ▸ ㄴ. (참)

$x>0$, $y>0$이므로

산술기하절대부등식에 의하여

$x+y=(a+c)+(b+d)$

$\ge 2\sqrt{ac}+2\sqrt{bd}=4$

(단, 등호는 $a=b=c=d=1$일 때 성립한다.)

$x+y=4(a=b=c=d=1)$일 때,

주어진 사다리꼴은 정사각형이다.

▸ ㄷ. (참) ▸ ㄹ. (거짓)

$x>0$, $y>0$이므로

산술기하절대부등식에 의하여

$xy=(a+b)(c+d)$

$=ac+ad+bc+bd$

$=2+\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{a}$ $(\because (*))$

$\ge 2+2\sqrt{\dfrac{a}{b}\times\dfrac{b}{a}}=4$

(단, 등호는 $a=b$, $c=d$일 때 성립한다.)

$xy=4(a=b,\ c=d)$일 때,

주어진 사다리꼴은 등변사다리꼴이다.

따라서 주어진 사다리꼴이 반드시 정사각형인 것은 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

U 함수 (평가원)

1	풀이 참고	2	풀이 참고	3	②	4	④	5	⑤
6	⑤	7	②	8	⑤	9	②	10	⑤
11	②	12	③	13	⑤	14	②	15	④
16	①	17	①	18	①	19	①	20	②
21	④	22	10	23	⑤	24	③	25	5
26	④	27	⑤	28	④	29	−3	30	⑤
31	①	32	④	33	②	34	③	35	5
36	5	37	④	38	14	39	⑤	40	②
41	④	42	10	43	②	44	⑤	45	⑤
46	③	47	①	48	①	49	⑤	50	②
51	④	52	①	53	6	54	3	55	2
56	①	57	①	58	③	59	④		

U001 ㅣ답 풀이 참조

[풀이]

(1) $a=b=\frac{2}{3}$일 때, $a^2 \leq 2b$이므로

$\frac{2}{3} * \frac{2}{3} = 2 \times \frac{2}{3} = \frac{4}{3}$

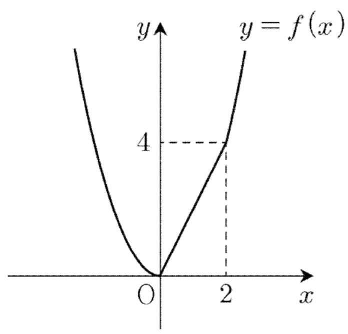
(2) 함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (x^2 \leq 2x) \\ x^2 & (x^2 > 2x) \end{cases}$$

정리하면

$$f(x)=\begin{cases} 2x & (0 \leq x \leq 2) \\ x^2 & (x<0,\ x>2) \end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프는



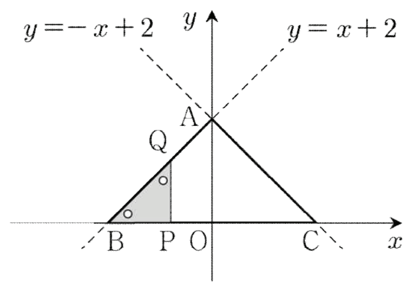
답 (1) $\frac{4}{3}$, (2) 풀이 참조

U002 ㅣ답 풀이 참조

[풀이]

점 P를 지나고 $\overline{BC}$에 수직인 직선이 삼각형 ABC와 만나는 두 점 중에서 점 P가 아닌 점을 Q라고 하자.

(1) $-2 < x \leq 0$인 경우

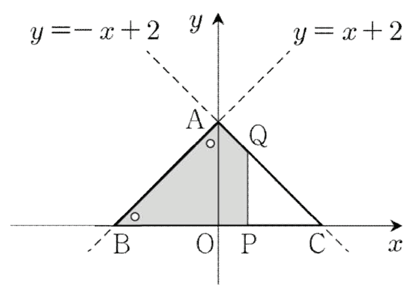


점 Q의 좌표는 Q$(x,\ x+2)$이므로

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$(\triangle BPQ$의 넓이$)=\frac{1}{2}\overline{BP}\,\overline{PQ}=\frac{1}{2}(x+2)^2$

(2) $0 < x < 2$인 경우



점 Q의 좌표는 Q$(x,\ -x+2)$이므로

삼각형과 사다리꼴의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\square$ABPQ의 넓이)

$=(\triangle ABO$의 넓이$)+(\square OPQA$의 넓이$)$

$=\frac{1}{2}\overline{BO}\,\overline{OA}+\frac{\overline{AO}+\overline{QP}}{2}\times\overline{OP}$

$=\frac{1}{2}\times 2\times 2+\frac{2+(-x+2)}{2}\times x=-\frac{1}{2}x^2+2x+2$

(1), (2)에서 구하는 함수의 방정식은

$$y=\begin{cases} \frac{1}{2}(x+2)^2 & (-2 < x \leq 0) \\ -\frac{1}{2}x^2+2x+2 & (0 < x < 2) \end{cases}$$

답 풀이 참조

U003 ㅣ답 ②

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점을 $(a,\ b)$라고 하면

$f(a)=b$, $g(a)=b$

주어진 등식에서

$h(a)=\frac{1}{3}f(a)+\frac{2}{3}g(a)=\frac{1}{3}b+\frac{2}{3}b=b$

함수 $h(x)$의 그래프는 점 $(a,\ b)$를 지난다.

▸ ㄴ. (참)
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 모두 y축에 대하여 대칭이므로
모든 실수 x에 대해서
$f(-x)=f(x)$, $g(-x)=g(x)$
모든 실수 x에 대해서
$h(-x)=\frac{1}{3}f(-x)+\frac{2}{3}g(-x)$
$=\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}g(x)=h(x)$
함수 $h(x)$의 그래프는 y축에 대해서 대칭이다.
▸ ㄷ. (거짓)
(반례)
일대일대응
$f(x)=-2x$, $g(x)=x$
에 대하여
$h(x)=\frac{1}{3}f(x)+\frac{2}{3}g(x)=0$
상수함수 $h(x)$는 일대일대응이 아니다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ②

U004 | 답 ④

[풀이]
$f(0)=1$, $g(1)=2$에서
$g(f(0))=g(1)=2$
답 ④

U005 | 답 ⑤

[풀이]
정의역의 원소 2에 대응하는 공역의 원소는 4이므로
$f(2)=4$
정의역의 원소 3에 대응하는 공역의 원소는 1이므로
$f(3)=1$
정의역의 원소 1에 대응하는 공역의 원소는 3이므로
$(f\circ f)(3)=f(f(3))=f(1)=3$
$\therefore\ f(2)+(f\circ f)(3)=4+3=7$
답 ⑤

U006 | 답 ⑤

[풀이]
함수 f의 정의역의 원소 3에 대응하는 공역의 원소는 2이므로
$f(3)=2$
함수 g의 정의역의 원소 2에 대응하는 공역의 원소는 5이므로
$g(2)=5$
합성함수의 정의에 의하여
$\therefore\ g(f(3))=g(2)=5$
답 ⑤

U007 | 답 ②

[풀이]
$\frac{2}{3}$는 유리수이므로 $f\left(\frac{2}{3}\right)=1$
$\sqrt{2}$는 무리수이므로 $f(\sqrt{2})=0$
0은 유리수이므로 $f(0)=1$
1은 유리수이므로 $f(1)=1$
답 ②

U008 | 답 ⑤

[풀이]
실수 전체의 집합은 유리수의 집합과 무리수의 집합의 합집합이다.
함수 f의 정의역의 원소 x가 유리수이면
$f(x)=1$
1은 유리수이므로
$f(f(x))=1$
함수 f의 정의역의 원소 x가 무리수이면
$f(x)=0$
0은 유리수이므로
$f(f(x))=1$
따라서 합성함수 $f\circ f$의 치역은 $\{1\}$이다.
답 ⑤

U009 | 답 ②

[풀이]
함수 $f(g(x))$의 방정식은
$f(g(x))=2(ax-1)+6=2ax+4$
함수 $g(f(x))$의 방정식은
$g(f(x))=a(2x+6)-1=2ax+6a-1$

함수의 상등의 정의에 의하여

$2ax+4=2ax+6a-1$

x에 대한 항등식이므로

$6a-1=4$

풀면

$\therefore\ a=\dfrac{5}{6}$

답 ②

U010 | 답 ⑤

[풀이]

$g(x)$가 n차 다항식이면 $g(g(x))$는 n^2차 다항식이다.

주어진 항등식의 좌변은 n^2차 다항식이고, 우변은 1차 다항식이므로

$n^2=1$ 풀면 $n=1$

따라서 $g(x)$는 일차식이다.

$g(x)=ax+b(a\neq 0)$으로 두자.

합성함수의 정의에 의하여

$g(g(x))=a^2x+ab+b=x$

항등식의 필요충분조건에 의하여

$a^2=1,\ ab+b=0$

풀면

$a=1,\ b=0$ $\cdots$ ㉠

또는

$a=-1$, b는 임의의 실수 $\cdots$ ㉡

㉠일 때, $g(x)=x$

그런데 $g(0)=0$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

㉡일 때, $g(x)=-x+b$

$g(0)=1$에서 $b=1$

함수 $g(x)$의 방정식은 $g(x)=-x+1$

$\therefore\ g(-1)=2$

답 ⑤

U011 | 답 ②

[풀이]

합성함수의 정의에 의하여

$f(g(1))=f(3)=4$

$g(f(1))=g(2)$

주어진 조건에서 $f(g(1))=g(f(1))$이므로

$g(2)=4$

합성함수의 정의에 의하여

$f(g(2))=f(4)=1$

$g(f(2))=g(3)$

주어진 조건에서 $f(g(2))=g(f(2))$이므로

$g(3)=1$

답 ②

U012 | 답 ③

[풀이]

함수 f는 X에서 Y로의 일대일대응이므로

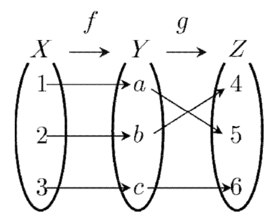
$f(2)=b$이면 $f(3)=c$

합성함수의 정의에 의하여

$(g\circ f)(2)=g(b)=4$

함수 g는 Y에서 Z로의 일대일대응이므로

$g(a)=5$



이제 다른 경우를 생각하자.

함수 f는 X에서 Y로의 일대일대응이므로

$f(2)=c$이면 $f(3)=b$

합성함수의 정의에 의하여 $(g\circ f)(2)=g(c)=6$이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

이는 가정에 모순이므로 $f(2)\neq c$이다.

$\therefore\ f(3)=c$

답 ③

U013 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참) ▸ ㄴ. (참)

$2(=2^0+1)$을 3으로 나눈 나머지는 2이므로

$f(0)=2$

$3(=2^1+1)$을 3으로 나눈 나머지는 0이므로

$f(1)=0$

$5(=2^2+1)$을 3으로 나눈 나머지는 2이므로

$f(2)=2$

$9(=2^3+1)$을 3으로 나눈 나머지는 0이므로

$f(3)=0$

$17(=2^4+1)$을 3으로 나눈 나머지는 2이므로

$f(4)=2$

$\vdots$

이상에서 다음과 같이 추론할 수 있다.

$f(n)=\begin{cases}0 & (n=2k-1)\\ 2 & (n=2k-2)\end{cases}$(단, k는 자연수)

▸ ㄷ. (참)

n이 짝수이면 $f(n)=2$이므로

합성함수의 정의에 의하여

$f(f(n))=f(2)=2$($\because$ 2는 짝수)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고] +확률과 통계(이항정리) (선택)

이항정리를 이용하여 $f(n)$의 방정식을 유도할 수 있다.

(1) $n=0$인 경우

$2(=2^0+1)$을 3으로 나눈 나머지는 2이므로

$f(0)=2$

(2) n이 자연수인 경우

모든 자연수 n에 대하여

$$2^n+1=(3-1)^n+1=1+\sum_{r=0}^{n}{}_nC_r 3^{n-r}(-1)^r$$

$$=1+(-1)^n+3\times\sum_{r=0}^{n-1}{}_nC_r 3^{n-1-r}(-1)^r$$

n이 짝수일 때,

$$2^n+1=2+3\times\sum_{r=0}^{n-1}{}_nC_r 3^{n-1-r}(-1)^r$$

이므로 2^n+1을 3으로 나눈 나머지는 2이다.

n이 홀수일 때,

$$2^n+1=3\times\sum_{r=0}^{n-1}{}_nC_r 3^{n-1-r}(-1)^r$$

이므로 2^n+1을 3으로 나눈 나머지는 0이다.

(1), (2)에서 $f(n)$의 방정식은

$f(n)=\begin{cases}0 & (n=2k-1)\\ 2 & (n=2k-2)\end{cases}$(단, k는 자연수)

U014 | 답 ②

[풀이]

$x\ge 0$일 때, $|x|=x$이고 $x<0$일 때, $|x|=-x$

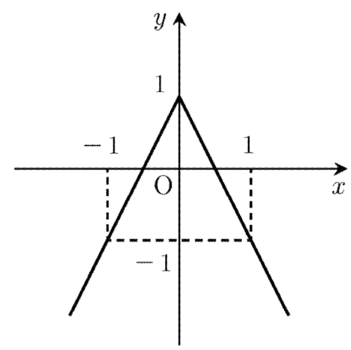
이므로 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\begin{cases}x & (x\ge 0)\\ -x & (x<0)\end{cases}$

합성함수의 정의에 의하여 함수 $(g\circ f)(x)$의 방정식은

$(g\circ f)(x)=\begin{cases}-2x+1 & (x\ge 0)\\ 2x+1 & (x<0)\end{cases}$

함수 $(g\circ f)(x)$의 그래프는



답 ②

U015 | 답 ④

[풀이]

$g(x)=t$로 두자.

우선 $f(t)\ge 0$을 만족시키는 t의 범위를 구하자.

$t^2-t-6\ge 0$

좌변을 인수분해하면

$(t+2)(t-3)\ge 0$

풀면

$t\le -2$ 또는 $t\ge 3$

즉, $g(x)\le -2$ 또는 $g(x)\ge 3$

(1) $g(x)\le -2$인 경우

부등식을 정리하면

$x^2-ax+6\le 0$

모든 실수 x에 대하여 위의 부등식을 만족시키는 실수 a는 존재하지 않는다.

(2) $g(x)\ge 3$인 경우

부등식을 정리하면

$x^2-ax+1\ge 0$

좌변을 변형하면

$\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+1-\frac{a^2}{4}\ge 0$

모든 실수 x에 대하여 위의 부등식이 성립하기 위해서는

$1-\frac{a^2}{4}\ge 0$

풀면

$-2\le a\le 2$

(1), (2)에서 a의 범위는

$\therefore\ -2\le a\le 2$

답 ④

U016 | 답 ①

[풀이]

$f(x+2)=t$로 두자.(단, $t \leq 6$)

주어진 방정식은

$f(t)=4$

주어진 그래프에서

$t=6$

대입하면

$f(x+2)=6$

주어진 그래프에서

$x+2=8$ 또는 $x+2=16$

$\therefore\ x=6$ 또는 $x=14$

주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 2이고, 이들의 합은 20이다.

답 ①

U017 | 답 ①

[풀이]

(1) $x<1$일 때, $f(x)=1$이므로

합성함수의 정의에 의하여

$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(1)=1$

즉, $x<1$일 때, $(g \circ f)(x)=1$

(2) $x \geq 1$일 때, $f(x)=3$이므로

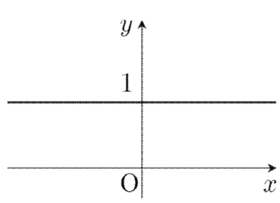
$(g \circ f)(x)=g(f(x))=g(3)=1$

즉, $x \geq 1$일 때, $(g \circ f)(x)=1$

(1), (2)에 의하여 합성함수 $(g \circ f)(x)$는 상수함수이다.

$(g \circ f)(x)=1$(단, 정의역은 실수 전체의 집합)

함수 $(g \circ f)(x)$의 그래프는 다음과 같다.



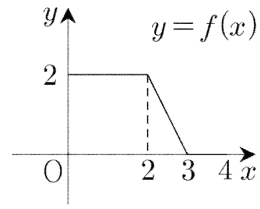
답 ①

U018 | 답 ①

[풀이]

조건 (가)에 의하여

구간 $[0,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 그래프는

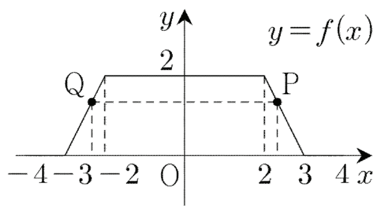


조건 (나)에서 주어진 조건

'모든 실수 x에 대하여 $f(-x)=f(x)$이다.'

에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

구간 $[-4,\ 4]$에서 함수 $f(x)$의 그래프는



그 이유를 알아보자.

위의 그림에서 두 점 P, Q의 좌표를 각각

$\mathrm{P}(x,\ f(x))$, $\mathrm{Q}(-x,\ f(-x))$

(단, $0<x \leq 4$)

라고 하면 $f(x)=f(-x)$이므로 두 점 P, Q의 y좌표는 같다.

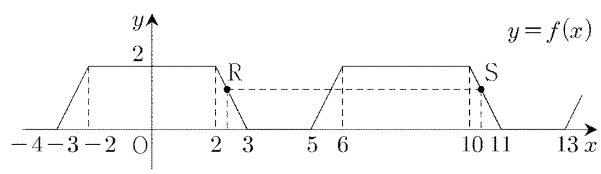
따라서 두 점 P, Q는 y축에 대하여 대칭이다.

그러므로 함수 $f(x)$의 그래프는 y축에 대하여 대칭이다.

조건 (나)에서 주어진 조건

'모든 실수 x에 대하여 $f(x)=f(x-8)$이다.'

에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $[-4,\ 4]$에서의 함수 $f(x)$의 그래프를 되풀이한 것이다. (아래 그림)



그 이유를 알아보자.

위의 그림에서 두 점 R, S의 좌표를 각각

$\mathrm{R}(x-8,\ f(x-8))$, $\mathrm{S}(x,\ f(x))$

(단, $4 \leq x<12$)

라고 하면 $f(x)=f(x-8)$이므로 두 점 R, S의 y좌표는 같다.

따라서 점 R을 x축의 방향으로 8만큼 평행이동하면 점 S와 일치한다.

그러므로 구간 $[4,\ 12]$에서의 함수 $f(x)$의 그래프는 구간 $[-4,\ 4]$에서의 함수 $f(x)$의 그래프를 되풀이한 것이다.

일반적으로 구간

$\cdots$, $[-12,\ -4]$, $[-4,\ 4]$, $[4,\ 12]$, $[12,\ 20]$, $\cdots$

에서 그려지는 그래프의 모양은 모두 같다.

이제 함수 $g(x)$의 그래프의 개형을 그리자.

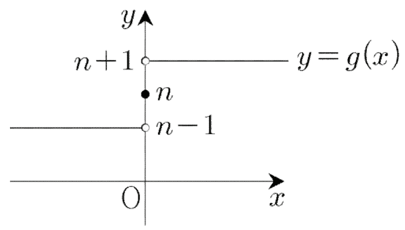
$x>0$일 때, $\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{x}{x}=1$

$x<0$일 때, $\dfrac{|x|}{x}=\dfrac{-x}{x}=-1$

이므로 함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases} n+1 & (x>0) \\ n & (x=0) \\ n-1 & (x<0) \end{cases}$$

함수 $g(x)$의 그래프는



함수 $(f \circ g)(x)$의 방정식을 유도하자.

$x>0$일 때, $g(x)=n+1$이므로

$f(g(x))=f(n+1)$

$x=0$일 때, $g(x)=n$이므로

$f(g(x))=f(n)$

$x<0$일 때, $g(x)=n-1$이므로

$f(g(x))=f(n-1)$

함수 $(f \circ g)(x)$의 방정식은

$$(f \circ g)(x)=\begin{cases} f(n+1) & (x>0) \\ f(n) & (x=0) \\ f(n-1) & (x<0) \end{cases}$$

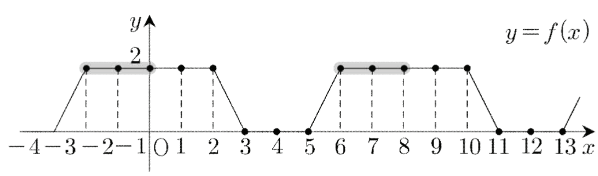
함수 $(f \circ g)(x)$가 상수함수이므로

모든 실수 x에 대하여

$f(n-1)=f(n)=f(n+1)$ $\cdots$(*)

(단, n은 정수)

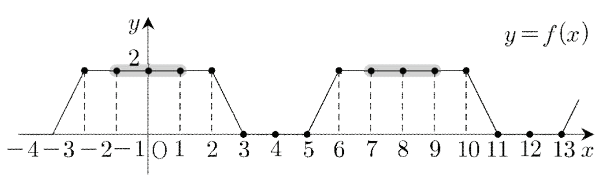
(경우1)



위의 그림에서 n이 -1, 7, 15, $\cdots$이면 (*)이 성립한다.

이때, $7=-1+8$, $15=7+8$, $\cdots$이다.

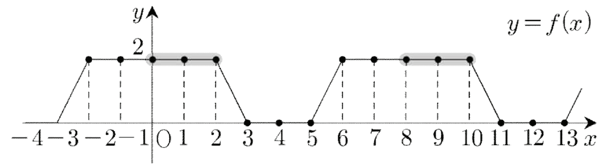
(경우2)



위의 그림에서 n이 0, 8, 16, $\cdots$이면 (*)이 성립한다.

이때, $8=0+8$, $16=8+8$, $\cdots$이다.

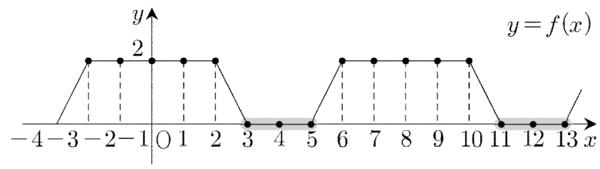
(경우3)



위의 그림에서 n이 1, 9, 17, $\cdots$이면 (*)이 성립한다.

이때, $9=1+8$, $17=9+8$, $\cdots$이다.

(경우4)



위의 그림에서 n이 4, 12, 20, $\cdots$이면 (*)이 성립한다.

이때, $12=4+8$, $20=12+8$, $\cdots$이다.

다음과 같이 요약할 수 있다.

(단, n이 자연수인 경우만을 생각하자.)

(경우1) 8로 나누어 나머지가 7인 자연수

$8\times\boxed{0}+7=7$, $8\times\boxed{6}+7=55<60$

(경우2) 8로 나누어떨어지는 자연수

$8\times\boxed{1}=8$, $8\times\boxed{7}=56<60$

(경우3) 8로 나누어 나머지가 1인 자연수

$8\times\boxed{0}+1=1$, $8\times\boxed{7}+1=57<60$

(경우4) 8로 나누어 나머지가 4인 자연수

$8\times\boxed{0}+4=4$, $8\times\boxed{7}+4=60$

따라서 자연수 n의 개수는

$7+7+8+8=30$

답 ①

U019 | 답 ①

▶ 실전풀이: [풀이]+[참고]

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases} 2x & \left(0 \le x \le \dfrac{3}{2}\right) \\ -2x+6 & \left(\dfrac{3}{2}<x \le 3\right) \end{cases}$$

함수 $g(x)$의 방정식은

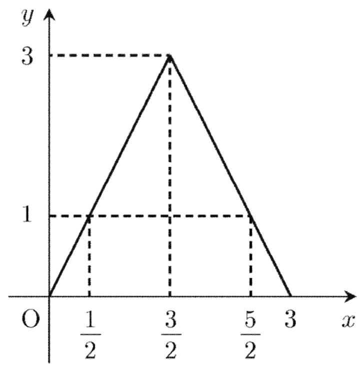
$$g(x)=\begin{cases} 2x & (0 \le x \le 1) \\ \dfrac{1}{2}x+\dfrac{3}{2} & (1<x \le 3) \end{cases}$$

합성함수 $(g \circ f)(x)$의 그래프를 그리기 위하여

$f(x)=1$, $f(x)=3$인 x의 값을 구하면

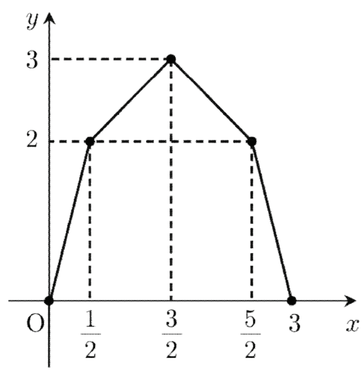
$f(x)=1$이면 $x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=\dfrac{5}{2}$

$f(x)=3$이면 $x=\dfrac{3}{2}$



구간 $\left[0,\ \dfrac{1}{2}\right]$, $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right]$, $\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{5}{2}\right]$, $\left(\dfrac{5}{2},\ 3\right]$에서 합성함수 $(g\circ f)(x)$의 방정식을 구하면

$$(g\circ f)(x)=\begin{cases} 4x & \left(0\le x\le \dfrac{1}{2}\right) \\ x+\dfrac{3}{2} & \left(\dfrac{1}{2}< x\le \dfrac{3}{2}\right) \\ -x+\dfrac{9}{2} & \left(\dfrac{3}{2}< x\le \dfrac{5}{2}\right) \\ -4x+12 & \left(\dfrac{5}{2}< x\le 3\right) \end{cases}$$



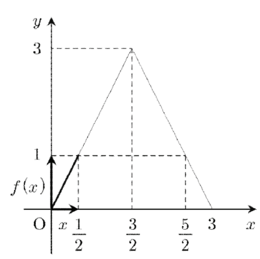
따라서 함수 $(g\circ f)(x)$의 그래프는 ①과 같다.

답 ①

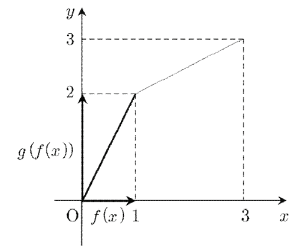
[참고] ★

이 문제에서 주어진 합성함수의 그래프의 개형을 아래와 같이 그려도 좋다.

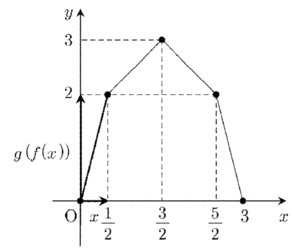
- $0\le x\le \dfrac{1}{2}$인 경우



x가 0에서 $\dfrac{1}{2}$까지 변할 때, $f(x)$는 0에서 1까지 변한다.

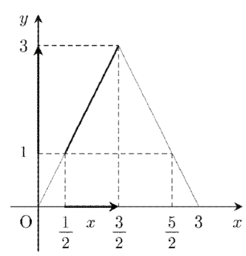


$f(x)$가 0에서 1까지 변할 때, $g(f(x))$는 0에서 2까지 변한다.

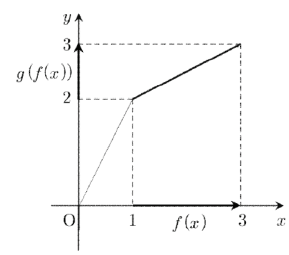


$0\le x\le \dfrac{1}{2}$일 때, $g(f(x))$의 그래프는 위와 같다.

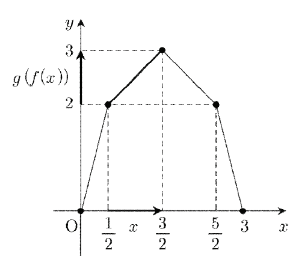
- $\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3}{2}$인 경우



x가 $\dfrac{1}{2}$에서 $\dfrac{3}{2}$까지 변할 때, $f(x)$는 1에서 3까지 변한다.

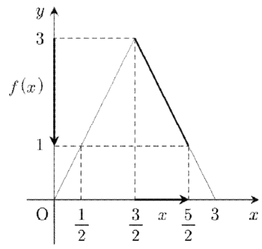


$f(x)$가 1에서 3까지 변할 때, $g(f(x))$는 2에서 3까지 변한다.

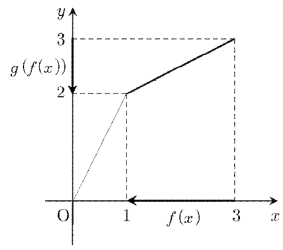


$\dfrac{1}{2}\le x\le \dfrac{3}{2}$일 때, $g(f(x))$의 그래프는 위와 같다.

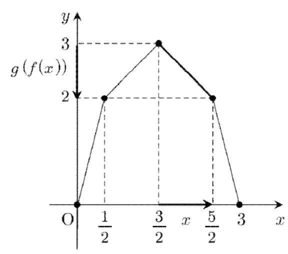
- $\dfrac{3}{2}\le x\le \dfrac{5}{2}$인 경우



x가 $\frac{3}{2}$에서 $\frac{5}{2}$까지 변할 때, $f(x)$는 3에서 1까지 변한다.

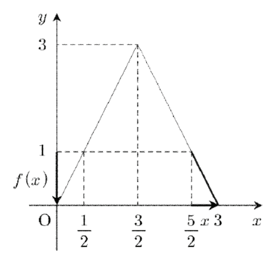


$f(x)$가 3에서 1까지 변할 때, $g(f(x))$는 3에서 2까지 변한다.

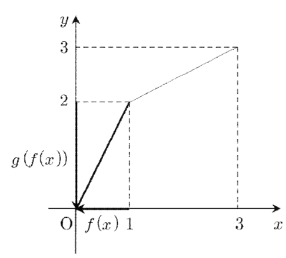


$\frac{3}{2} \leq x \leq \frac{5}{2}$일 때, $g(f(x))$의 그래프는 위와 같다.

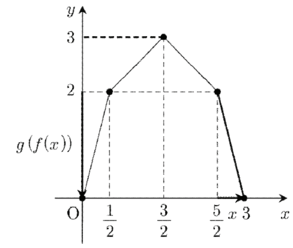
- $\frac{5}{2} \leq x \leq 3$인 경우



x가 $\frac{5}{2}$에서 3까지 변할 때, $f(x)$는 1에서 0까지 변한다.



$f(x)$가 1에서 0까지 변할 때, $g(f(x))$는 2에서 0까지 변한다.



$\frac{5}{2} \leq x \leq 3$일 때, $g(f(x))$의 그래프는 위와 같다.

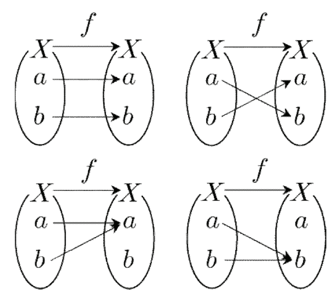
U020 | 답 ②

[풀이] ★

합성함수 $g(x)=f(f(x))$가 정의되기 위해서는 다음이 성립해야 한다.

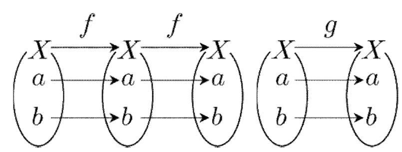
(f의 치역)$\subset$(f의 정의역) 즉, (f의 치역)$\subset X$

정의역과 공역이 모두 X인 함수 f는 다음과 같다.



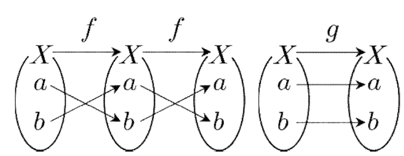
이제 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 함수 g를 결정하자.

- 경우1 (◯)



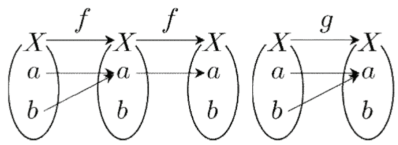
$f(a)=a$, $g(a)=a$이고,
$f(b)=b$, $g(b)=b$이므로
$g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$이다.
문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

- 경우2 (×)



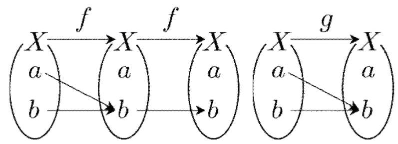
$f(a)=b$, $g(a)=a$이고,
$f(b)=a$, $g(b)=b$이므로
$g(a) \neq f(a)$, $g(b) \neq f(b)$이다.
문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

- 경우3 (◯)

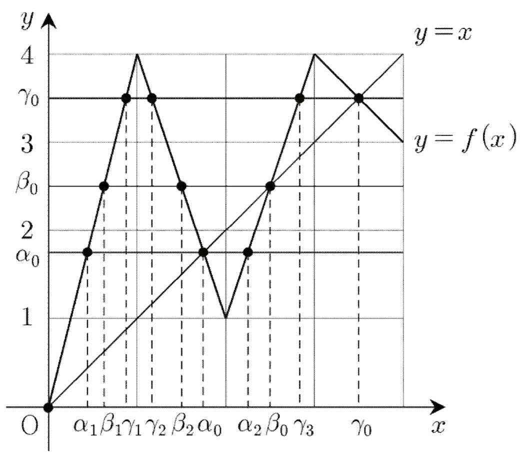


$f(a)=a$, $g(a)=a$이고,
$f(b)=a$, $g(b)=a$이므로
$g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$이다.
문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.

- 경우4 (◯)



$f(a)=b$, $g(a)=b$이고,
$f(b)=b$, $g(b)=b$이므로
$g(a)=f(a)$, $g(b)=f(b)$이다.
문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.
따라서 경우2는 제외하고 풀이를 이어나가자.
경우1, 경우3, 경우4 각각에 대하여
$f(t)=t$인 t가 적어도 하나 존재한다.
(단, t는 집합 X의 원소이다.)



위의 그림처럼 함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 4개의 교점 중에서 원점이 아닌 3개의 점의 x좌표를 각각
α_0, β_0, γ_0
라고 하자. (단, $0<\alpha_0<\beta_0<\gamma_0$)
이때, 다음이 성립한다.
$f(0)=0$, $f(\alpha_0)=\alpha_0$, $f(\beta_0)=\beta_0$, $f(\gamma_0)=\gamma_0 \cdots$ ㉠
함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=\alpha_0$의 3개의 교점 중에서 점 $(\alpha_0,\ \alpha_0)$이 아닌 2개의 점의 x좌표를 각각
α_1, α_2
라고 하자. (단, $\alpha_1<\alpha_0<\alpha_2$)
이때, 다음이 성립한다.
$f(\alpha_0)=f(\alpha_1)=f(\alpha_2)=\alpha_0$ $\cdots$ ㉡

함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=\beta_0$의 3개의 교점 중에서 점 $(\beta_0,\ \beta_0)$이 아닌 2개의 점의 x좌표를 각각
β_1, β_2
라고 하자. (단, $\beta_1<\beta_2<\beta_0$)
이때, 다음이 성립한다.
$f(\beta_0)=f(\beta_1)=f(\beta_2)=\beta_0$ $\cdots$ ㉢
함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=\gamma_0$의 4개의 교점 중에서 점 $(\gamma_0,\ \gamma_0)$이 아닌 3개의 점의 x좌표를 각각
γ_1, γ_2, γ_3
라고 하자. (단, $\gamma_1<\gamma_2<\gamma_3<\gamma_0$)
이때, 다음이 성립한다.
$f(\gamma_0)=f(\gamma_1)=f(\gamma_2)=f(\gamma_3)=\gamma_0$ $\cdots$ ㉣
㉠, ㉡, ㉢, ㉣을 이용하여 순서쌍 $(a,\ b)$를 결정하자.

- 경우1

조건
$f(a)=a$, $f(b)=b$, $0\le a<b\le 4$
를 모두 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(0,\ \alpha_0)$, $(0,\ \beta_0)$, $(0,\ \gamma_0)$,
$(\alpha_0,\ \beta_0)$, $(\alpha_0,\ \gamma_0)$, $(\beta_0,\ \gamma_0)$
이다.

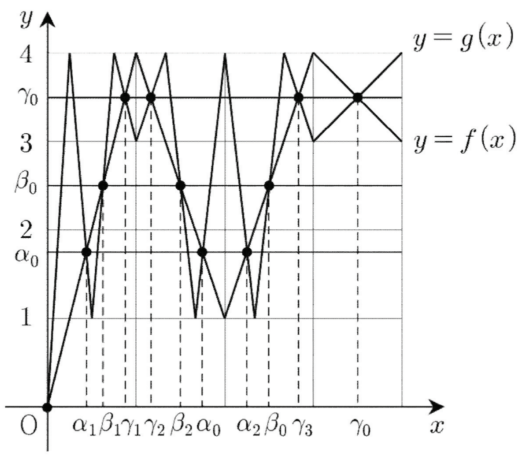
- 경우3

조건
$f(a)=a$, $f(b)=a$, $0\le a<b\le 4$
를 모두 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(\alpha_0,\ \alpha_2)$
이다.

- 경우4

조건
$f(a)=b$, $f(b)=b$, $0\le a<b\le 4$
를 모두 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는
$(\alpha_1,\ \alpha_0)$,
$(\beta_1,\ \beta_0)$, $(\beta_2,\ \beta_0)$
$(\gamma_1,\ \gamma_0)$, $(\gamma_2,\ \gamma_0)$, $(\gamma_3,\ \gamma_0)$
이다.
$a<b$일 때, 순서쌍 $(a,\ b)$의 개수와 집합 $\{a,\ b\}$의 개수는 같으므로 합의 법칙에 의하여 집합 X의 개수는
$6+1+6=13$
답 ②

[참고] ★
두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프를 이용하여
0, α_i, β_j, γ_k
(단, $0 \le i \le 2$, $0 \le j \le 2$, $0 \le k \le 3$)
을 찾을 수도 있다.
하지만 합성함수 $g(x)$의 그래프를 그리는 것과 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점 중에서 y좌표가 같은 점들을 찾아서 묶어내는 것이 쉽지 않으므로, 합성함수의 그래프의 개형을 이용한 풀이는 출제의도와 거리가 멀다고 말할 수 있다.

U021 | 답 ④

[풀이]
$f^{-1}(5)=a$로 두자.
역함수의 성질에 의하여
$f(a)=5$ 즉, $2a-3=5$
a에 대한 일차방정식을 풀면
$a=4$
$\therefore\ f^{-1}(5)=4$
답 ④

U022 | 답 10

[풀이]
$f^{-1}(7)=a$로 두자.
역함수의 성질에 의하여
$f(a)=2a-13=7$
a에 대한 일차방정식을 풀면
$\therefore\ a=10$
답 10

U023 | 답 ⑤

[풀이]
정의역 X의 원소 2에 공역 X의 원소 4가 대응되므로
$f(2)=4$
$f^{-1}(2)=a$로 두면 역함수의 성질에 의하여
$f(a)=2$
정의역 X의 원소 3에 공역 X의 원소 2가 대응되므로
$a=3$
$\therefore\ f(2)+f^{-1}(2)=4+3=7$
답 ⑤

U024 | 답 ③

[풀이]
$f^{-1}(4)=a$로 두면 역함수의 성질에 의하여
$f(a)=4$
$\therefore\ a=3$
답 ③

U025 | 답 5

[풀이]
$f^{-1}(5)=2$이면 $f(2)=5$이므로 $f(2)=8a+b=5$
$\therefore\ 8a+b=5$
답 5

U026 | 답 ④

[풀이]
$x=-1$에서의 함수 $f(x)$의 함숫값을 구하면
$f(-1)=(-1)^3+1=0$
구하는 값을 a로 두면
$g^{-1}(f(-1))=g^{-1}(0)=a$
역함수의 성질에 의하여
$g(a)=0$ 즉, $a-4=0$
풀면
$a=4$
$\therefore\ (g^{-1}\circ f)(-1)=4$
답 ④

U027 | 답 ⑤

[풀이]
모든 함수 $h(x)$에 대하여 주어진 등식이 성립하므로
$h(x)=x$로 두고 주어진 등식을 정리하자.
$(g \circ f)(x)=x$
역함수의 성질에 의하여 $g(x)=f^{-1}(x)$이므로
$g(x)=\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}$
$\therefore\ g(3)=2$
답 ⑤

U028 | 답 ④

[풀이1]
일차함수 $f(x)$는 $a(\neq 0)$의 값에 관계없이 역함수를 갖는다.
문제에서 주어진 등식은
$(f \circ f)(x)=x$
변형하면
$f^{-1}(f(f(x)))=f^{-1}(x)$
역함수의 성질에 의하여
$f(x)=f^{-1}(x)$ $\cdots(*)$
함수 $f(x)$의 역함수는
$f^{-1}(x)=\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}$
이를 (*)에 대입하면
$\frac{1}{a}x-\frac{1}{a}=ax+1$
항등식의 성질에 의하여
$\frac{1}{a}=a,\ -\frac{1}{a}=1$
연립방정식을 풀면
$\therefore\ a=-1$
답 ④

[풀이2]
$f(x)$는 일차함수이므로 $a \neq 0$이다.
합성함수의 정의에 의하여
$(f \circ f)(x)=f(f(x))=a(ax+1)+1=a^2x+a+1$
문제에서 주어진 항등식을 정리하면
$(a^2-1)x+a+1=0$
항등식의 성질에 의하여
$a^2-1=0$(즉, $(a+1)(a-1)=0$), $a+1=0$
a에 대한 연립방정식을 풀면
$a=-1$

답 ④

U029 | 답 −3

[풀이]
$g^{-1}(-7)=a$로 두자.
역함수의 성질에 의하여 $g(a)=3a-1=-7$ 풀면 $a=-2$
함수의 정의에 의하여
$f(g^{-1}(-7))=f(-2)=-2\times|-2|+1=-3$
답 -3

U030 | 답 ⑤

[풀이]
보기에서 주어진 세 함수는 모두 일차함수이므로
$f(x)$가 역함수를 갖는다고 해도 좋다.
문제에서 주어진 항등식에 대하여
$f^{-1}(f(f(f(x))))=f^{-1}(f(x))$
역함수의 성질에 의하여
$f(f(x))=x$
▸ ㄱ. (성립×)
$(f \circ f)(x)=x+2$
▸ ㄴ. (성립○)
$(f \circ f)(x)=x$
▸ ㄷ. (성립○)
$(f \circ f)(x)=x$
답 ⑤

U031 | 답 ①

[풀이1]
$g(x)=f^{-1}(x)$이므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
$f(x)$는 증가함수이므로 만약 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 만난다면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다. 다시 말하면 $f(x)$가 증가함수일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $f(x)$와 직선 $y=x$의 교점이며, 함수 $f(x)$와 직선 $y=x$의 교점은 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점이다.
함수 $f(x)$의 방정식과 직선 $y=x$의 방정식을 연립하면
$\frac{x^2}{4}+a=x$ 정리하면 $x^2-4x+4a=0$
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

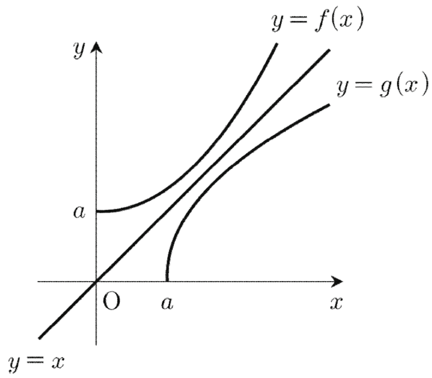
$D/4 = 4 - 4a$

$D/4 > 0$이면 $a < 1$

$D/4 = 0$이면 $a = 1$ (이때, $x = 2$)

$D/4 < 0$이면 $a > 1$

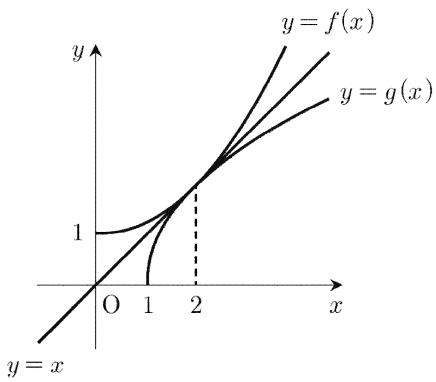
(1) $a > 1$인 경우



위의 그림처럼 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 만나지 않는다.

따라서 방정식 $f(x) = g(x)$는 실근을 갖지 않는다.

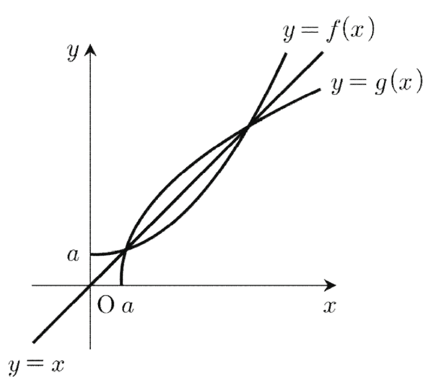
(2) $a = 1$인 경우



위의 그림처럼 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 한 점에서만 만난다.(접한다.) 이때, 교점의 좌표는 $(2,\ 2)$이다.

따라서 방정식 $f(x) = g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

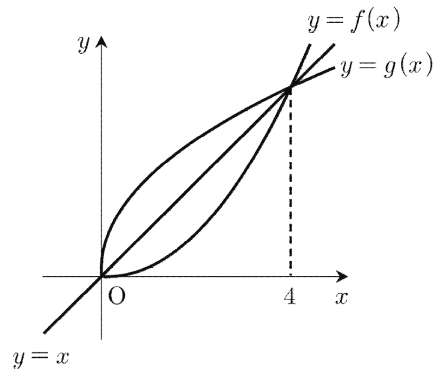
(3) $0 < a < 1$인 경우



위의 그림처럼 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 두 점에서 만난다.

따라서 방정식 $f(x) = g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 이때, 서로 다른 두 실근은 각각 음이 아니다.

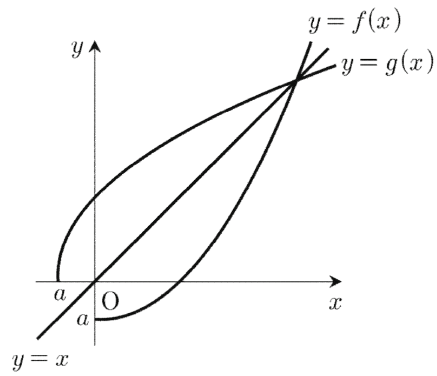
(3) $a = 0$인 경우



위의 그림처럼 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 두 점에서 만난다. 이때, 두 교점의 좌표는 각각 $(0,\ 0)$, $(4,\ 4)$이다.

따라서 방정식 $f(x) = g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다. 이때, 서로 다른 두 실근은 각각 음이 아니다.

(4) $a < 0$인 경우



위의 그림처럼 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 한 점에서 만난다.

따라서 방정식 $f(x) = g(x)$의 서로 다른 실근의 개수는 1이다.

(1)~(4)에서 a의 값의 범위는

$\therefore\ 0 \le a < 1$

답 ①

[풀이2]

$g(x) = f^{-1}(x)$이므로 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 직선 $y = x$에 대하여 대칭이다.

$f(x)$는 증가함수이므로 만약 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프가 만난다면 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점은 직선 $y = x$ 위에 있다. 다시 말하면 $f(x)$가 증가함수일 때, 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점은 함수 $f(x)$와 직선 $y = x$의 교점이며, 함수 $f(x)$와 직선 $y = x$의 교점은 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프의 교점이다.

이제 방정식 $f(x) = x$가 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 가질 실수 a의 값의 범위를 구하자.

함수 $f(x)$의 방정식과 직선 $y = x$의 방정식을 연립하면

$\dfrac{x^2}{4}+a=x$

정리하면

$x^2-4x+4a=0$ $\cdots(*)$

(*)의 음이 아닌 서로 다른 두 실근을 각각 α, β라고 하자.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=4$

$\alpha\beta=4a\ge 0$ 즉, $a\ge 0$

(*)의 판별식을 D라고 하자.

$D/4=4-4a>0$ 즉, $a<1$

a의 값의 범위는 $\therefore\ 0\le a<1$

답 ①

U032

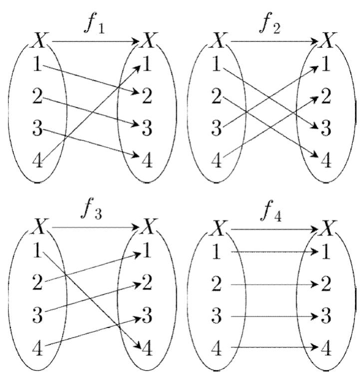
| 답 ④

▶ 실전풀이: [참고]

[풀이]

1, 2, 3, 4만을 원소로 갖는 집합을 X라고 하자.

네 함수 f_1, f_2, f_3, f_4의 대응관계는 아래 그림과 같다.



▸ ㄱ. (거짓)

(반례)

합성함수의 정의에 의하여

$(f_2\circ f_3)(1)=f_2(f_3(1))=f_2(4)=2$,

$f_4(1)=1$이므로

$(f_2\circ f_3)(1)\ne f_4(1)$

함수의 상등에 대한 정의에 의하여

$f_2\circ f_3\ne f_4$

▸ ㄴ. (참)

두 함수 f_1^{-1}, f_3의 정의역은 집합 X로 같다.

역함수의 정의에 의하여

$f_1^{-1}(1)=4=f_3(1)$, $f_1^{-1}(2)=1=f_3(2)$,

$f_1^{-1}(3)=2=f_3(3)$, $f_1^{-1}(4)=3=f_3(4)$

두 함수 f_1^{-1}, f_3의 대응관계가 같으므로

함수의 상등의 정의에 의하여

$f_1^{-1}=f_3$

▸ ㄷ. (참)

두 함수 $f_1\circ f_3$, $f_3\circ f_1$의 정의역은 집합 X로 같다.

합성함수의 정의에 의하여

$(f_1\circ f_3)(1)=f_1(f_3(1))=f_1(4)=1$,

$(f_3\circ f_1)(1)=f_3(f_1(1))=f_3(2)=1$

이므로

$(f_1\circ f_3)(1)=(f_3\circ f_1)(1)$

합성함수의 정의에 의하여

$(f_1\circ f_3)(2)=f_1(f_3(2))=f_1(1)=2$,

$(f_3\circ f_1)(2)=f_3(f_1(2))=f_3(3)=2$

이므로

$(f_1\circ f_3)(2)=(f_3\circ f_1)(2)$

합성함수의 정의에 의하여

$(f_1\circ f_3)(3)=f_1(f_3(3))=f_1(2)=3$,

$(f_3\circ f_1)(3)=f_3(f_1(3))=f_3(4)=3$

이므로

$(f_1\circ f_3)(3)=(f_3\circ f_1)(3)$

합성함수의 정의에 의하여

$(f_1\circ f_3)(4)=f_1(f_3(4))=f_1(3)=4$,

$(f_3\circ f_1)(4)=f_3(f_1(4))=f_3(1)=4$

이므로

$(f_1\circ f_3)(4)=(f_3\circ f_1)(4)$

두 함수 $f_1\circ f_3$, $f_3\circ f_1$의 대응관계가 같으므로

함수의 상등의 정의에 의하여

$f_1\circ f_3=f_3\circ f_1$

이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

[참고]

회전의 관점에서 ㄱ, ㄴ, ㄷ의 참, 거짓을 판단할 수 도 있다.

▸ ㄱ. (거짓)

합성함수 $f_2\circ f_3$은 문제에서 주어진 정사각형을 점 O를 중심으로 하여 시계 방향으로 450° 회전시켰을 때, 꼭짓점 사이의 이동을 나타내는 함수이다. f_4는 문제에서 주어진 정사각형을 점 O를 중심으로 하여 시계 방향으로 360° 회전시켰을 때, 꼭짓점 사이의 이동을 나타내는 함수이다.

$\therefore\ f_2\circ f_3\ne f_4$

▸ ㄴ. (참)

역함수 f_1^{-1}은 문제에서 주어진 정사각형을 점 O를 중심으로 하여 시계 반대 방향으로 90° 회전시켰을 때, 꼭짓점 사이의 이동을 나타내는 함수이다. f_3은 문제에서 주어진 정사각형을 점 O를 중심으로 하여 시계 방향으로 270° 회전시켰을 때, 꼭

짓점 사이의 이동을 나타내는 함수이다.
시계 반대 방향으로 90° 회전시키는 것과 시계 방향으로 270° 회전시키는 것은 같으므로

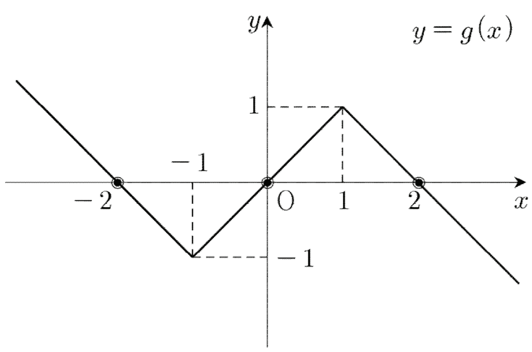
$\therefore\ f_1^{-1} = f_3$

▸ ㄷ. (참)
두 합성함수 $f_1 \circ f_3$, $f_3 \circ f_1$은 모두 주어진 정사각형을 점 O를 중심으로 하여 시계 반대 방향으로 360° 회전시켰을 때, 꼭짓점 사이의 이동을 나타내는 함수이다.

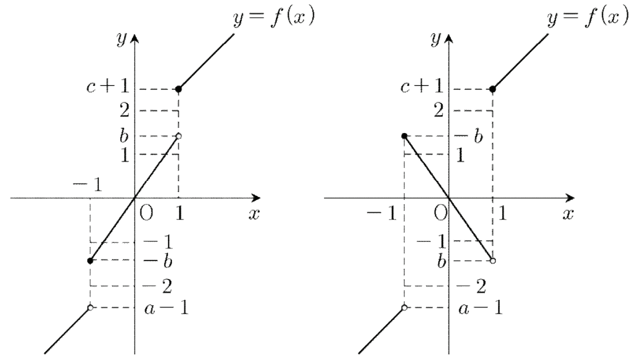
$\therefore\ f_1 \circ f_3 = f_3 \circ f_1$

U033 | 답 ②

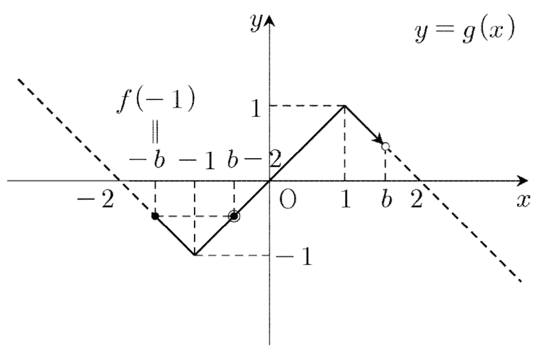
[풀이] ★
우선 합성함수 $(g \circ f)(x)$가 정의되는지를 판단하자.
함수 $f(x)$의 치역은 실수 전체의 집합의 부분집합이고,
함수 $g(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이므로 합성함수 $(g \circ f)(x)$가 정의된다.
함수 $(g \circ f)(x)$의 정의역은 실수 전체의 집합이다.
함수 $(g \circ f)(x)$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 가지므로 함수 $(g \circ f)(x)$의 치역은 실수 전체의 집합이다. 그리고 함수 $(g \circ f)(x)$는 일대일대응이다.
상수 a, b, c의 값에 관계없이 함수 $(g \circ f)(x)$의 그래프가 항상 지나는 점을 찾자.
$f(0) = 0$, $g(0) = 0$에서
$(g \circ f)(0) = g(f(0)) = g(0) = 0$
이므로 함수 $(g \circ f)(x)$의 그래프는 항상 원점을 지난다.



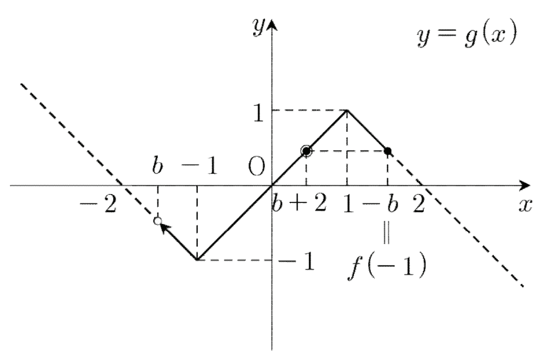
위의 그림에서 $g(2) = g(-2) = 0$이므로
일대일함수의 정의에 의하여
$f(x) \neq -2$, $f(x) \neq 2$ $\cdots$ ㉠
($\because$ 만약 $f(t) = -2$인 $t(\neq 0)$가 존재한다고 하면
$(g \circ f)(t) = g(f(t)) = g(-2) = 0 = (g \circ f)(0)$
이는 가정에 모순이다.
따라서 $f(x)$는 -2를 함숫값으로 가질 수 없다.
마찬가지의 이유로 $f(x)$는 2를 함숫값으로 가질 수 없다.)
만약 $b = 0$이라고 하면 구간 $[-1, 1)$에 속하는
임의의 실수 x에 대하여
$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(0) = 0 (\because f(x) = 0)$
이므로 이는 가정에 모순이다. 따라서 $b \neq 0$이다.
$|b| > 1$이라고 가정하자.
함수 $f(x)$의 그래프는



(왼쪽은 $b > 1$인 경우, 오른쪽은 $b < -1$인 경우)
㉠을 만족시키기 위하여
(경우1) $b > 1$일 때,
$f(-1) = -b > -2$이므로 $1 < b < 2$이다.
(경우2) $b < -1$일 때,
$f(-1) = -b < 2$이므로 $-2 < b < -1$이다.
▸ (경우1)을 함수 $g(x)$의 그래프에서 생각하자.



위의 그림처럼
$(g \circ f)(-1) = g(-b) = g(b-2) = (g \circ f)\left(1 - \dfrac{2}{b}\right)$
이므로 함수 $(g \circ f)(x)$가 일대일대응이라는 조건을 만족시키지 않는다.
따라서 (경우1)은 가능하지 않다.
▸ (경우2)를 함수 $g(x)$의 그래프에서 생각하자.



위의 그림처럼

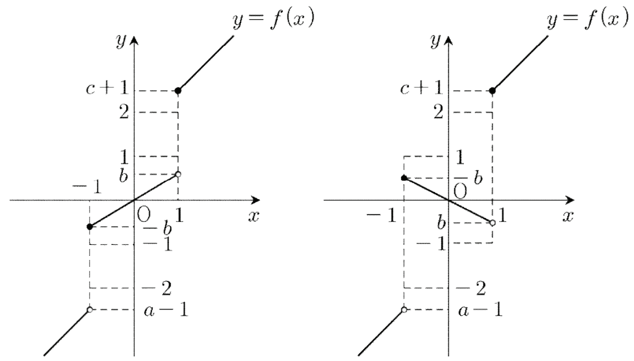
$(g \circ f)(-1) = g(-b) = g(b+2) = (g \circ f)\left(1 + \dfrac{2}{b}\right)$

이므로 함수 $(g \circ f)(x)$가 일대일대응이라는 조건을 만족시키지 않는다.

따라서 (경우2)는 가능하지 않다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $|b| \le 1 (b \ne 0)$이다.

함수 $f(x)$의 그래프는



(왼쪽은 $0 < b < 1$인 경우, 오른쪽은 $-1 < b < 0$인 경우)

위의 두 경우 모두 ㉠을 만족시킨다.

위의 그림에서 왼쪽을 (경우3), 오른쪽을 (경우4)라고 하자.

(경우3), (경우4)에 대하여

$x < -1$일 때, $f(x) < a-1 \le -2$에서

$g(f(x)) > g(a-1) \ge 0$

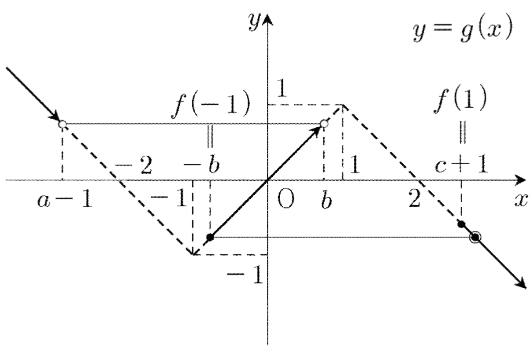
($\because$ 구간 $(-\infty, -2]$에서 함수 $g(x)$는 감소함수)

$x \ge 1$일 때, $f(x) \ge c+1 > 2$에서

$g(f(x)) \le g(c+1) < 0$

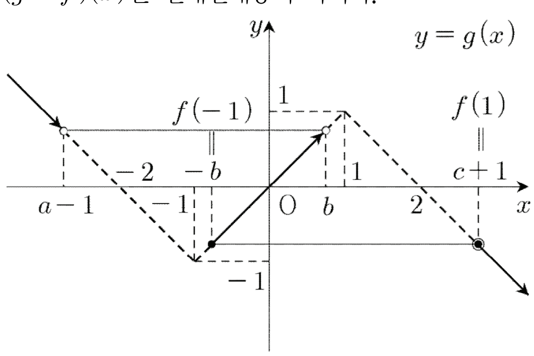
($\because$ 구간 $[2, \infty)$에서 함수 $g(x)$는 감소함수)

▶ (경우3)을 함수 $g(x)$의 그래프에서 생각하자.



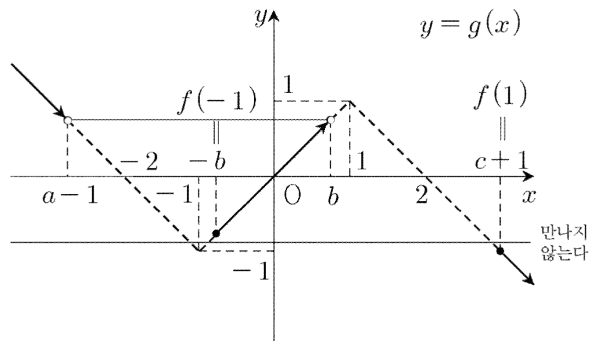
위의 그림처럼 $g(f(1)) > g(f(-1))$이면

함수 $(g \circ f)(x)$는 일대일대응이 아니다.



위의 그림처럼 $g(f(1)) = g(f(-1))$이면

함수 $(g \circ f)(x)$는 일대일대응이 아니다.

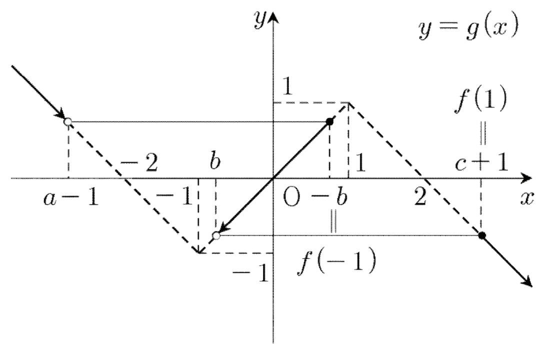


위의 그림처럼 $g(f(1)) < g(f(-1))$이면

함수 $(g \circ f)(x)$는 일대일대응이 아니다.

따라서 (경우3)은 가능하지 않다.

▶ (경우4)를 함수 $g(x)$의 그래프에서 생각하자.



오직 $g(f(1)) = g(b)$이고 $g(f(-1)) = g(a-1)$일 때,

함수 $(g \circ f)(x)$는 일대일대응이다.

$g(f(1)) = g(b)$에서 $g(c+1) = g(b)$

즉, $b = -c+1$

$g(f(-1)) = g(a-1)$에서 $g(-b) = g(a-1)$

즉, $a = b-1 = -c$

$\therefore\ a + b + 2c = -c - c + 1 + 2c = 1$

답 ②

[참고1] ★

두 함수

$f : X \to Y,\ g : Y \to Z$

에 대하여 합성함수 $g \circ f$가 일대일대응이면 두 함수

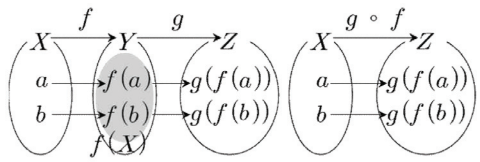
$f : X \to f(X),\ g : f(X) \to Z$

는 일대일대응이다. (단, $f(X)$는 함수 f의 치역이다.)

하지만 정의역이 $f(X)$가 아닌 함수 g가 항상 일대일대응인 것은 아님을 명심하자.

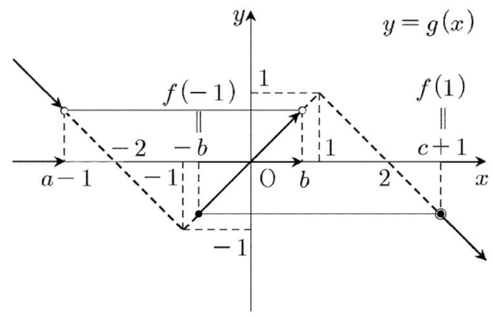
〈증명〉

(1) 우선 함수 f가 일대일대응임을 보이자.

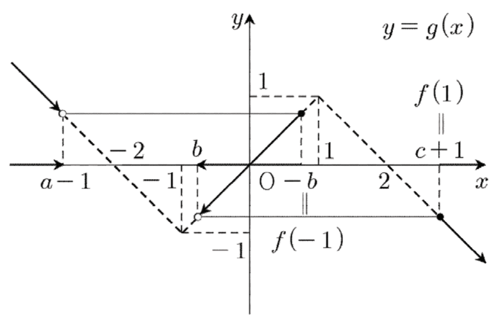


$a\in X$, $b\in X$에 대하여
$a\neq b$일 때, $f(a)=f(b)$라고 가정하면
$g(f(a))=g(f(b))$
그런데 함수 $g\circ f$는 일대일대응이므로 이는 가정에 모순이다.
따라서 $f(a)\neq f(b)$이다.
$a\neq b$일 때, $f(a)\neq f(b)$이므로 함수 f는 일대일대응이다.
(2) 이제 정의역이 $f(X)$인 함수 g가 일대일대응임을 보이자.
두 함수 f, $g\circ f$는 일대일대응이므로
$a\neq b$일 때,
$f(a)\neq f(b)$이고, $g(f(a))\neq g(f(b))$
이다. 따라서 정의역이 $f(X)$인 함수 g는 일대일대응이다.
(1), (2)에 의하여 주어진 명제는 참이다.

[참고2] ★
[참고1]의 실전이론을 이용하면 이 문제를 빠르게 해결할 수 있다.
합성함수 $g\circ f$는 실수 전체의 집합에서 정의된 역함수를 가지므로 함수 $g\circ f$의 치역은 실수 전체의 집합이다.
합성함수 $g\circ f$가 일대일대응이므로 두 함수
$f:R\to f(R)$, $g:f(R)\to R$
은 일대일대응이다.
(단, R은 실수 전체의 집합이고, $f(R)$은 함수 f의 치역이다.)
▸ (경우1) 함수 $f(x)$가 구간 $[-1,\ 1)$에서 증가하는 경우 (즉, $b>0$)
함수 $f(x)$는
구간 $(-\infty,\ -1)$에서 증가($(-\infty,\ a-1)$),
구간 $[-1,\ 1)$에서 증가($[-b,\ b)$),
구간 $[1,\ \infty)$에서 증가($[c+1,\ \infty)$)한다.
함수
$g:f(R)\to R$
의 그래프가 다음과 같이 그려졌을 때,
$g(f(1))=g(f(-1))$
이므로 정의역이 $f(R)$인 함수 g는 일대일대응이 아니다.



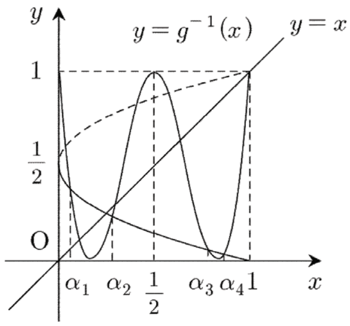
▸ (경우2) 함수 $f(x)$가 구간 $[-1,\ 1)$에서 감소하는 경우 (즉, $b<0$)
함수 $f(x)$는
구간 $(-\infty,\ -1)$에서 증가($(-\infty,\ a-1)$),
구간 $[-1,\ 1)$에서 감소($(b,\ -b]$),
구간 $[1,\ \infty)$에서 증가($[c+1,\ \infty)$)한다.
함수
$g:f(R)\to R$
의 그래프가 다음과 같으면 문제에서 주어진 모든 조건을 만족시킨다.



이 이후의 풀이는 [풀이]와 동일하다.

U034 | 답 ③

[풀이] ★
두 함수 $g(x)$, $h(x)$를 다음과 같이 정의하자.
$g(x)=f(x)$ (단, $0\leq x\leq \dfrac{1}{2}$)
$h(x)=f(x)$ (단, $\dfrac{1}{2}<x\leq 1$)
두 함수 $g(x)$, $h(x)$는 일대일대응이므로 각각 역함수를 갖는다.
(1) 두 곡선 $y=f(f(x))$, $y=g^{-1}(x)$의 위치 관계를 생각하자.
$f(f(x))=g^{-1}(x)$ … ㉠
역함수의 성질에 의하여
$f(f(f(x)))=f(g^{-1}(x))=g(g^{-1}(x))=x$
이때, x가 갖는 값의 범위는 0 이상 1 이하이다.



두 함수 $f(f(x))$, $g^{-1}(x)$의 그래프의 4개의 교점의 x좌표를 각각 α_1, α_2, α_3, α_4라고 하자. (단, $\alpha_1<\alpha_2<\alpha_3<\alpha_4$)

방정식 ㉠의 해집합을 A라고 하면

$A=\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3,\ \alpha_4\}$

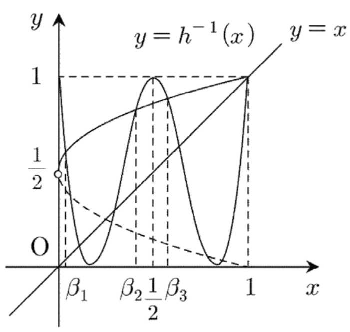
(2) 두 곡선 $y=f(f(x))$, $y=h^{-1}(x)$의 위치 관계를 생각하자.

$f(f(x))=h^{-1}(x)$ $\cdots$㉡

역함수의 성질에 의하여

$f(f(f(x)))=f(h^{-1}(x))=h(h^{-1}(x))=x$

이때, x가 갖는 값의 범위는 0 초과 1 이하이다.



두 함수 $f(f(x))$, $h^{-1}(x)$의 그래프의 4개의 교점 중에서 점 $(1,\ 1)$이 아닌 3개의 교점의 x좌표를 각각 β_1, β_2, β_3라고 하자. (단, $\beta_1<\beta_2<\beta_3$)

방정식 ㉡의 해집합을 B라고 하면

$B=\{\beta_1,\ \beta_2,\ \beta_3,\ 1\}$

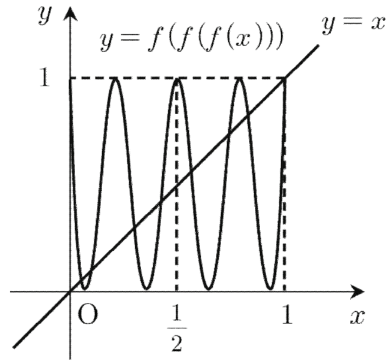
문제에서 주어진 방정식의 해집합은 $A\cup B$이다.

그런데 $A\cap B\neq\varnothing$이므로 문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 8이다.

답 ③

[참고]

다음과 같이 합성함수 $y=f(f(f(x)))$의 그래프를 이용하여 문제를 풀 수도 있다.



함수 $y=f(f(f(x)))$의 그래프와 직선 $y=x$가 8개의 점에서 만나므로 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 8이다.

U035 | 답 5

[풀이1]

함수 $y=\frac{2}{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 4만큼 평행이동시키면 함수 $y=\frac{2}{x}+4$의 그래프와 일치한다.

이 곡선이 점 $(2,\ a)$를 지나므로

$a=\frac{2}{2}+4=5$

$\therefore\ a=5$

답 5

[풀이2]

점 $(2,\ a)$를 y축의 방향으로 -4만큼 평행이동시키면 점 $(2,\ a-4)$와 일치한다. 곡선 $y=\frac{2}{x}$가 이 점을 지나므로

$a-4=\frac{2}{2}=1$

$\therefore\ a=5$

답 5

U036 | 답 5

[풀이]

문제에서 주어진 유리함수를

$y=\frac{k}{x-p}+q(k\neq 0)$

의 꼴로 나타내면

$y=\frac{ax+2}{x+b}=\frac{a(x+b)+2-ab}{x+b}=\frac{2-ab}{x-(-b)}+a$

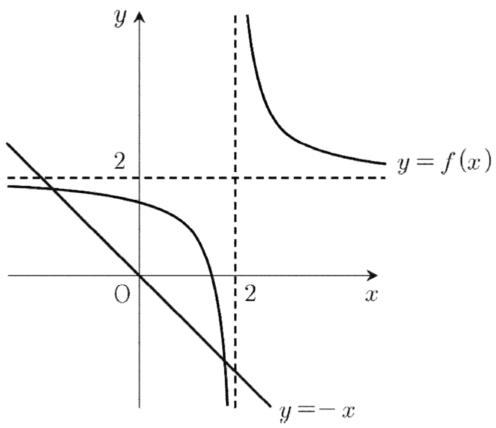
(즉, $k=2-ab$, $p=-b$, $q=a$)

문제에서 주어진 유리함수의 두 점근선은 각각

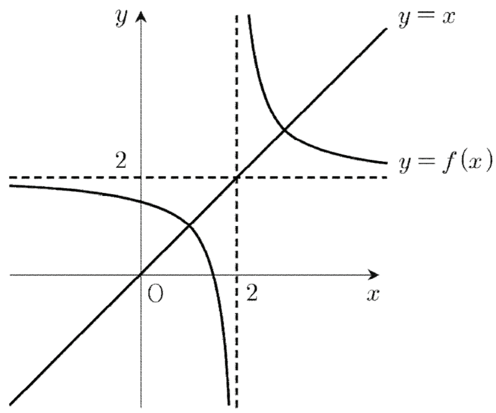
$x=-b,\ y=a$
이 두 점근선의 교점의 좌표는 $(-b,\ a)$이므로
$-b=-2,\ a=3$
$\therefore\ a+b=5$
답 5

U037 | 답 ④

[풀이]
▸ ㄱ. (참)
주어진 함수의 방정식은
$f(x)=2+\dfrac{1}{x-2}$
함수 $g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 2만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 함수 $f(x)$의 그래프와 일치한다.
▸ ㄴ. (거짓)
(반례)
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(3,\ 3)$을 직선 $y=-x$에 대한 대칭이동시킨 점은 $(-3,\ -3)$이다.
그런데 점 $(-3,\ -3)$은 곡선 $y=f(x)$ 위의 점이 아니므로 함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=-x$에 대하여 대칭은 아니다.



▸ ㄷ. (참)
$y=\dfrac{2x-3}{x-2}$를 x에 대하여 풀면
$x=\dfrac{2y-3}{y-2}$
x와 y를 서로 바꾸면
$y=\dfrac{2x-3}{x-2}$ 즉, $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-3}{x-2}$
함수 $f(x)$의 역함수는 $f(x)$이므로 함수 $f(x)$의 그래프와 함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 일치한다.



이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.
답 ④

U038 | 답 14

[풀이]
유리함수 $y=\dfrac{b}{x}(b>0)$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼 평행이동시킨 후, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 유리함수 $y=\dfrac{b}{x+4}+2$의 그래프와 일치한다.
유리함수 $y=\dfrac{b}{x+4}+2$의 그래프가 점 $(0,\ 4)$를 지나므로
$4=\dfrac{b}{0+4}+2$
풀면
$b=8$
따라서 문제에서 주어진 유리함수의 방정식은
$y=\dfrac{8}{x+4}+2$
$a=4,\ b=8,\ c=2$
$\therefore\ a+b+c=14$
답 14

U039 | 답 ⑤

[풀이1]
곡선 $y=\dfrac{3}{x}$는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.
함수 $y=\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동시키면 함수 $y=\dfrac{3}{x-5}+k$의 그래프와 일치하므로 곡선 $y=\dfrac{3}{x-5}+k$는 직선 $y-k=x-5$에 대칭이다.

직선의 방정식을 정리하면

$y=x-5+k$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$-5+k=0$

$\therefore\ k=5$

답 ⑤

[풀이2]

문제에서 주어진 함수

$y=\dfrac{3}{x-5}+k$ …㉠

의 방정식을 x에 대하여 풀면

$xy-5y=3+kx-5k$, $(y-k)x=5y+3-5k$

$x=\dfrac{5y+3-5k}{y-k}$

x와 y를 서로 바꾸어 역함수를 구하면

$y=\dfrac{5x+3-5k}{x-k}$

정리하면

$y=\dfrac{3}{x-k}+5$ …㉡

㉠, ㉡(㉠의 역함수)의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이므로 ㉠, ㉡의 그래프가 서로 일치하면 ㉠은 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ k=5$

답 ⑤

[참고]

문제에서 주어진 함수의 두 점근선이 만나는 교점 $(5,\ k)$가 직선 $y=x$ 위에 있으면 문제에서 주어진 함수의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ k=5$

[풀이3]

곡선

$y=\dfrac{3}{x-5}+k$ …(*)

위의 점 $(2,\ k-1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시키면 점 $(k-1,\ 2)$와 일치한다.

그런데 곡선 (*)은 직선 $y=x$에 대칭이므로

점 $(k-1,\ 2)$은 곡선 (*) 위의 점이다.

$2=\dfrac{3}{k-1-5}+k$

정리하면

$k^2-8k+15=0$

좌변을 인수분해하면

$(k-3)(k-5)=0$

풀면

$k=3$ 또는 $k=5$ …㉠

k의 값을 결정하기 위하여 한 경우를 더 생각하자.

곡선 (*) 위의 점 $(8,\ k+1)$을 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동시키면 점 $(k+1,\ 8)$과 일치한다.

그런데 곡선 (*)은 직선 $y=x$에 대칭이므로

점 $(k+1,\ 8)$은 곡선 (*) 위의 점이다.

$8=\dfrac{3}{k+1-5}+k$

정리하면

$k^2-12k+35=0$

좌변을 인수분해하면

$(k-5)(k-7)=0$

풀면

$k=5$ 또는 $k=7$ …㉡

㉠, ㉡을 모두 만족시키는 k의 값은

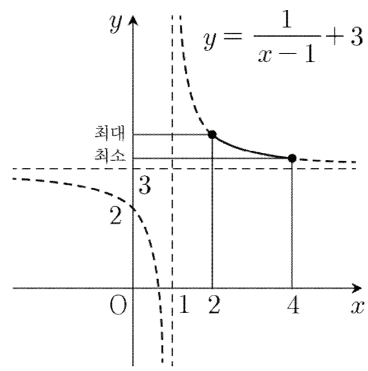
$\therefore\ k=5$

답 ⑤

U040 | 답 ②

[풀이]

유리함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동시키면 유리함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+3$의 그래프와 일치한다.



닫힌구간 $[2,\ 4]$에서 함수 $y=\dfrac{1}{x-1}+3$은

$x=2$일 때, 최댓값 4를 갖는다.

답 ②

U041 | 답 ④

[풀이]

문제에서 주어진 유리함수의 두 점근선의 방정식은 각각

$x=1,\ y=5$

이므로 $2a+1=5$에서 $a=2$

문제에서 주어진 유리함수의 그래프가 점 $(5,\ 6)$을 지나므로

$6=\dfrac{k}{5-1}+5$

풀면

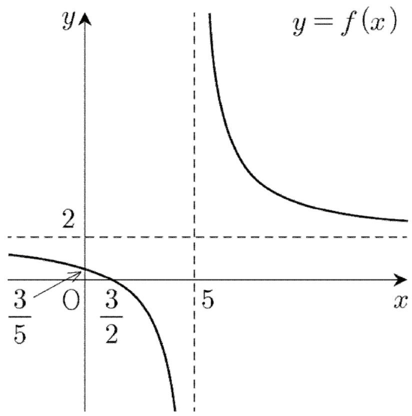
$\therefore\ k=4$

답 ④

U042 | 답 10

[풀이]

$\dfrac{2x-3}{x-5}=2+\dfrac{7}{x-5}$이므로 함수 $y=\dfrac{7}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동시키면 함수 $f(x)$의 그래프와 일치한다.



함수 $f(x)$의 그래프의 두 점근선은 각각 두 직선

$x=5,\ y=2$

이므로

$p=5,\ q=2$

$\therefore\ pq=10$

답 10

U043 | 답 ②

[풀이]

$y=\dfrac{x-1}{x-2}$을 x에 대하여 풀면

$x=\dfrac{2y-1}{y-1}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\dfrac{2x-1}{x-1}$ 즉, $f^{-1}(x)=\dfrac{2x-1}{x-1}$

$a=2,\ b=-1,\ c=-1$

$\therefore\ a+b+c=0$

답 ②

U044 | 답 ⑤

[풀이1]

$f(10)=\dfrac{10+1}{10-1}=\dfrac{11}{9}$이므로

합성함수의 정의에 의하여

$\therefore\ (f\circ f)(10)=f(f(10))$

$=f\left(\dfrac{11}{9}\right)=\dfrac{\dfrac{11}{9}+1}{\dfrac{11}{9}-1}=10$

답 ⑤

[풀이2]

함수 $f(x)$의 역함수의 방정식은

$f^{-1}(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$

함수 $f(x)$의 역함수는 $f(x)$이다.

역함수의 성질에 의하여

$(f^{-1}\circ f)(x)=x$

이므로

$(f\circ f)(x)=(f^{-1}\circ f)(x)=x$

즉, 주어진 합성함수 $f\circ f$는 항등함수이다.

$\therefore\ (f\circ f)(10)=10$

답 ⑤

U045 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 유리함수를

$y=\dfrac{k}{x-p}+q(k\neq 0)$

의 꼴로 나타내면

$y=\dfrac{4x-5}{x-1}=\dfrac{4(x-1)-1}{x-1}=\dfrac{-1}{x-1}+4$

(즉, $k=-1,\ p=1,\ q=4$)

문제에서 주어진 유리함수의 두 점근선은 각각

$x=1,\ y=4$

이 두 점근선의 교점의 좌표는 $(1,\ 4)$이므로

$a=1$, $b=4$

$\therefore\ a+b=5$

답 ⑤

U046

| 답 ③

[풀이]

역함수의 성질에 의하여

$f(4)=7$, 즉 $f(4)=\dfrac{k}{4-3}+1=k+1=7$

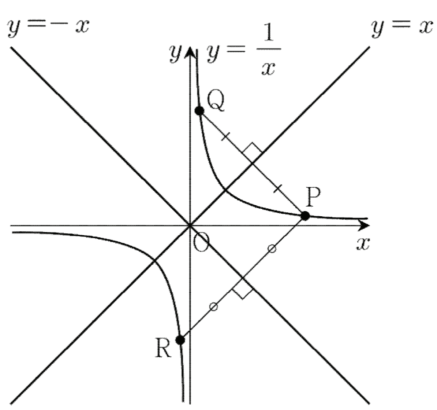
$\therefore\ k=6$

답 ③

U047

| 답 ①

[풀이1]



곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(p,\ q)$에 대하여

$q=\dfrac{1}{p}$이면 $p=\dfrac{1}{q}$이므로

점 $(q,\ p)$는 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위에 있다.

이를 점 Q라고 하자.

이때, 두 점 P, Q는 서로 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

(역으로 점 Q가 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 점이면 점 P는 이 곡선 위에 있다.)

곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 점 $\mathrm{P}(p,\ q)$에 대하여

$q=\dfrac{1}{p}$이면 $-p=\dfrac{1}{-q}$이므로

점 $(-q,\ -p)$는 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위에 있다.

이를 점 R이라고 하자.

이때, 두 점 P, R은 서로 직선 $y=-x$에 대하여 대칭이다.

(역으로 점 R이 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 점이면 점 P는 이 곡선 위에 있다.)

따라서 곡선 $y=\dfrac{1}{x}$은 두 직선 $y=x$, $y=-x$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ a=\pm 1$

답 ①

[참고]

- 두 점 P, Q가 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭임을 증명하자.

(직선 PQ의 기울기)$=\dfrac{q-p}{p-q}=-1$이므로

(직선 PQ의 기울기)$\times$(직선 $y=x$의 기울기)$=-1$

두 직선 PQ, $y=x$는 서로 수직이다.

선분 PQ의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p+q}{2}\right)$

선분 PQ의 중점은 직선 $y=x$ 위에 있다.

따라서 두 점 P, Q는 직선 $y=x$에 대하여 서로 대칭이다.

- 두 점 P, R이 직선 $y=-x$에 대하여 서로 대칭임을 증명하자.

(직선 PR의 기울기)$=\dfrac{q+p}{p+q}=1$이므로

(직선 PR의 기울기)$\times$(직선 $y=-x$의 기울기)$=-1$

두 직선 PR, $y=-x$는 서로 수직이다.

선분 PR의 중점의 좌표는

$\left(\dfrac{p-q}{2},\ \dfrac{q-p}{2}\right)$

선분 PR의 중점은 직선 $y=-x$ 위에 있다.

따라서 두 점 P, R은 직선 $y=-x$에 대하여 서로 대칭이다.

[풀이2] (선택)

유리함수 $y=\dfrac{1}{x}$의 그래프는 직선 $y=0$(x축)에 대하여 대칭이 아니므로 $a\neq 0$이다.

곡선 $y=\dfrac{1}{x}$ 위의 점 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$을 직선 $y=ax$에 대해서 대칭이동시킨 점을 $\mathrm{Q}(x,\ y)$, 선분 PQ의 중점을 R이라고 하자.

내분점의 공식에 의하여

$\mathrm{R}\left(\dfrac{t+x}{2},\ \dfrac{\dfrac{1}{t}+y}{2}\right)$

점 R은 직선 $y=ax$ 위에 있으므로

$$\frac{\frac{1}{t}+y}{2}=a\times\frac{t+x}{2}$$

정리하면

$$a=\frac{1+ty}{t^2+tx} \quad \cdots ㉠$$

두 직선 PQ, $y=ax$는 서로 수직이므로

(직선 PQ의 기울기)×(직선 $y=ax$의 기울기)

$$=\frac{y-\frac{1}{t}}{x-t}\times a=\frac{ty-1}{tx-t^2}\times a=-1$$

㉠을 대입하면

$$\frac{ty-1}{tx-t^2}\times\frac{1+ty}{t^2+tx}=-1$$

정리하면

$$x^2+y^2=t^2+\frac{1}{t^2} \quad \cdots ㉡$$

만약 Q가 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위의 점이라면

$$y=\frac{1}{x} \quad \cdots ㉢$$

㉢을 ㉡에 대입하면

$$x^2+\frac{1}{x^2}=t^2+\frac{1}{t^2}$$

정리하면

$$(x+t)(x-t)\left(1+\frac{1}{tx}\right)\left(1-\frac{1}{tx}\right)=0$$

직선 $y=ax\,(a\neq 0)$이 x축이 아니므로 직선 PQ는 y축에 평행하지 않다. 두 점 P, Q의 x좌표는 같을 수 없으므로

$x\neq t$

직선 $y=ax\,(a\neq 0)$이 y축이 아니므로

$x\neq -t$

따라서 $x=\frac{1}{t}$ 또는 $x=-\frac{1}{t}$

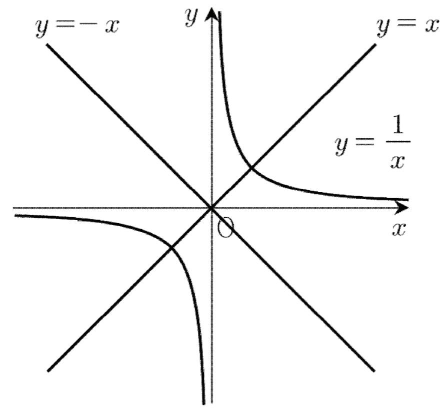
$x=\frac{1}{t}$을 ㉢에 대입하면 $y=t$

이를 ㉠에 대입하면 $a=1$

$x=-\frac{1}{t}$을 ㉢에 대입하면 $y=-t$

이를 ㉠에 대입하면 $a=-1$

∴ $a=1$ 또는 $a=-1$



답 ①

U048 | 답 ①

[풀이]

점 P$(a,\ b)$를 지나고 직선 $y=x$에 수직인 직선을 l이라고 하자.

직선 l의 방정식은

l: $y=-(x-a)+b$

두 직선 l, $y=x$의 방정식을 연립하면

$x=-(x-a)+b$

풀면

$x=\frac{a+b}{2}$, $y=\frac{a+b}{2}$

점 Q의 좌표는

Q$\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{a+b}{2}\right)$

두 점 Q, R의 x좌표가 같으므로

점 R의 x좌표는 $\frac{a+b}{2}$

점 R은 곡선 $y=\frac{1}{x}$ 위에 있으므로

점 R의 좌표는 R$\left(\frac{a+b}{2},\ \frac{2}{a+b}\right)$

답 ①

U049 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 함수의 두 점근선의 방정식은 각각

$x=1$, $y=3$

이므로 두 점근선의 교점의 좌표는 $(1,\ 3)$이다.

문제에서 주어진 함수의 방정식에 $x=0$을 대입하면

$y=3-k$이므로 B$(0,\ 3-k)$이다.

문제에서 주어진 함수의 방정식에 $y=0$을 대입하면

$0=\dfrac{k}{x-1}+3$ 풀면 $x=1-\dfrac{k}{3}$이므로

$\mathrm{A}\left(1-\dfrac{k}{3},\ 0\right)$이다.

점 P의 좌표를 $(s,\ t)$로 두자.

선분 BP의 중점은 두 점근선의 교점이므로 선분의 내분점의 공식에 의하여

$\dfrac{0+s}{2}=1,\ \dfrac{3-k+t}{2}=3$

정리하면

$s=2,\ t=k+3$

점 P의 좌표는 $(2,\ k+3)$이다.

(←두 점 B, $(1,\ 3)$을 잇는 직선과 문제에서 주어진 곡선의 방정식을 연립해도 점 P의 좌표를 구할 수 있다.)

‣ ㄱ. (참)

$k=1$일 때, 점 P의 좌표는 $(2,\ 1+3)$

즉, $(2,\ 4)$이다.

‣ ㄴ. (참)

(직선 AB의 기울기)

$=\dfrac{k-3}{1-\dfrac{k}{3}}=\dfrac{3(k-3)}{-1(k-3)}=-3$

(직선 AP의 기울기)

$=\dfrac{k+3}{\dfrac{k}{3}+1}=\dfrac{3(k+3)}{k+3}=3$

이므로 두 직선의 기울기의 합은 0이다.

‣ ㄷ. (참)

사다리꼴과 삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

(□PBAQ의 넓이)

=(□PBOQ의 넓이)−(△BOA의 넓이)

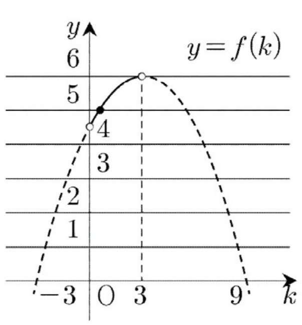
$=\dfrac{\overline{\mathrm{BO}}+\overline{\mathrm{PQ}}}{2}\times\overline{\mathrm{OQ}}-\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{OA}}\,\overline{\mathrm{OB}}$

$=\dfrac{3-k+k+3}{2}\times 2-\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{k}{3}\right)(3-k)$

$=6-\dfrac{1}{6}(3-k)^2=\dfrac{36-(3-k)^2}{6}$

$=\dfrac{(9-k)(3+k)}{6}(=f(k))$(단, $0<k<3$)

이차함수 $f(k)$의 그래프는 다음과 같다.



자연수 $f(k)$의 값은 5가 유일하다.

이차방정식 $f(k)=5$는

$6-\dfrac{1}{6}(3-k)^2=5$

정리하면

$(3-k)^2=6$

풀면

$k=3-\sqrt{6}$

이때, $0<3-\sqrt{6}<1$이므로 $0<k<1$이다.

$(\because \sqrt{6}<\sqrt{9}=3,\ 2=\sqrt{4}<\sqrt{6})$

(직선 BP의 기울기)$=\dfrac{k+3-(3-k)}{2-0}=k$

이므로 직선 BP의 기울기는 0과 1 사이의 값이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

[참고]

사각형 PBAQ의 넓이를 사선 공식을 이용하여 구할 수도 있다.

(□PBAQ의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\left|\begin{matrix} 1-\dfrac{k}{3} & 2 & 2 & 0 & 1-\dfrac{k}{3} \\ 0 & 0 & k+3 & 3-k & 0 \end{matrix}\right|$

$=\dfrac{1}{2}\left|2(k+3)+2(3-k)-\left(1-\dfrac{k}{3}\right)(3-k)\right|$

$=6-\dfrac{1}{6}(3-k)^2$

U050 | 답 ②

[풀이]

함수 $y=\sqrt{2(x+3)}$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼 평행이동하면 함수

$y=\sqrt{2(x-m+3)}=\sqrt{2x-2m+6}$

의 그래프와 일치한다.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$-2m+6=0$

$\therefore\ m=3$

답 ②

U051 | 답 ④

[풀이]

함수 $y=\sqrt{3x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 함수

$y=\sqrt{3(x-1)}+2$ 즉, $y=\sqrt{3x-3}+2$
의 그래프와 일치한다. 문제에서 주어진 조건에 의하여
$a=-3$, $b=2$
$\therefore$ $a+b=-1$
답 ④

U052 | 답 ①

[풀이]
- $a=0$인 경우

상수함수 $y=4$의 그래프를 평행이동시켜서 함수
$y=\sqrt{9x-18}$의 그래프와 일치시킬 수 없다.
- $a<0$인 경우

함수 $y=-\sqrt{a^2x}+4$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시키면 함수
$y=-\sqrt{a^2(x-m)}+4+n$ …㉠
의 그래프와 일치한다.
함수 ㉠의 치역은 $\{y|y\le 4+n\}$이고
함수
$y=\sqrt{9x-18}$ …㉡
의 치역은 $\{y|y\ge 0\}$이므로
두 함수 ㉠, ㉡은 서로 같을 수 없다.
- $a>0$인 경우

함수 $y=\sqrt{a^2x}+4$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동시키면 함수
$y=\sqrt{a^2(x-m)}+4+n$ …㉢
의 그래프와 일치한다.
주어진 조건에 의하여 함수 ㉢은 함수
$y=\sqrt{9(x-2)}$
와 같아야 하므로
$a^2=9$, $m=2$, $4+n=0$
풀면
$a=3$, $m=2$, $n=-4$
$\therefore$ $a+m+n=1$
답 ①

U053 | 답 6

[풀이1]
함수 $y=\sqrt{ax+b}+c$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동시키면 함수
$y=\sqrt{a(x+4)+b}+c+3$
의 그래프와 일치한다. 이 함수의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시키면 함수
$y=\sqrt{a(-x+4)+b}+c+3$
의 그래프와 일치한다. 이 함수의 방정식을 정리하면
$y=\sqrt{-ax+4a+b}+c+3$
문제에서 주어진 조건에 의하여
이 함수의 그래프와 함수
$y=\sqrt{-2x+9}+6$
의 그래프가 일치하므로
$-a=-2$, $4a+b=9$, $c+3=6$
연립방정식을 풀면
$a=2$, $b=1$, $c=3$
$\therefore$ $a+b+c=6$
답 6

[풀이2]
함수 $y=\sqrt{-2x+9}+6$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동시키면 함수
$y=\sqrt{2x+9}+6$
의 그래프와 일치한다. 이 함수의 그래프를 x축의 방향으로 4만큼, y축의 방향으로 -3만큼 평행이동시키면 함수
$y=\sqrt{2(x-4)+9}+6-3$
의 그래프와 일치한다. 이 함수의 방정식을 정리하면
$y=\sqrt{2x+1}+3$
문제에서 주어진 조건에 의하여 이 함수의 그래프는 함수
$y=\sqrt{ax+b}+c$
의 그래프와 일치하므로
$a=2$, $b=1$, $c=3$
$\therefore$ $a+b+c=6$
답 6

U054 | 답 3

[풀이1]
함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 y축의 방향으로 k만큼 평행이동시키면 함수 $y-k=2\sqrt{x}$의 그래프와 일치한다. 이 함수의 그래프가 점 $(1,\ 5)$를 지나므로
$5-k=2\sqrt{1}$ 즉, $5-k=2$
k에 대한 일차방정식을 풀면
$\therefore$ $k=3$
답 3

[풀이2]
점 $(1,\ 5)$를 y축의 방향으로 $-k$만큼 평행이동시키면 점 $(1,\ 5-k)$이다. 이 점이 함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프 위에 있

으므로

$5-k=2\sqrt{1}$ 즉, $5-k=2$

k에 대한 일차방정식을 풀면

$\therefore\ k=3$

답 3

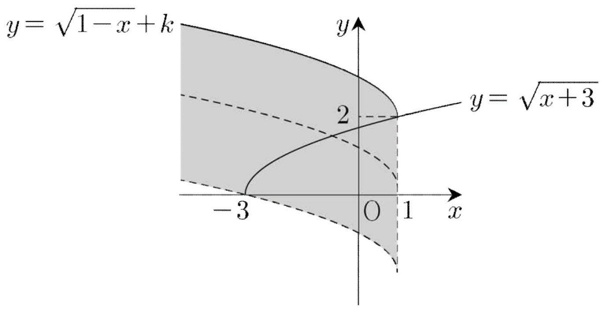
U055 | 답 2

[풀이]

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼 평행이동하면 함수 $y=\sqrt{x+3}$의 그래프와 일치한다.

함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후에 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 함수 $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프와 일치한다.

문제에서 주어진 두 함수의 그래프를 한 좌표평면에 그리면 다음과 같다.



위의 그림에서 곡선 $y=\sqrt{1-x}+k$가 색칠된 영역을 지나면 문제에서 주어진 두 곡선은 만난다.

곡선 $y=\sqrt{1-x}+k$가 점 $(1,\ 2)$를 지날 때의 k의 값을 구하면

$2=\sqrt{1-1}+k$에서 $k=2$

따라서 k의 최댓값은 2이다.

답 2

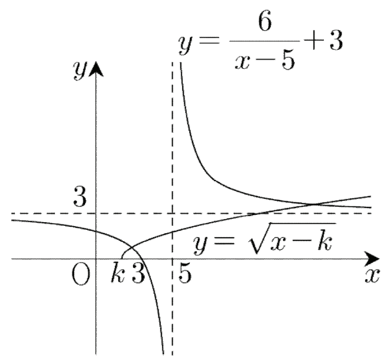
U056 | 답 ①

[풀이]

함수 $y=\dfrac{6}{x-5}+3$의 그래프는 함수 $y=\dfrac{6}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 5만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동한 것이다. 이때, 이 함수의 그래프의 x절편은 3이다. 왜냐하면 방정식 $\dfrac{6}{x-5}+3=0$을 풀면 $x=3$이기 때문이다.

함수 $y=\sqrt{x-k}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

문제에서 주어진 두 함수의 그래프의 개형은 다음과 같다.



위의 그림에서 문제에서 주어진 두 곡선의 교점의 개수가 2이기 위한 k의 범위는

$k\le 3$

따라서 실수 k의 최댓값은 3이다.

답 ①

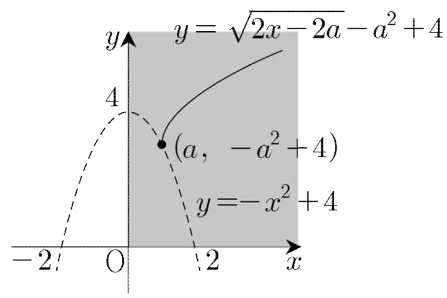
U057 | 답 ①

[풀이]

$y=\sqrt{2x-2a}-a^2+4$

$=\sqrt{2(x-a)}-a^2+4 \qquad \cdots(*)$

이므로, 이 함수의 그래프는 함수 $y=\sqrt{2x}$의 그래프를 x축의 방향으로 a만큼, y축의 방향으로 $-a^2+4$만큼 평행이동한 것이다.



위의 그림처럼 점 $(a,\ -a^2+4)$가 제1사분면에 속하거나 $a=0$ 또는 $a=2$이면 (*)의 그래프는 오직 하나의 사분면(제1사분면)만을 지난다. 그리고 그 역도 성립한다.

$0\le a\le 2$, $0\le -a^2+4\le 4$

연립부등식을 풀면

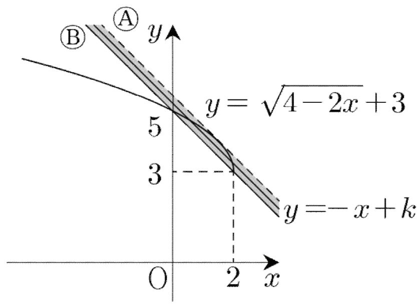
$0\le a\le 2$

따라서 실수 a의 최댓값은 2이다.

답 ①

U058 | 답 ③

[풀이]



곡선 $y=\sqrt{4-2x}+3$에 접하는 직선 $y=-x+k$를 Ⓐ, 점 $(2,\ 3)$을 지나는 직선 $y=-x+k$를 Ⓑ라고 하자.

직선 $y=-x+k$가 두 직선 Ⓐ, Ⓑ 사이의 영역을 지나면, 이 직선은 곡선 $y=\sqrt{4-2x}+3$과 서로 다른 두 점에서 만난다. (단, 경계 Ⓐ는 제외, 경계 Ⓑ는 포함)

직선 $y=-x+k$가 직선 Ⓑ일 때,

k는 최솟값 5를 갖는다.

답 ③

U059 | 답 ④

[풀이]

두 점 P, Q가 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위에 있으므로

$b=\sqrt{a},\ d=\sqrt{c}$

정리하면

$a=b^2,\ c=d^2$

주어진 조건에서 $\dfrac{b+d}{2}=1$이므로

$\therefore$ (직선 PQ의 기울기)

$=\dfrac{d-b}{c-a}=\dfrac{d-b}{d^2-b^2}=\dfrac{1}{d+b}=\dfrac{1}{2}$

답 ④

V 경우의 수 (평가원)

1	②	2	⑤	3	③	4	⑤	5	③
6	④	7	③	8	32	9	30	10	③
11	②	12	②	13	③	14	48	15	②
16	72	17	④	18	⑤	19	120	20	③
21	①	22	③	23	72	24	64	25	16
26	②	27	11	28	8	29	60	30	③
31	126	32	④	33	35	34	20	35	52
36	④	37	④	38	④	39	200	40	②
41	④	42	⑤	43	⑤	44	②	45	360
46	150	47	③	48	⑤	49	④	50	80
51	25	52	160	53	72	54	③	55	60
56	②	57	30	58	45	59	⑤	60	60
61	①	62	②	63	③	64	81	65	①

V001 | 답 ②

[풀이]

두 자리의 자연수를 $a\times 10+b$라고 하자.

조건 (가)에 의하여 b가 가질 수 있는 값은

$0,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8$ (총 5개)

조건 (나)에 의하여 a가 가질 수 있는 값은

$1,\ 2,\ 3,\ 6$ (총 4개)

구하는 값은 곱의 법칙에 의하여

$5\times 4=20$

답 ②

V002 | 답 ⑤

[풀이]

조건 (가), (나)에 의하여 문자열은 ab로 시작해야 한다.

ab○○○○

나머지 자리에 a가 3개 이상 오면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

- 나머지 자리에 a가 2개 오는 경우

aba○a○

aba○○a

ab○a○a

(단, ○에는 b가 온다.)

- 나머지 자리에 a가 1개 오는 경우

aba○○○

ab○a○○

ab○○a○

ab○○○a

(단, ○에는 b가 온다.)

- 나머지 자리에 a가 오지 않는 경우

$abbbbb$

따라서 구하는 경우의 수는 8이다.

답 ⑤

V003 | 답 ③

[풀이]

(1) B를 거쳐서 가는 경우

경로는 $A\to B\to C\to D$이므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $3\times 2\times 1=6$

(2) B를 거쳐서 가지 않는 경우

경로는 $A\to C\to D$이므로 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2\times 1=2$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $6+2=8$이다.

답 ③

V004 | 답 ⑤

[풀이]

우선 세 자리 자연수를 몇 개 만들어보자.

1 2 ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ 백의 자리: 1

~~1~~ 2 3 4 ~~5~~ ~~6~~ 십의 자리: 3

~~1~~ 2 ~~3~~ 4 5 6 일의 자리: 5

⋮

1 2 ~~3~~ ~~4~~ ~~5~~ ~~6~~ 백의 자리: 2

1 ~~2~~ 3 4 ~~5~~ ~~6~~ 십의 자리: 4

1 ~~2~~ 3 ~~4~~ 5 6 일의 자리: 6

⋮

백의 자리, 십의 자리, 일의 자리를 선택하는 경우의 수는 각각 $2,\ 3,\ 4$이다. 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times 3\times 4=24$

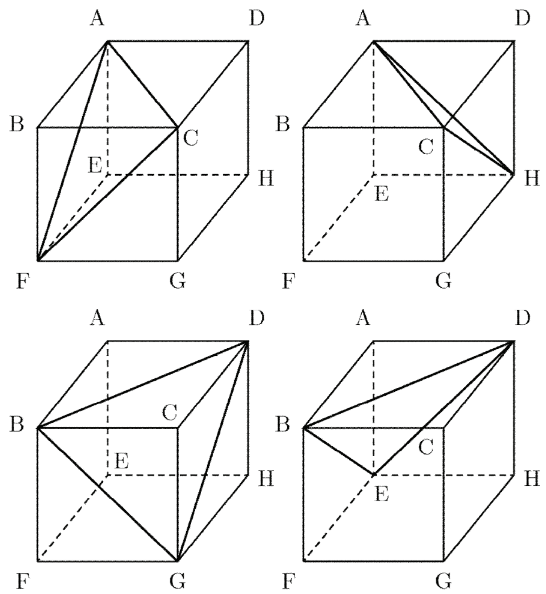
답 ⑤

V005 | 답 ③

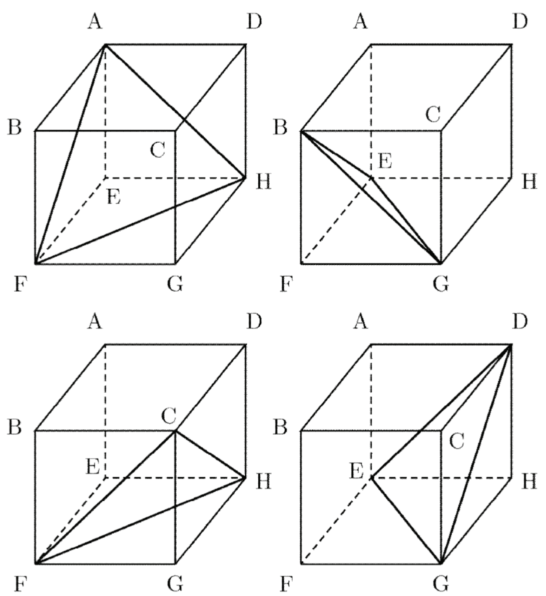
[풀이]

문제에서 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 1로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

피타고라스의 정리에 의하여 정삼각형 AFH의 한 변의 길이를 구하면 $\sqrt{2}$ 이다.
(그리고 정육면체의 8개의 꼭짓점 중에서 임의로 선택한 2개의 꼭짓점 사이의 거리는 1 또는 $\sqrt{2}$ 또는 $\sqrt{3}$ 이다.)
삼각형 AFH와 합동인 삼각형의 3개의 꼭짓점 모두가 정사각형 ABCD의 꼭짓점일 수는 없다. 왜냐하면 정사각형 ABCD의 4개의 꼭짓점 중에서 3개의 꼭짓점을 연결하여 만들어진 삼각형은 정삼각형이 아니기 때문이다.
마찬가지의 이유로 삼각형 AFH와 합동인 삼각형의 3개의 꼭짓점 모두가 정사각형 EFGH의 꼭짓점일 수는 없다.
(1) 삼각형 AFH와 합동인 삼각형의 3개의 꼭짓점 중에서 2개가 정사각형 ABCD의 꼭짓점인 경우



(2) 삼각형 AFH와 합동인 삼각형의 3개의 꼭짓점 중에서 1개가 정사각형 ABCD의 꼭짓점인 경우



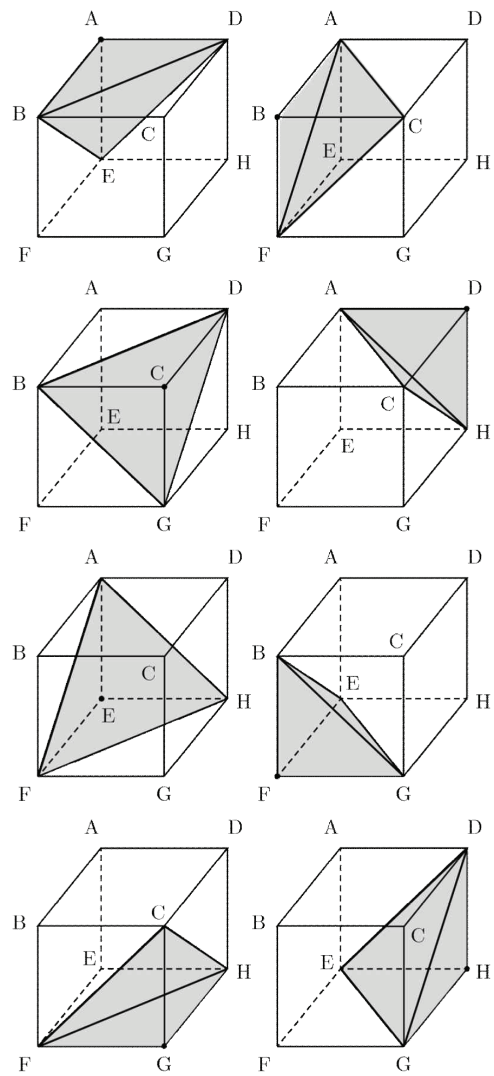
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$4+4=8$

답 ③

[참고1]
아래 표와 같이 '꼭짓점－정삼각형(밑면)－사면체' 의 일대일 대응을 생각할 수 있다.

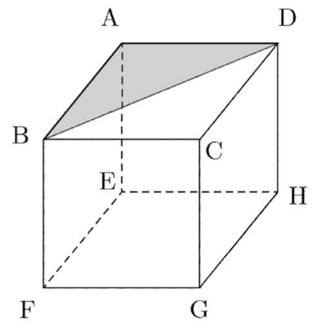
꼭짓점	정삼각형	사면체
A	BDE	ABDE
B	ACF	BACF
C	BDG	CBDG
D	ACH	DACH
E	AFH	EAFH
F	BEG	FBEG
G	CFH	GCFH
H	EDG	HEDG

위의 표를 그림으로 나타내면 다음과 같다.



[참고2]
다음과 같이 여집합의 관점에서 경우의 수를 구해도 좋다.
문제에서 주어진 정육면체의 한 모서리의 길이를 1로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

(1) 만들어진 삼각형이 빗변의 길이가 $\sqrt{2}$ 인 직각이등변삼각형인 경우

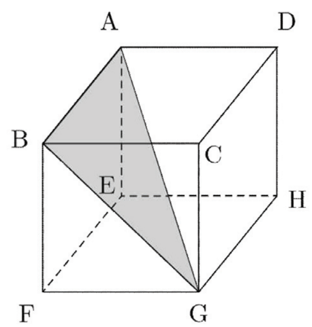


경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4 \times 6 = 24$

즉, 6개의 면에 각각 4개씩 만들어진다.

(2) 만들어진 삼각형의 세 변의 길이가 각각 1, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$ 인 경우



경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4 \times 6 = 24$

여섯 개의 평면

ABGH, FCDE, BCHE,

AFGD, AEGC, BFHD

에 각각 4개씩 만들어진다.

구하는 경우의 수는

${}_8C_3 - (24 + 24) = 8$

답 ③

V006 | 답 ④

[풀이]

인형 A에게 3개의 셔츠 중에서 하나를 입히고, 인형 B에게 남은 2개의 셔츠 중에서 하나를 입히자. 곱의 법칙에 의하여 두 인형 A, B에게 셔츠를 입힐 경우의 수는 $6(=3 \times 2)$이다.

인형 A에게 3개의 바지 중에서 하나를 입히고, 인형 B에게 남은 2개의 바지 중에서 하나를 입히자. 곱의 법칙에 의하여 두 인형 A, B에게 바지를 입힐 경우의 수는 $6(=3 \times 2)$이다.

A인형의 셔츠와 바지의 색은 각각 빨강, 초록으로 결정하거나 초록, 빨강으로 결정하면 된다. 이때, 경우의 수는 2이다.

B인형의 셔츠와 바지의 색은 각각 빨강, 초록으로 결정하거나 초록, 빨강으로 결정하면 된다. 이때, 경우의 수는 2이다.

구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$6 \times 6 \times 2 \times 2 = 144$

답 ④

V007 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 6개의 점을 각각

$A_1(-1,\ 1)$, $A_2(0,\ 1)$, $A_3(1,\ 1)$,

$B_1(-1,\ -1)$, $B_2(0,\ -1)$, $B_3(1,\ -1)$

이차함수 $f(x)$의 방정식을

$f(x) = ax^2 + bx + c(a \neq 0)$ $\cdots (*)$

함수 $f(x)$의 그래프가 세 점 A_1, A_2, A_3을 동시에 지난다고 가정하자.

점 A_1을 (*)에 대입하면

$a - b + c = 1$

점 A_2를 (*)에 대입하면

$c = 1$

점 A_3을 (*)에 대입하면

$a + b + c = 1$

a, b, c에 대한 연립방정식을 풀면

$a = b = 0$, $c = 1$

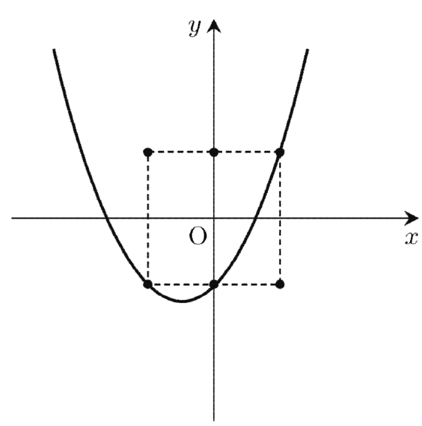
이는 가정에 모순이다.

따라서 함수 $f(x)$의 그래프는 세 점 A_1, A_2, A_3을 동시에 지날 수 없다.

마찬가지의 방법으로 함수 $f(x)$의 그래프는 세 점 B_1, B_2, B_3을 동시에 지날 수 없다.

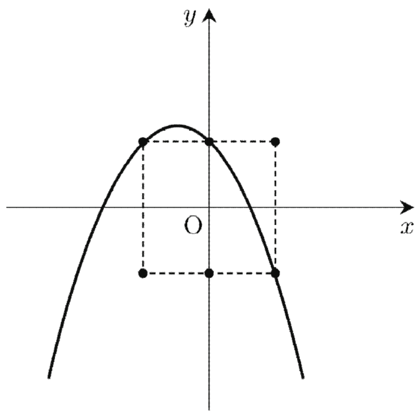
함수의 정의에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 A_i, $B_i(i = 1,\ 2,\ 3)$을 동시에 지날 수 없다.

이상에서 함수 $f(x)$의 그래프로 가능한 것은 아래의 6가지이다.



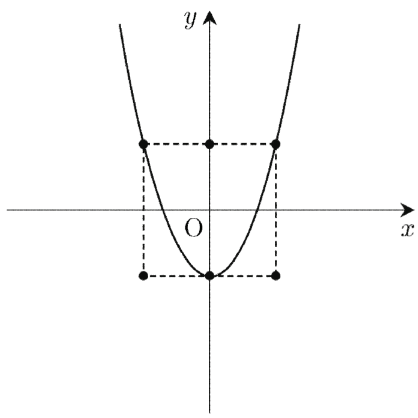
함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=x^2+x-1$

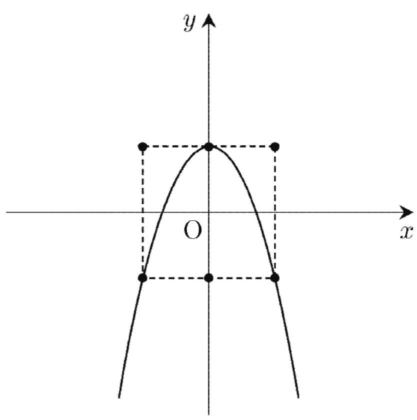


함수 $f(x)$의 방정식은

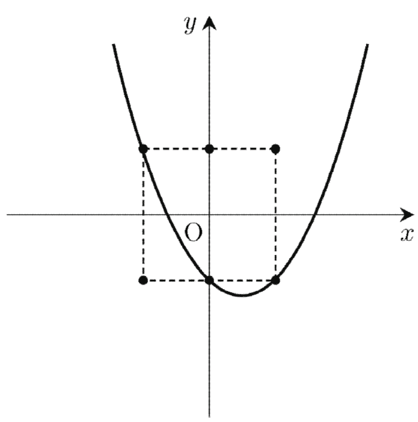
$f(x)=-x^2-x+1$



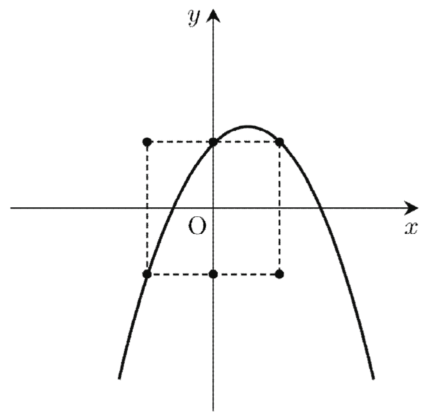
함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=2x^2-1$



함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=-2x^2+1$



함수 $f(x)$의 방정식은 $f(x)=x^2-x-1$



함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-x^2+x+1$

답 ③

V008 ∣답 32

[풀이]

조건 (나)에서 $f(1)=7$이다.

조건 (다)에서 $f(2)$가 가질 수 있는 값은 1 또는 2다.

예를 들어 $f(2)=1$이라고 하자.

조건 (다), (가)에서 $f(3)$가 가질 수 있는 값은 2 또는 3이다.

예를 들어 $f(3)=2$라고 하자.

조건 (다), (가)에서 $f(4)$가 가질 수 있는 값은 3 또는 4이다.

예를 들어 $f(4)=3$이라고 하자.

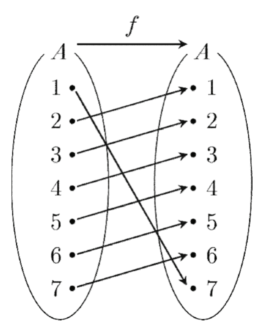
조건 (다), (가)에서 $f(5)$가 가질 수 있는 값은 4 또는 5이다.

예를 들어 $f(5)=4$라고 하자.

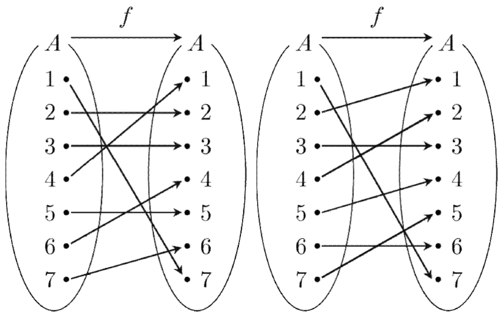
조건 (다), (가)에서 $f(6)$가 가질 수 있는 값은 5 또는 6이다.

예를 들어 $f(6)=5$라고 하자.

이제 $g(7)=6$으로 결정된다.



혹은 아래와 같은 경우들도 가능하다.



⋮

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times2\times2\times2\times2\times1=32$

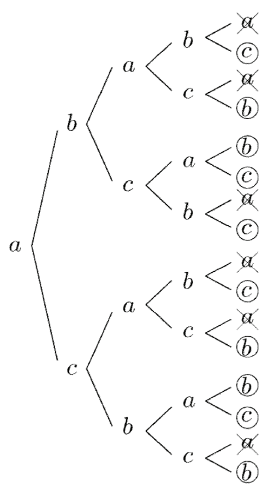
답 32

V009 | 답 30

[풀이1] ★

3가지 색을 각각 a, b, c라고 하자.

예를 들어 맨 위의 사다리꼴에 a가 색칠될 때, 수형도를 이용하여 나머지 사다리꼴에 색칠되는 색을 쓰면 다음과 같다. 이때, 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에는 서로 다른 색이 칠해져야 한다.



맨 위의 사다리꼴에 a가 색칠될 때, 문제에서 주어진 조건을 만족시키도록 나머지 사다리꼴에 칠하는 방법의 수는 10이다.

맨 위의 사다리꼴에 칠할 수 있는 서로 다른 색의 수는 3이므로 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times10=30$

답 30

[풀이2]

3가지 색을 각각 a, b, c라고 하자.

문제에서 주어진 조건을 각각 (가), (나)라고 하자.

(가): 이웃한 사다리꼴에는 서로 다른 색을 칠한다.

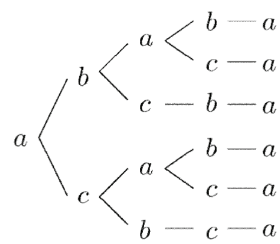
(나): 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 다른 색을 칠한다.

조건 (가)를 만족시키는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times2\times2\times2\times2=48$ ⋯ ㉠

이제 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 서로 같은 색을 칠하는 방법의 수를 구하자.

예를 들어 맨 위의 사다리꼴과 맨 아래의 사다리꼴에 a가 색칠될 때, 수형도를 이용하여 나머지 사다리꼴에 색칠되는 색을 쓰면 다음과 같다.



맨 위의 사다리꼴에 a가 색칠될 때, 조건 (나)를 만족시키지 않도록 나머지 사다리꼴에 칠하는 방법의 수는 6이다. 맨 위의 사다리꼴에 칠할 수 있는 서로 다른 색의 수는 3이므로 조건 (나)를 만족시키지 않도록 나머지 사다리꼴에 칠하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times6=18$ ⋯ ㉡

㉠, ㉡에서 구하는 방법의 수는

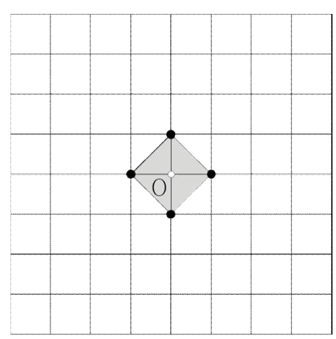
$48-18=30$

답 30

V010 | 답 ③

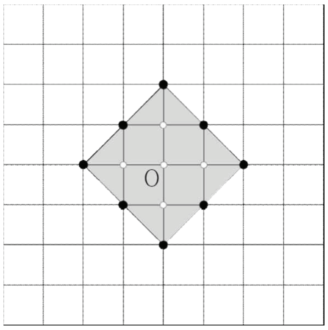
[풀이1]

• 로봇이 1번 움직였을 때, 아래 그림에서 어두운 영역의 내부 및 둘레에 속한 점 ●은 로봇의 도착점으로 가능하다. (단, ○는 도착점이 아니다.)



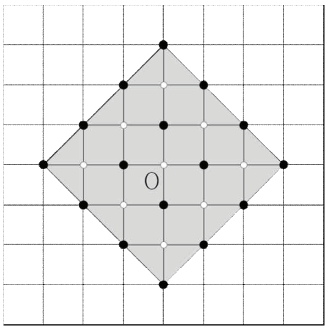
가능한 경로의 수는 4이다.

• 로봇이 2번 움직였을 때, 아래 그림에서 어두운 영역의 내부 및 둘레에 속한 점 ●은 로봇의 도착점으로 가능하다. (단, ○는 도착점이 아니다.)



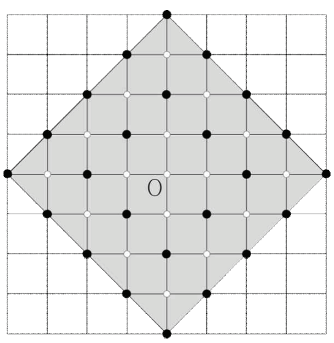
가능한 경로의 수는 4×3이다.

• 로봇이 3번 움직였을 때, 아래 그림에서 어두운 영역의 내부 및 둘레에 속한 점 ●은 로봇의 도착점으로 가능하다. (단, ○는 도착점이 아니다.)

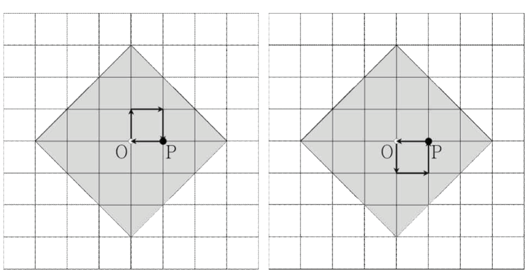


가능한 경로의 수는 $4\times3\times3$이다.

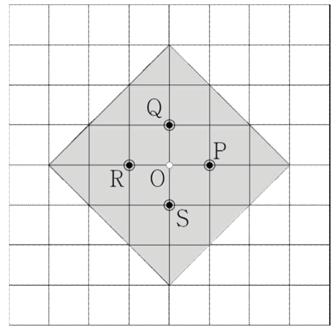
• 로봇이 4번 움직였을 때, 아래 그림에서 어두운 영역의 내부 및 둘레에 속한 점 ●은 로봇의 도착점으로 가능하다. (단, ○는 도착점이 아니다.)



만약 로봇이 3번 움직여서 도착한 점이 P일 때, 로봇은 ←의 방향으로 움직일 수 없다. 왜냐하면 지점 O가 도착점이 될 수 없기 때문이다.



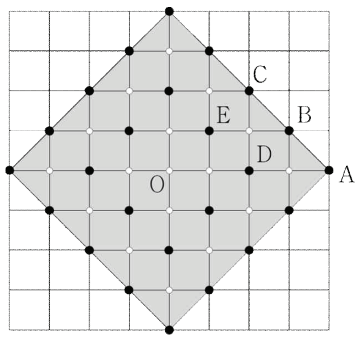
마찬가지의 이유로 로봇이 3번 움직여서 도착한 점이 Q, R, S일 때, 로봇은 각각 ↓의 방향, →의 방향, ↑의 방향으로 움직일 수 없다.



따라서 가능한 경로의 수는
합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여
$4\times3\times3\times3-4\times2=100$

답 ③

[풀이2]
아래 그림에서 어두운 영역의 내부 및 둘레에 속한 점 ●은 로봇의 도착점으로 가능하다.
(단, ○는 도착점이 아니다.)



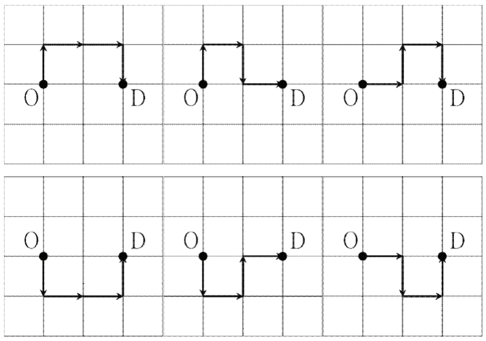
(1) 지점 O에서 출발하여 지점 A에 도착하는 경우
지점 O에서 지점 A까지 도로를 따라
최단거리로 가는 경우의 수를 구하면 된다.
(→, →, →, →)
경우의 수는 1이다.

(2) 지점 O에서 출발하여 지점 B에 도착하는 경우
지점 O에서 지점 B까지 도로를 따라
최단거리로 가는 경우의 수를 구하면 된다.
(→, →, →, ↑), (→, →, ↑, →),
(→, ↑, →, →), (↑, →, →, →)
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\dfrac{4!}{3!}=4$이다.

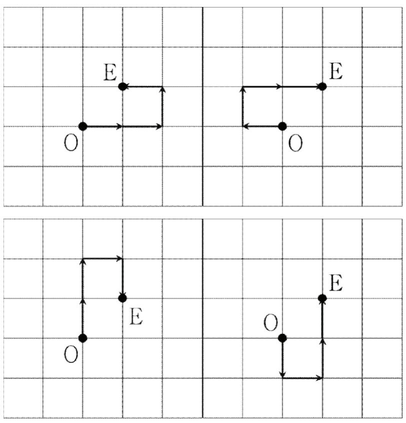
(3) 지점 O에서 출발하여 지점 C에 도착하는 경우
지점 O에서 지점 C까지 도로를 따라
최단거리로 가는 경우의 수를 구하면 된다.
(→, →, ↑, ↑), (→, ↑, →, ↑), (→, ↑, ↑, →),
(↑, →, →, ↑), (↑, →, ↑, →), (↑, ↑, →, →)
같은 것이 있는 순열의 수에 의하여 $\dfrac{4!}{2!2!}=6$이다.

(4) 지점 O에서 출발하여 지점 D에 도착하는 경우

아래 그림처럼 경우의 수는 6이다.



(5) 지점 O에서 출발하여 지점 E에 도착하는 경우
아래 그림처럼 경우의 수는 4이다.

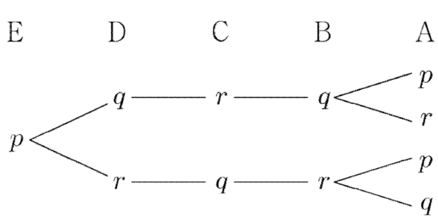


(1)~(5)에서 구하는 경우의 수는
합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여
$1\times4+4\times8+6\times4+6\times4+4\times4=100$

답 ③

V011 | 답 ②

[풀이1]
다섯 개의 영역 A, B, C, D, E의 넓이는 각각
1π, 3π, 5π, 7π, 9π
이다. 주어진 조건에 의하여 물감 1통으로 1π 넓이만큼만 칠할 수 있다.
서로 다른 세 가지 색의 물감을 각각 p, q, r이라 하고, 넓이가 가장 넓은 E부터 시작하여 안쪽 방향으로 색칠할 때, 그려지는 수형도는 다음과 같다.



위의 수형도에 의하여 영역 E에 물감 p를 칠했을 때
가능한 경우의 수는 4이다.
영역 E에는 물감 q 또는 r을 칠할 수도 있으므로
구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$4\times3=12$

답 ②

[풀이2]
다섯 개의 영역 A, B, C, D, E의 넓이는 각각
1π, 3π, 5π, 7π, 9π
이다. 주어진 조건에 의하여 물감 1통으로 1π 넓이만큼만 칠할 수 있으므로 1가지 색으로 세 개의 영역 A, C, E를 모두 칠하는 것은 불가능하다. 따라서 1가지 색으로 서로 다른 세 개의 영역을 모두 칠하는 것은 불가능하다.
다음과 같은 두 가지의 경우가 가능하다.

- A와 C에 같은 색을 칠하고 B와 D에 같은 색을 칠하는 경우

경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_3\mathrm{P}_3=3!$이다.

- A와 E에 같은 색을 칠하고 B와 D에 같은 색을 칠하는 경우

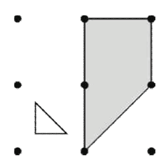
경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_3\mathrm{P}_3=3!$이다.

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는 $3!+3!=12$

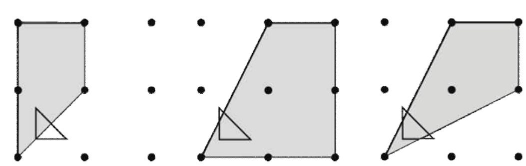
답 ②

V012 | 답 ②

[풀이1]
만약 사각형의 한 꼭짓점이 원점이 아니라면
아래 그림과 같이 사각형은 삼각형을 포함하지 않는다.



사각형의 한 꼭짓점이 원점일 때,
만약 사각형의 나머지 세 꼭짓점 중에서 두 꼭짓점이 각각
(4, 0) 또는 (8, 0)이 아니고,
(0, 4) 또는 (0, 8)이 아니라면
아래 그림과 같이 사각형은 삼각형의 일부만을 포함한다.



따라서 사각형이 삼각형을 완전히 포함하기 위해서는
사각형의 네 꼭짓점 중에서 세 꼭짓점은 반드시

- 원점
- (4, 0) 또는 (8, 0)
- (0, 4) 또는 (0, 8)

이어야 한다.

이제 아래와 같은 네 가지의 경우로 구분하여 생각할 수 있다.

사각형의 네 꼭짓점 중에서 세 꼭짓점이 각각

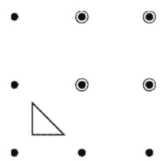
(1) 원점, $(4,\ 0)$, $(0,\ 4)$인 경우

(2) 원점, $(8,\ 0)$, $(0,\ 4)$인 경우

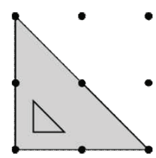
(3) 원점, $(4,\ 0)$, $(0,\ 8)$인 경우

(4) 원점, $(8,\ 0)$, $(0,\ 8)$인 경우

이제 사각형의 나머지 한 꼭짓점을 아래 그림에서 ◉ 표시한 4개의 점 중에서 정하면 된다.



하지만 (4)에서 아래처럼 삼각형이 되는 경우는 제외해야 한다.



따라서 구하는 경우의 수는

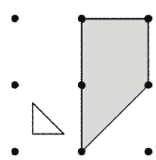
$4^2-1=15$

답 ②

[풀이2]

만약 사각형의 한 꼭짓점이 원점이 아니라면

아래 그림과 같이 사각형은 삼각형을 포함하지 않는다.



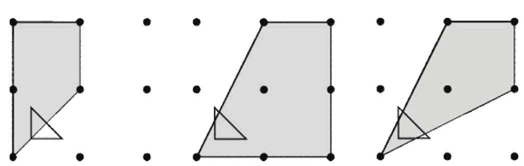
사각형의 한 꼭짓점이 원점일 때,

만약 사각형의 나머지 세 꼭짓점 중에서 두 꼭짓점이 각각

$(4,\ 0)$ 또는 $(8,\ 0)$이 아니고,

$(0,\ 4)$ 또는 $(0,\ 8)$이 아니라면

아래 그림과 같이 사각형은 삼각형의 일부만을 포함한다.



따라서 사각형이 삼각형을 완전히 포함하기 위해서는

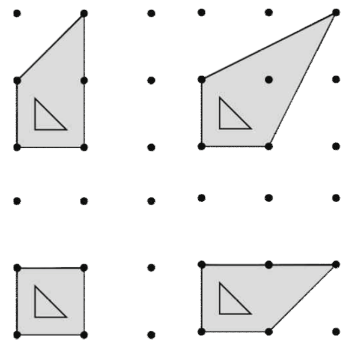
사각형의 네 꼭짓점 중에서 세 꼭짓점은 반드시

- 원점
- $(4,\ 0)$ 또는 $(8,\ 0)$
- $(0,\ 4)$ 또는 $(0,\ 8)$

이어야 한다.

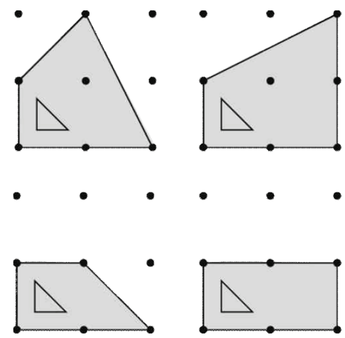
(1) 사각형의 네 꼭짓점 중에서 세 꼭짓점이 각각

원점, $(4,\ 0)$, $(0,\ 4)$인 경우



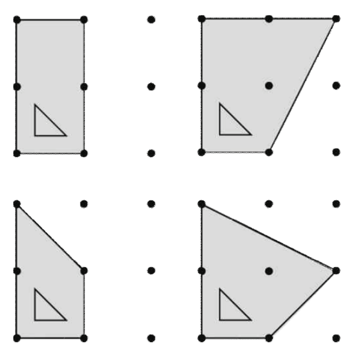
(2) 사각형의 네 꼭짓점 중에서 세 꼭짓점이 각각

원점, $(8,\ 0)$, $(0,\ 4)$인 경우



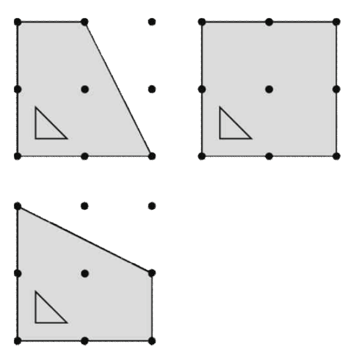
(3) 사각형의 네 꼭짓점 중에서 세 꼭짓점이 각각

원점, $(4,\ 0)$, $(0,\ 8)$인 경우



(4) 사각형의 네 꼭짓점 중에서 세 꼭짓점이 각각

원점, $(8,\ 0)$, $(0,\ 8)$인 경우



(1)~(4)는 동시에 발생하지 않으므로

경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$4+4+4+3=15$

답 ②

V013 | 답 ③

[풀이]

여학생 2명을 각각 a_1, a_2, 남학생 4명을 각각 b_1, b_2, b_3, b_4라고 하자.

6명의 학생 중에서 여학생 a_2를 제외한 5명의 학생이 차례로 뜀틀 넘기를 하게 되는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $5!$이다.

예를 들어 다음과 같은 순서로 뜀틀 넘기를 한다고 하자.

b_1, a_1, b_4, b_2, b_3

$5!$의 각각의 경우에 대하여 여학생 a_1의 바로 전에 혹은 바로 후에 여학생 a_2가 뜀틀 넘기를 한다고 하면 여학생 2명은 연이어 뜀틀 넘기를 하게 된다.

예를 들어 다음과 같은 순서가 가능하다.

b_1, a_2, a_1, b_4, b_2, b_3

b_1, a_1, a_2, b_4, b_2, b_3

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$5! \times 2 = 240$

답 ③

V014 | 답 48

[풀이]

일의 자리와 백의 자리에 3의 배수가 오는 경우는 다음과 같이 2가지다.

			3		6

			6		3

각각의 경우에 대하여 나머지 네 자리에 1, 2, 4, 5를 배열하면 된다.

따라서 구하는 자연수의 개수는

곱의 법칙과 순열의 수에 의하여

$2 \times 4! = 48$

답 48

V015 | 답 ②

[풀이]

여학생 2명이 놀이공원에 입장하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $2!$이고, 남학생 3명이 놀이공원에 입장하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $3!$이다.

구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2! \times 3! = 12$

답 ②

V016 | 답 72

[풀이]

문제에서 주어진 6개의 수에 대하여

$\dfrac{1+2+4+6+8+9}{2} = 15$

이므로 위, 아래의 가로줄에 있는 세 수의 합이 각각 15이면 된다.

$1+6+8=15$, $2+4+9=15$

이므로 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

구하는 경우의 수는 $2 \times {}_3\mathrm{P}_3 \times {}_3\mathrm{P}_3 = 72$이다.

답 72

V017 | 답 ④

[풀이]

1부 2부

(독 중 합) (독 중 합 합)

독창 2팀의 공연 순서를 정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $2!$, 중창 2팀의 공연 순서를 정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $2!$, 합창 3팀의 공연 순서를 정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $3!$이다.

구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2! \times 2! \times 3! = 24$

답 ④

V018 | 답 ⑤

[풀이]

(1) 맨 위에 A, B를 배치할 경우

A, B를 배치할 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $2!$, 나머지 자리에 C, D, E, F를 배치할 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $4!$이다. 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2 \times 4! = 48$

(2) 맨 아래에 A, B를 배치할 경우

A, B를 배치할 경우의 수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여 $2 \times 2!$, 나머지 자리에 C, D, E, F를 배치할 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $4!$이다. 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2 \times 2! \times 4! = 96$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$48 + 96 = 144$

답 ⑤

V019 | 답 120

[풀이]

집합 A의 가장 큰 원소와 가장 작은 원소의 차는

$6-1=5$

이므로 조건 (나)에 의하여

$f(n+1)=6$, $f(n)=1$

예를 들어 $n=1$일 때,

$f(1)=1$, $f(2)=6$

조건 (가)에 의하여

집합 $\{3, 4, 5, 6\}$에서 집합 $\{2, 3, 4, 5\}$로의

일대일대응의 개수는 함수 f의 개수와 같다.

경우의 수는 순열의 수에 의하여 $24(=4!)$이다.

n이 가질 수 있는 값은 $1, 2, 3, 4, 5$이므로

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$5\times4!=120$

답 120

V020 | 답 ③

[풀이1]

다섯 개의 팀을 각각 A, B, C, D, E라고 하자.

(1) 첫째 날에 두 팀, 둘째 날에 세 팀이 공연하는 경우

이 다섯 개의 팀을 일렬로 나열한 후에, 가장 왼쪽부터 순서대로 '첫째 날에 첫 번째로 공연하는 팀', '첫째 날에 두 번째로 공연하는 팀', '둘째 날에 첫 번째로 공연하는 팀', '둘째 날에 두 번째로 공연하는 팀', '둘째 날에 세 번째로 공연하는 팀' 이라고 하자. 예를 들어, B, A, C, E, D와 같이 나열된 경우를 생각하면

B는 첫째 날에 첫 번째로 공연하는 팀,

A는 첫째 날에 두 번째로 공연하는 팀,

C는 둘째 날에 첫 번째로 공연하는 팀,

E는 둘째 날에 두 번째로 공연하는 팀,

D는 둘째 날에 세 번째로 공연하는 팀이다.

경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_5\mathrm{P}_5(=120)$이다.

(2) 첫째 날에 세 팀, 둘째 날에 두 팀이 공연하는 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는

순열의 수에 의하여 ${}_5\mathrm{P}_5(=120)$이다.

(1), (2)는 동시에 일어나지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$120+120=240$

답 ③

[풀이2]

다섯 개의 팀을 각각 A, B, C, D, E라고 하자.

(1) 첫째 날에 두 팀, 둘째 날에 세 팀이 공연하는 경우

첫째 날에 공연하는 팀의 순서를 정하는 경우의 수는

순열의 수에 의하여

${}_5\mathrm{P}_2(={}_5\mathrm{C}_2\times2!)$

둘째 날에 공연하는 팀의 순서를 정하는 경우의 수는

순열의 수에 의하여

${}_3\mathrm{P}_3(={}_3\mathrm{C}_3\times3!)$

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_2\times{}_3\mathrm{P}_3=5!=120$

(2) 첫째 날에 세 팀, 둘째 날에 두 팀이 공연하는 경우

첫째 날에 공연하는 팀의 순서를 정하는 경우의 수는

순열의 수에 의하여

${}_5\mathrm{P}_3(={}_5\mathrm{C}_3\times3!)$

둘째 날에 공연하는 팀의 순서를 정하는 경우의 수는

순열의 수에 의하여

${}_2\mathrm{P}_2(={}_2\mathrm{C}_2\times2!)$

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_5\mathrm{P}_3\times{}_2\mathrm{P}_2=5!=120$

(1), (2)는 동시에 일어나지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$120+120=240$

답 ③

V021 | 답 ①

[풀이]

세 종류의 상품을 각각 a, b, c라고 하자.

맨 위의 가로줄에 서로 다른 세 종류의 상품을 진열하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $3!$이다.

예를 들어 아래와 같이 진열되었다고 하자.

a	b	c

중간의 가로줄에 서로 다른 세 종류의 상품을 진열하는 방법의 수는 2이다.

예를 들어 아래와 같이 진열되었다고 하자.

a	b	c
b	c	a

a	b	c
c	a	b

위의 각각의 경우에 대하여 맨 아래의 가로줄에 서로 다른 세 종류의 상품을 진열하는 방법의 수는 2이다.

예를 들어 아래와 같이 진열되었다고 하자.

a	b	c
b	c	a
a	b	c

a	b	c
b	c	a
c	a	b

a	b	c
c	a	b
a	b	c

a	b	c
c	a	b
b	c	a

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$3!\times2\times2=24$

답 ①

V022 | 답 ③

[풀이1] ★

서울, 부산, 광주, 대구 지역의 사원을 각각

a_i, b_i, c_i, d_i(단, $i=1$, 2, 3)

라고 하자.

서울에서 온 3명의 사원은 각각 다른 조에 속하므로 이들이 속한 3개의 조의 이름을 각각

'a_1조', 'a_2조', 'a_3조'

라고 하자.

	a_1조	a_2조	a_3조
부산			
광주			
대구			

위의 표에 부산, 광주, 대구 지역의 사원을 배치하는 방법의 수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$3!\times3!\times3!=216$

답 ③

[풀이2] ★

서울, 부산, 광주, 대구 지역의 사원을 각각

a_i, b_i, c_i, d_i(단, $i=1$, 2, 3)

라고 하자.

	1조	2조	3조
서울			
부산			
광주			
대구			

위의 표에 서울, 부산, 광주, 대구 지역의 사원을 배치하는 방법의 수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$3!\times3!\times3!\times3!$

그런데 '1조', '2조', '3조'를 나열하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $3!$이므로

구하는 방법의 수는

$3!\times3!\times3!\times3!\times\dfrac{1}{3!}=216$

답 ③

[풀이3] ★

서울, 부산, 광주, 대구 지역의 사원을 각각

a_i, b_i, c_i, d_i(단, $i=1$, 2, 3)

라고 하자. 이를 표로 나타내면 다음과 같다.

서울	a_1	a_2	a_3
부산	b_1	b_2	b_3
광주	c_1	c_2	c_3
대구	d_1	d_2	d_3

(1) 우선 각 지역에서 한 명씩 선택할 경우의 수는 3^4이다.

예를 들어 아래와 같이 선택하였다고 하자.

서울	a_1		
부산			b_3
광주			c_3
대구		d_2	

(2) (1)의 경우에 대하여 각 지역에서 한 명씩 선택할 경우의 수는 2^4이다.

예를 들어 아래와 같이 선택하였다고 하자.

서울		a_2	
부산	b_1		
광주		c_2	
대구			d_3

(3) (2)의 경우에 대하여 각 지역에서 한 명씩 선택할 경우의 수는 1^4이다.

예를 들어 아래와 같이 선택하였다고 하자.

서울			a_3
부산		b_2	
광주	c_1		
대구	d_1		

이제 세 조를 나열하면 다음과 같다.

(1): $\{a_1,\ b_3,\ c_3,\ d_2\}$

(2): $\{a_2,\ b_1,\ c_2,\ d_3\}$

(3): $\{a_3,\ b_2,\ c_1,\ d_1\}$

그런데 (1), (2), (3)에서 만들어진 세 집합을 나열하는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $3!$이므로

구하는 경우의 수는

$\dfrac{3^4 2^4 1^4}{3!} = 216$

답 ③

V023 | 답 72

[풀이1] ★

어른 2명 중 1명은 앞줄에 앉고, 1명은 뒷줄에 앉아야 한다. 앞줄에 2개, 뒷줄에 3개의 의자가 있으므로 어른이 앉을 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times 2\times 3 = 12$

(단, 맨 앞에 곱해진 2는 앞줄에 앉을 어른을 선택하는 경우의 수이다.)

이제 남은 자리에 어린이 3명이 앉으면 된다.

어린이가 앉을 방법의 수는 순열의 수에 의하여

$3! = 6$

구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$12\times 6 = 72$

답 72

[풀이2] +확률과 통계(조합) ★

문제에서 주어진 조건을 무시할 때, 어른 2명과 어린이 3명이 놀이기구의 의자에 앉을 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $5!$이다.

(1) 어른 2명이 모두 앞줄에 앉을 경우

어린이 3명은 모두 뒷줄에 앉게 된다.

순열의 수와 곱의 법칙에 의하여 방법의 수는

$2!\times 3! = 12$

(2) 어른 2명이 모두 뒷줄에 앉을 경우

어린이 3명 중에서 2명은 앞줄에 1명은 뒷줄에 앉게 된다.

어른 2명이 앉을 자리는 결정하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여

${}_3C_2(=3)$

이 3가지 경우 각각에 대하여 어른 2명과 어린이 3명이 앉는 경우의 수는

순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$2!\times 3! = 12$

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times 12 = 36$

따라서 구하는 경우의 수는

$5! - ((1)$의 경우$+(2)$의 경우$)$

$= 5! - (12+36) = 72$

답 72

V024 | 답 64

[풀이]

(1) 할머니와 할아버지가 1열에 앉을 경우

할아버지와 할머니가 앉을 좌석을 결정하는

경우의 수는 곱의 법칙과 순열의 수에 의하여

$2\times 2! = 4$

아버지와 어머니가 앉을 좌석을 결정하는

경우의 수는 곱의 법칙과 순열의 수에 의하여

$2\times 2! = 4$

아들과 딸이 앉을 좌석을 결정하는

경우의 수는 순열의 수에 의하여

$2! = 2$

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$4\times 4\times 2 = 32$

(2) 할머니와 할아버지가 2열에 앉을 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는 32이다.

(1), (2)가 동시에 일어나지 않으므로

구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$32+32 = 64$

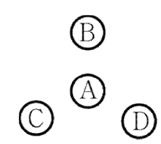
답 64

V025 | 답 16

▶ 실전풀이: [풀이2]

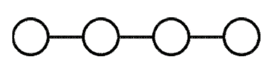
[풀이1]

문제에서 주어진 4개의 섬을 아래 그림처럼 각각 A, B, C, D라고 하자.

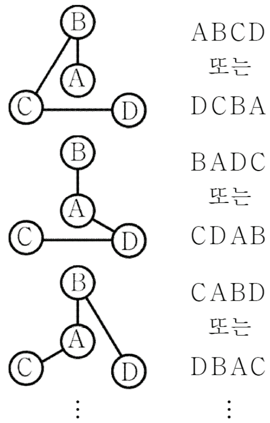


(1) 각각의 섬에 1개 또는 2개의 다리만을 건설하는 경우

섬들의 연결 상태는 아래 그림과 같아진다.



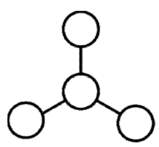
예를 들어 아래와 같은 경우들이 가능하다.



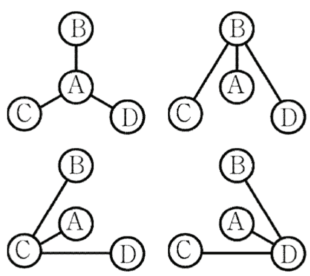
4개의 섬 A, B, C, D를 일렬로 나열하는 경우의 수는

순열의 수에 의하여 $4!$이므로 경우의 수는 $12\left(=\dfrac{4!}{2}\right)$이다.

(2) 각각의 섬에 1개 또는 3개의 다리만을 건설하는 경우 섬들의 연결 상태는 아래 그림과 같아진다.



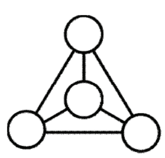
다음의 4가지의 경우가 가능하다.



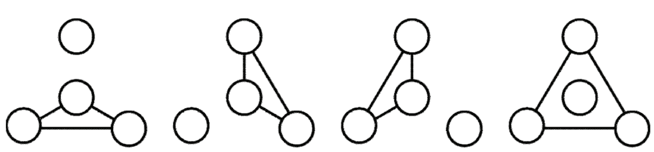
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$12+4=16$

답 16

[풀이2]
모든 섬에 각각 3개의 다리만을 건설하여 4개의 섬을 모두 연결하면 다음과 같다.
이때, 필요한 다리의 개수는 6이다.



6개의 다리 중에서 3개의 다리를 없애서 4개의 섬 중에서 연결되지 않는 섬이 있도록 하는 경우는 다음과 같다.



따라서 구하는 경우의 수는
${}_6\mathrm{C}_3-4=20-4=16$

답 16

V026 | 답 ②

[풀이1]
조건 (가), (나), (다)에 의하여 b는 둘째 자리에 오거나 넷째 자리에 와야 한다.
(1) b가 둘째 자리에 오는 경우 (◯b◯◯◯)
ab◯◯◯
나머지 자리에 c, d, e를 배열하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여 $3!-2!$이다.
이때, $2!$은 c가 다섯째 자리에 올 때의 경우의 수이다.
◯b◯a◯
나머지 자리에 c, d, e를 배열하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여 $3!-2!$이다.
이때, $2!$은 c가 다섯째 자리에 올 때의 경우의 수이다.
◯b◯◯a
나머지 자리에 c, d, e를 배열하는 경우의 수는
순열의 수에 의하여 $3!$이다.
합의 법칙에 의하여 경우의 수는 $4+4+6=14$이다.
(2) b가 넷째 자리에 오는 경우 (◯◯◯b◯)
a◯◯b◯, ◯a◯b◯, ◯◯◯ba
(1)과 같은 방법으로 경우의 수는 14이다.
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 경우의 수는
$14+14=28$

답 ②

[풀이2]
문제에서 주어진 문자를 모두 사용하여 만든 다섯 자리 문자열만을 원소로 하는 전체집합을 U라고 하자. 전체집합 U의 세 부분집합 P, Q, R은 다음을 만족시킨다고 하자.
셋째 자리에 a가 오는 다섯 자리 문자열만을 원소로 하는 집합을 P, 첫째 자리 또는 셋째 자리 또는 다섯째 자리에 b가 오는 다섯 자리 문자열만을 원소로 하는 집합을 Q, 다섯째 자리에 c가 오는 다섯 자리 문자열만을 원소로 하는 집합을 R이라고 하자.
순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
$n(U)={}_5\mathrm{P}_5=5!=120$
$n(P)={}_4\mathrm{P}_4=4!=24$
$n(Q)=3\times{}_4\mathrm{P}_4=3\times4!=72$
$n(R)={}_4\mathrm{P}_4=4!=24$

$n(P\cap Q)=2\times{}_3\mathrm{P}_3=2\times3!=12$

$n(Q\cap R)=2\times{}_3\mathrm{P}_3=2\times3!=12$

$n(R\cap P)={}_3\mathrm{P}_3=3!=6$

$n(P\cap Q\cap R)={}_2\mathrm{P}_2=2!=2$

세 조건 (가), (나), (다)를 모두 만족시키는 집합은

$P^C\cap Q^C\cap R^C$

이므로

$n(P^C\cap Q^C\cap R^C)=n((P\cup Q\cup R)^C)$

$=n(U)-n(P\cup Q\cup R)$

$=n(U)-n(P)-n(Q)-n(R)$

$+n(P\cap Q)+n(Q\cap R)+n(R\cap P)$

$-n(P\cap Q\cap R)$

$=120-24-72-24+12+12+6-2$

$=28$

답 ②

V027 | 답 11

[풀이]

${}_n\mathrm{C}_3$이 성립하기 위해서는 n은 3 이상의 자연수이어야 한다.

조합의 수와 순열의 수의 정의에 의하여

$${}_n\mathrm{C}_3=\frac{n(n-1)(n-2)}{6},\quad {}_n\mathrm{P}_2=n(n-1)$$

주어진 등식에 대입하면

$$2\times\frac{n(n-1)(n-2)}{6}=3\times n(n-1)$$

양변을 양수 $n(n-1)$로 나누어 정리하면

$n-2=9$

$\therefore\ n=11$

답 11

V028 | 답 8

[풀이]

${}_n\mathrm{P}_3$이 성립하려면 n은 3 이상의 자연수이어야 한다.

순열의 수와 조합의 수에 의하여

$${}_n\mathrm{P}_3=n(n-1)(n-2),\quad {}_n\mathrm{C}_2=\frac{n(n-1)}{2}$$

주어진 방정식은

$n(n-1)(n-2)=6n(n-1)$

양변을 양수 $n(n-1)$로 나누면

$n-2=6$

$\therefore\ n=8(\geq 3)$

답 8

V029 | 답 60

[풀이]

1학년 6명 중에서 4명을 뽑는 경우의 수는

조합의 수에 의하여 ${}_6\mathrm{C}_4$,

2학년 4명 중에서 3명을 뽑는 경우의 수는

조합의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{C}_3$이므로

구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$${}_6\mathrm{C}_4\times{}_4\mathrm{C}_3={}_6\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1=\frac{6\times5}{2\times1}\times4=60$$

답 60

V030 | 답 ③

[풀이]

100 이하의 자연수에서 서로 다른 3개를 선택할 때,

17을 포함하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여

$a=1\times{}_{99}\mathrm{C}_2$

100 이하의 자연수에서 서로 다른 3개를 선택할 때,

17을 포함하는 않는 방법의 수는 조합의 수에 의하여

$b={}_{99}\mathrm{C}_3$

$$\therefore\ \frac{b}{a}=\frac{\dfrac{99\times98\times97}{1\times2\times3}}{\dfrac{99\times98}{1\times2}}=\frac{97}{3}$$

답 ③

V031 | 답 126

[풀이1]

(1) 2개의 증권회사에 입사원서를 내는 경우

통신회사, 건설회사에 각각 1개씩의 입사원서를 내면 된다.

경우의 수는 조합의 수에 의하여

${}_3\mathrm{C}_2\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_1=3\times3\times4=36$

(2) 2개의 통신회사에 원서를 내는 경우

증권회사, 건설회사에 각각 1개씩의 입사원서를 내면 된다.

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_1=3\times3\times4=36$

(3) 2개의 건설회사에 원서를 내는 경우

통신회사, 증권회사에 각각 1개씩의 입사원서를 내면 된다.

${}_3\mathrm{C}_1\times{}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=3\times3\times6=54$

(1), (2), (3)은 동시에 일어나지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$36+36+54=126$

답 126

[풀이2]

3개의 증권 회사, 3개의 통신 회사, 4개의 건설 회사를 각각

A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3, C_4

라고 하자.

구하는 경우의 수는

$$\underbrace{{}_3C_1}_{A}\times\underbrace{{}_3C_1}_{B}\times\underbrace{{}_4C_1}_{C}\times\underbrace{{}_7C_1}_{A,\ B,\ C}\times\frac{1}{2!}=126$$

이때, 2!으로 나누는 이유는 다음과 같이 중복되는 경우가 발생하기 때문이다. (→의 순서대로 네 번 선택하는 것이다.)

$A_2\to B_3\to C_1\to A_1$

$A_1\to B_3\to C_1\to A_2$(위와 중복된다.)

$A_3\to B_1\to C_3\to C_2$

$A_3\to B_1\to C_2\to C_3$(위와 중복된다.)

⋮

답 126

V032 | 답 ④

[풀이]

A지역의 세 곳의 관광지 중에서 세 곳을 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_3C_3$

B지역의 네 곳의 관광지 중에서 세 곳을 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_3$

C지역의 다섯 곳의 관광지 중에서 세 곳을 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_3$

D지역의 여섯 곳의 관광지 중에서 세 곳을 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_6C_3$

전체 관광지에서 세 곳을 선택하는 경우의 수는

합의 법칙에 의하여

${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3=1+4+10+20=35$

답 ④

[참고] +확률과 통계(이항정리)

파스칼의 삼각형을 이용하여 계산하면

${}_3C_3+{}_4C_3+{}_5C_3+{}_6C_3={}_7C_4=35$

V033 | 답 35

[풀이1]

두 자연수의 곱이 홀수이기 위해서는 두 수가 모두 홀수여야 한다.

10 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

$${}_{10}C_2=\frac{10\times9}{2\times1}=45$$

10 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 홀수를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

따라서 구하는 경우의 수는

$45-10=35$

답 35

[풀이2]

(짝수)×(짝수)=(짝수)

(짝수)×(홀수)=(짝수)

(홀수)×(홀수)=(홀수)

이므로 두 자연수의 곱이 짝수이기 위해서는 두 수 중에서 적어도 하나 이상의 수가 짝수여야 한다.

(1) 두 자연수가 모두 짝수인 경우

10 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 짝수를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

$${}_5C_2=\frac{5\times4}{2\times1}=10$$

(1) 한 자연수는 짝수, 나머지 자연수는 홀수인 경우

10 이하의 자연수 중에서 짝수와 홀수를 각각 하나씩 선택하는 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_5C_1\times{}_5C_1=5\times5=25$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$10+25=35$

답 35

V034 | 답 20

[풀이]

우선 주어진 6개의 공에서 3개를 선택하여 바구니 A에 담자.

이때, 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_6C_3$이다.

이제 남은 3개의 공을 바구니 B에 담자.

이때, 경우의 수는 1이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_6C_3 \times 1 = 20$

답 20

V035 | 답 52

[풀이1]
문제에서 주어진 조건에 의하여 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ 중에서는 2과목까지만 선택할 수 있으므로 과학탐구 8과목 중 3과목을 선택하는 경우는 아래 표와 같다.

경우	물리Ⅰ, 화학Ⅰ, 생물Ⅰ, 지구과학Ⅰ	물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ
(1)	1과목 선택	2과목 선택
(2)	2과목 선택	1과목 선택
(3)	3과목 선택	0과목 선택
~~(4)~~	~~0과목 선택~~	~~3과목 선택~~

위의 표에 의하여 구하는 경우의 수는
(Ⅰ, Ⅱ의 8과목 중에서 3과목을 선택하는 경우의 수)
$-$(Ⅱ의 4과목 중에서 3과목을 선택하는 경우의 수)
$= {}_8C_3 - {}_4C_3 = 56 - 4 = 52$

답 52

[풀이2]
문제에서 주어진 조건에 의하여 물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ 중에서는 2과목까지만 선택할 수 있으므로 과학탐구 8과목 중 3과목을 선택하는 경우는 아래 표와 같다.

경우	물리Ⅰ, 화학Ⅰ, 생물Ⅰ, 지구과학Ⅰ	물리Ⅱ, 화학Ⅱ, 생물Ⅱ, 지구과학Ⅱ
(1)	1과목 선택	2과목 선택
(2)	2과목 선택	1과목 선택
(3)	3과목 선택	0과목 선택

조합의 수와 곱의 법칙에 의하여
(1)의 경우의 수: ${}_4C_1 \times {}_4C_2 = 4 \times 6 = 24$
(2)의 경우의 수: ${}_4C_2 \times {}_4C_1 = 6 \times 4 = 24$
(3)의 경우의 수: ${}_4C_3 \times {}_4C_0 = 4 \times 1 = 4$
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$24 + 24 + 4 = 52$

답 52

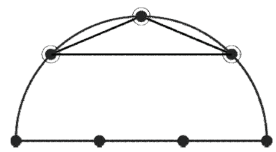
V036 | 답 ④

[풀이]
5일 중에서 3일을 선택하는 경우의 수는
조합의 수에 의하여 ${}_5C_3$이다.
남은 2일 중에서 하루를 선택하여 수영, 줄넘기 중 한 가지를 할 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_2C_1 \times 2$이다.
남은 하루에 농구, 축구 중 한 가지를 할 경우의 수는 2이다.
구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
${}_5C_3 \times {}_2C_1 \times 2 \times 2 = 80$

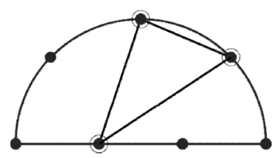
답 ④

V037 | 답 ④

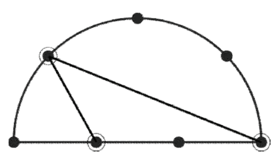
[풀이1] ★
한 직선 위에 있지 않은 3개의 점으로 하나의 삼각형이 결정된다.
문제에서 주어진 반원 위의 7개의 점을 3개의 호 위의 점과 4개의 지름 위의 점으로 구별하자.
(1) 삼각형의 세 꼭짓점이 호 위에 있는 경우



경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_3C_3$이다.
(2) 삼각형의 두 꼭짓점이 호 위에 있는 경우
나머지 한 꼭짓점은 지름 위에 있어야 한다.



경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_3C_2 \times {}_4C_1$이다.
(3) 삼각형의 한 꼭짓점이 호 위에 있는 경우
나머지 두 꼭짓점은 지름 위에 있어야 한다.



경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_3C_1 \times {}_4C_2$이다.
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
${}_3C_3 + {}_3C_2 \times {}_4C_1 + {}_3C_1 \times {}_4C_2 = 1 + 12 + 18 = 31$

답 ④

[풀이2] ★
한 직선 위에 있지 않은 3개의 점으로 하나의 삼각형이 결정된다.
문제에서 주어진 반원 위의 7개의 점을 3개의 호 위의 점과 4

개의 지름 위의 점으로 구별하자.
만약 지름 위의 4개의 점 중에서 3개의 점을 택한다면 삼각형을 만들 수 없다.

호	지름	삼각형
3개	0개	○
2개	1개	○
1개	2개	○
0개	3개	×

반원 위의 7개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_7C_3$이고, 지름 위의 4개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_3$이므로 경우의 수는

${}_7C_3 - {}_4C_3 = 35 - 4 = 31$

답 ④

V038 | 답 ④

[풀이1]
(1) 자물쇠 A와 B를 여는 열쇠의 개수가 각각 2, 1인 경우
경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_4C_2 \times {}_3C_1 = 18$

(2) 자물쇠 A와 B를 여는 열쇠의 개수가 각각 1, 2인 경우
경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_4C_1 \times {}_3C_2 = 12$

(1), (2)는 동시에 일어나지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$18 + 12 = 30$

답 ④

[풀이2]
자물쇠 A 또는 B를 여는 열쇠 3개를 선택할 경우의 수는
조합의 수에 의하여

${}_7C_3 = 35$

자물쇠 A를 여는 열쇠 3개를 선택할 경우의 수는
조합의 수에 의하여

${}_4C_3 = 4$

자물쇠 B를 여는 열쇠 3개를 선택할 경우의 수는
조합의 수에 의하여

${}_3C_3 = 1$

구하는 경우의 수는

$35 - (4 + 1) = 30$

답 ④

V039 | 답 200

[풀이]
5명의 여학생을 1호실, 2호실에 각각 3명, 2명 배정하는 방법의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_5C_3 \times {}_2C_2 = 10$

6명의 남학생을 3호실, 4호실에 각각 3명, 3명 배정하는 방법의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_6C_3 \times {}_3C_3 = 20$

따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

$10 \times 20 = 200$

답 200

V040 | 답 ②

[풀이1]
여학생의 수를 x라고 하면 남학생의 수도 x이다.
전체 학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수는 조합의 수에서

${}_{2x}C_3$

여학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수는 조합의 수에서

${}_xC_3$

주어진 조건에서

${}_{2x}C_3 = 10\,{}_xC_3 (x \geq 3)$

$$\frac{2x(2x-1)(2x-2)}{3!} = 10 \times \frac{x(x-1)(x-2)}{3!}$$

$2(2x-1) = 5(x-2)$

$\therefore \ x = 8$

답 ②

[풀이2] (선택)
남녀 구분 없이 3명의 대표를 선출하는 경우를 다음과 같이 구분하자.

남학생	3명	2명	1명	0명
여학생	0명	1명	2명	3명

여학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수를 n이라고 하면 남녀 구분 없이 3명의 대표를 선출하는 경우의 수는 $10n$이다.

남학생	3명	2명	1명	0명
여학생	0명	1명	2명	3명
경우	$9n$			n

남학생과 여학생의 수가 같으므로 남학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수와 여학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수는 같다.

남학생	3명	2명	1명	0명
여학생	0명	1명	2명	3명
경우	n	$8n$		n

남학생과 여학생의 수가 같으므로 남학생과 여학생 중에서 각각 2명과 1명의 대표를 선출하는 경우의 수와 남학생과 여학생 중에서 각각 1명과 2명의 대표를 선출하는 경우의 수는 같다.

남학생	3명	2명	1명	0명
여학생	0명	1명	2명	3명
경우	n	$4n$	$4n$	n

남학생과 여학생의 수를 각각 x라고 하자.

(남학생과 여학생 중에서 각각 1명과 2명의 대표를 선출하는 경우의 수)

$= {}_xC_1 \times {}_xC_2$

(여학생 중에서 3명의 대표를 선출하는 경우의 수)

$= {}_xC_3$

${}_xC_1 \times {}_xC_2 : {}_xC_3 = 4:1$(단, $x \geq 3$)

정리하면

$4\,{}_xC_3 = {}_xC_1 \times {}_xC_2$

$4 \times \dfrac{x(x-1)(x-2)}{3!} = x \times \dfrac{x(x-1)}{2!}$

정리하면

$\dfrac{4}{3}(x-2) = x$

풀면

$\therefore\ x = 8$

답 ②

V041 | 답 ④

[풀이]

(1) $1500 = 1000 + 300 + 200$인 경우

햄, 맛살, 김치 중에서 하나를 선택하고,

불고기, 치즈, 참치 중에서 하나를 선택하면 된다.

경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_3C_1 \times {}_3C_1 = 9$

(2) $2000 = 1000 + 300 + 300 + 200 + 200$인 경우

햄, 맛살, 김치 중에서 두 개를 선택하고,

불고기, 치즈, 참치 중에서 두 개를 선택하면 된다.

경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_3C_2 \times {}_3C_2 = 9$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$9 + 9 = 18$

답 ④

V042 | 답 ⑤

[풀이]

(1) 남자와 여자를 각각 3명씩 선택하는 경우

조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_5C_3 \times {}_3C_3 = 10$

(2) 남자와 여자를 각각 2명씩 선택하는 경우

조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_5C_2 \times {}_3C_2 = 30$

(3) 남자와 여자를 각각 1명씩 선택하는 경우

조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_5C_1 \times {}_3C_1 = 15$

(1), (2), (3)은 동시에 일어나지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

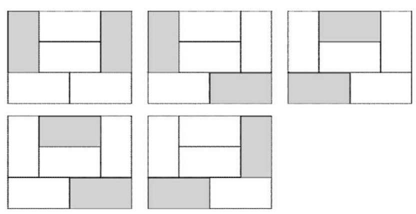
$10 + 30 + 15 = 55$

답 ⑤

V043 | 답 ⑤

[풀이1]

1명의 조사원이 서로 이웃하지 않은 2개의 지역을 담당하는 경우를 생각하자.



위의 그림과 같이 서로 이웃하지 않은 2개의 지역을 선택하는 경우의 수는 5이므로, 서로 이웃한 2개의 지역을 선택하는 경우의 수는 ${}_6C_2 - 5$이다.

따라서 구하는 경우의 수는

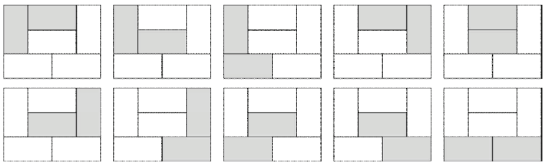
$({}_6C_2 - 5) \times {}_5P_5 = 1200$

이때, ${}_5P_5$는 5명의 조사원을 배치할 경우의 수이다.

답 ⑤

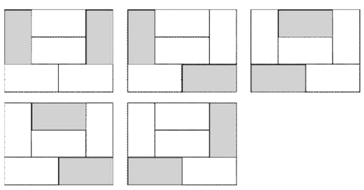
[풀이2]

서로 이웃한 2개의 지역을 모두 나타내자.



위의 그림처럼 서로 이웃한 2개의 지역의 수는 10이다.
서로 이웃한 2개의 지역에 조사원을 배치할
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_1$이고,
남은 4개의 지역에 조사원을 배치할
경우의 수는 순열의 수에 의하여 $4!(={}_4P_4)$이므로
구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$10\times{}_5C_1\times4!=1200$
$(=10\times{}_5P_5\leftarrow$서로 이웃한 2개의 지역을 1개의 지역으로 간주하고, 5개의 지역에 조사원 5명을 배치할 경우의 수)
답 ⑤

[풀이3]
같은 것이 있는 순열의 수와 여집합을 이용하여 문제를 해결해보자.
서로 이웃하지 않은 2개의 지역을 모두 선택하면 다음과 같다.



5명의 조사원을 각각 a, b, c, d, e라고 하자.
5명의 조사원 중에서 '서로 이웃한 2개의 지역'을 담당할 조사원을 선택할 경우의 수는 ${}_5C_1$이다. 예를 들어 a가 선택되었다고 하자.
a, a, b, c, d, e 각각이 담당 지역을 정할 경우의 수는
$\frac{6!}{2!}$
위의 그림에서 어둡게 색칠된 지역을 a, a가 담당하였을 때, b, c, d, e 각각이 담당 지역을 정할 경우의 수는
$5\times4!$
따라서 구하는 경우의 수는
$${}_5C_1\left(\frac{6!}{2!}-5\times4!\right)=1200$$
답 ⑤

V044 | 답 ②

[풀이] ★
(1) 집합 A에서 두 개의 원소를 뽑는 경우
(즉, 집합 B에서는 아무 원소도 뽑지 않는다.)
집합 A에서 두 개의 원소를 뽑는 경우의 수는 조합의 수에 의하여
${}_nC_2$
집합 B에서 아무 원소도 뽑지 않는 경우의 수는 조합의 수에 의하여
${}_nC_0$
이므로 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 ${}_nC_2\times{}_nC_0$이다.
(2) 집합 B에서 두 개의 원소를 뽑는 경우
(즉, 집합 A에서는 아무 원소도 뽑지 않는다.)
집합 B에서 두 개의 원소를 뽑는 경우의 수는 조합의 수에 의하여
${}_nC_2$
집합 A에서 아무 원소도 뽑지 않는 경우의 수는 조합의 수에 의하여
${}_nC_0$
이므로 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 ${}_nC_2\times{}_nC_0$이다.
(3) 집합 A와 집합 B에서 각각 한 개의 원소를 뽑는 경우
집합 A에서 한 개의 원소를 뽑는 경우의 수는 조합의 수에 의하여
${}_nC_1$
집합 B에서 한 개의 원소를 뽑는 경우의 수는 조합의 수에 의하여
${}_nC_1$
이므로 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는 ${}_nC_1\times{}_nC_1$이다.
(1), (2), (3)에서 (가), (나)에 들어갈 식은 각각
$2\times{}_nC_2(={}_nC_2+{}_nC_2)$, ${}_nC_1\times{}_nC_1$
답 ②

V045 | 답 360

[풀이]
전송하는 수(2○○○0)의 끝에 0을 덧붙였으므로 ○○○에 오는 세 숫자의 합은 짝수이다.
(1) ○○○에 오는 세 숫자 중에서 짝수의 개수가 3인 경우
경우의 수는 서로 다른 5개의 수 0, 2, 4, 6, 8에서 3개를 택하는 순열의 수이므로
${}_5P_3=60$
(1) ○○○에 오는 세 숫자 중에서 짝수와 홀수의 개수가 각각 1, 2인 경우
서로 다른 5개의 수 0, 2, 4, 6, 8에서 1개를 택하는 조합의 수는
${}_5C_1$
서로 다른 5개의 수 1, 3, 5, 7, 9에서 2개를 택하는 조합

의 수는

${}_5C_2$

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$({}_5C_1 \times {}_5C_2) \times 3! = 300$

(1), (2)는 동시에 일어나지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$60 + 300 = 360$

답 360

V046 | 답 150

[풀이] ★

5명의 신규 직원을 3명, 1명, 1명의 세 팀으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_3 \times {}_2C_1 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 10$$

5명의 신규 직원을 2명, 2명, 1명의 세 팀으로 나누는 경우의 수는

$${}_5C_2 \times {}_3C_2 \times {}_1C_1 \times \frac{1}{2!} = 15$$

이상에서 $S(5,\ 3) = 25$이다.

세 팀을 각각 대전, 대구, 광주에 배치하는 경우의 수는

순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

$S(5,\ 3) \times 3! = 150$

답 150

V047 | 답 ③

[풀이] ★

〈증명〉

${}_{n+3}C_{n+1}$은 집합 $A = \{1,\ 2,\ \cdots,\ n+3\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수이다. 이것을 다른 방법으로 세어보자.

(i) 집합 A의 부분집합 중에서, 가장 큰 원소가 $\boxed{n+1}$이고 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수는 ${}_nC_n$이다. 이때, ${}_nC_n$은 집합 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 n인 부분집합의 개수이다.

(ii) 집합 A의 부분집합 중에서, 가장 큰 원소가 $\boxed{n+2}$이고 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수는 ${}_{n+1}C_n$이다. 이때, ${}_{n+1}C_n$은 집합 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n+1\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 n인 부분집합의 개수이다.

(iii) 집합 A의 부분집합 중에서, 가장 큰 원소가 $\boxed{n+3}$이고 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합의 개수는 ${}_{n+2}C_n$이다. 이때, ${}_{n+2}C_n$은 집합 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ n+2\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 n인 부분집합의 개수이다.

(i), (ii), (iii) 중에서 한 가지 경우만 일어날 수 있으므로 합의 법칙에 의하여 ${}_nC_n + {}_{n+1}C_n + {}_{n+2}C_n = {}_{n+3}C_{n+1}$이 성립한다.

답 ③

[참고] ★

증명과정을 자세하게 설명하면 다음과 같다.

(i)의 경우

$\underbrace{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,}_{n\text{개 선택}}\ \underbrace{\boxed{n+1}}_{\text{선택○}},\ \underbrace{n+2,\ n+3}_{\text{선택×}}$

(ii)의 경우

$\underbrace{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ n+1,}_{n\text{개 선택}}\ \underbrace{\boxed{n+2}}_{\text{선택○}},\ \underbrace{n+3}_{\text{선택×}}$

(iii)의 경우

$\underbrace{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n,\ n+1,\ n+2,}_{n\text{개 선택}}\ \underbrace{\boxed{n+3}}_{\text{선택○}}$

(i)의 경우는 $n+2$를 선택하지 않지만, (ii)의 경우는 $n+2$를 선택하므로, (i), (ii)는 서로 배반사건이다.

(ii)의 경우는 $n+3$을 선택하지 않지만, (iii)의 경우는 $n+3$을 선택하므로, (ii), (iii)은 서로 배반사건이다.

(i)의 경우는 $n+3$을 선택하지 않지만, (iii)의 경우는 $n+3$을 선택하므로, (i), (iii)은 서로 배반사건이다.

따라서 (i), (ii), (iii) 중에서 임의로 선택한 서로 다른 두 경우는 서로 배반이다.

집합 A의 부분집합 중에서 원소의 개수가 $n+1$인 부분집합은 다음의 두 경우를 생각할 수 있다.

부분집합이 $n+3$을 원소로 갖는 경우

→ (iii)에 해당

부분집합이 $n+3$을 원소로 갖지 않는 경우

→ 부분집합이 $n+2$를 원소로 갖는 경우와 부분집합이 $n+2$를 원소로 갖지 않는 경우

→ 전자는 (ii)에 해당하고, 후자는 (i)에 해당한다.

따라서 문제에서 주어진 등식이 성립하는 것이다.

V048 | 답 ⑤

[풀이] ★

자연수를 3으로 나눈 나머지는 0 또는 1 또는 2이므로

모든 자연수는 $3k$, $3k-1$, $3k-2$ 중의 하나이다.

(단, k는 자연수이다.)

서로 다른 두 자연수의 합이 3의 배수가 되는 경우는 아래의 두 가지 경우뿐이다.

$3k + 3k'$, $(3k-1) + (3k'-2)$

(단, k, k'는 자연수이다.)

30 이하의 홀수 중에서 3으로 나눈 나머지가 0인 홀수만을 원소로 하는 집합을 P_0이라고 하면

$P_0 = \{3,\ 9,\ 15,\ 21,\ 27\}$

30 이하의 홀수 중에서 3으로 나눈 나머지가 1인 홀수만을 원소로 하는 집합을 P_1이라고 하면

$P_1 = \{1,\ 7,\ 13,\ 19,\ 25\}$

30 이하의 홀수 중에서 3으로 나눈 나머지가 2인 홀수만을 원소로 하는 집합을 P_2이라고 하면

$P_2 = \{5,\ 11,\ 17,\ 23,\ 29\}$

(1) 집합 P_0의 서로 다른 두 원소를 합하는 경우

경우의 수는 조합의 수에 의하여

$${}_5\mathrm{C}_2 = \frac{5\times4}{2} = 10$$

(2) 두 집합 P_1, P_2의 원소 한 개씩을 합하는 경우

경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_5\mathrm{C}_1 \times {}_5\mathrm{C}_1 = 5\times5 = 25$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$25 + 10 = 35$

답 ⑤

V049 | 답 ④

▶ 실전풀이: [풀이2]

[풀이1] ★

아래 그림과 같이 유리 상자에 이름을 붙이자.

	1열	2열	3열	4열
a행	a_1	a_2	a_3	a_4
b행	b_1	b_2	b_3	b_4
c행	c_1	c_2	c_3	c_4

그림 (가)처럼 되기 위해서는 모든 열에 각각 1개의 검은 색 유리 상자가 와야 한다.

그림 (나)처럼 되기 위해서는 모든 행에 적어도 1개 이상의 검은 색 유리 상자가 와야 한다.

a행, b행, c행에 각각 2개, 1개, 1개씩의 검은 색 유리 상자가 오거나,

a행, b행, c행에 각각 1개, 2개, 1개씩의 검은 색 유리 상자가 오거나,

a행, b행, c행에 각각 1개, 1개, 2개씩의 검은 색 유리 상자가 오면 된다.

($\because$ 비둘기 집의 원리)

(1) a행에 2개의 유리 상자가 오는 경우

4개의 유리 상자 a_1, a_2, a_3, a_4 중에서 서로 다른 2개의 유리 상자를 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{C}_2$이다. 예를 들어 아래 그림과 같이 바꾸어졌다고 하자.

	1열	2열	3열	4열
a행	**a_1**	**a_2**	a_3	a_4
b행	b_1	b_2	b_3	b_4
c행	c_1	c_2	c_3	c_4

2개의 유리 상자 b_3, b_4 중에서 1개의 유리 상자를 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_2\mathrm{C}_1$이다. 예를 들어 아래 그림과 같이 바꾸어졌다고 하자.

	1열	2열	3열	4열
a행	**a_1**	**a_2**	a_3	a_4
b행	b_1	b_2	**b_3**	b_4
c행	c_1	c_2	c_3	c_4

유리 상자 c_4를 검은 색 유리 상자로 바꾸어 넣으면 된다.

	1열	2열	3열	4열
a행	**a_1**	**a_2**	a_3	a_4
b행	b_1	b_2	**b_3**	b_4
c행	c_1	c_2	c_3	**c_4**

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 12$

(2) b행에 2개의 유리 상자가 오는 경우

예를 들어 아래와 같이 바꾸어 넣으면 된다.

	1열	2열	3열	4열
a행	**a_1**	a_2	a_3	a_4
b행	b_1	**b_2**	**b_3**	b_4
c행	c_1	c_2	c_3	**c_4**

(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 12$

(3) c행에 2개의 유리 상자가 오는 경우

예를 들어 아래와 같이 바꾸어 넣으면 된다.

	1열	2열	3열	4열
a행	a_1	a_2	**a_3**	a_4
b행	**b_1**	b_2	b_3	b_4
c행	c_1	**c_2**	c_3	**c_4**

(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1 = 12$

(1), (2), (3)은 동시에 일어나지 않으므로

합의 법칙에서 구하는 경우의 수는

$12 + 12 + 12 = 36$

답 ④

[참고]
아래와 같은 계산도 가능하다.
(a행, b행, c행 중에서 2개의 검은 색 유리 상자가 오는 행을 결정하는 방법의 수)
×(앞서 결정된 행에서 2개의 검은 색 유리 상자가 오는 열을 결정하는 방법의 수)
×(나머지 2개의 검은 색 유리 상자가 오는 방법의 수)
$=3\times{}_4C_2\times2\times1=36$

[풀이2] ★
아래 그림과 같이 유리 상자에 이름을 붙이자.

	1열	2열	3열	4열
a행	a_1	a_2	a_3	a_4
b행	b_1	b_2	b_3	b_4
c행	c_1	c_2	c_3	c_4

그림 (가)처럼 되기 위해서는 모든 열에 각각 1개의 검은 색 유리 상자가 와야 한다.
그림 (나)처럼 되기 위해서는 모든 행에 적어도 1개 이상의 검은 색 유리 상자가 와야 한다.
즉, a행, b행, c행에 중에서 한 행에는 2개의 검은 색 유리 상자가 오고, 나머지 두 개의 행에 각각 1개의 검은 색 유리 상자가 오면 된다.
다음과 같은 순서대로 유리 상자를 검은 색 유리 상자로 바꾼다고 하자.
a행→b행→c행→(a행 또는 b행 또는 c행)

	1열	2열	3열	4열
a행	a_1	a_2	a_3	a_4
b행	b_1	b_2	b_3	b_4
c행	c_1	c_2	c_3	c_4

예를 들어 위의 그림과 같이 바꾸어졌다고 할 때,
다음의 두 가지의 순서가 가능하다.
$a_1\to b_2\to c_3\to a_4$ 혹은 $a_4\to b_2\to c_3\to a_1$
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$$4\times3\times2\times3\times\frac{1}{2}=36$$
(※ 즉, $4\times3\times2\times3=72$로 경우의 수를 구하면 안 된다.)
답 ④

V050 | 답 80

[풀이1]
다섯 곳의 휴양지를 각각 A, B, C, D, E라고 하자.
예를 들어 세 사람이 A휴양지를 선택하고 나머지 한 사람이 B, C, D, E 휴양지 중에서 한 휴양지를 선택할 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여
(A휴양지를 선택하는 세 사람의 경우의 수)×(B, C, D, E 휴양지 중에서 한 휴양지를 선택하는 경우의 수)
$={}_4C_3\times{}_4C_1$
구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$5\times{}_4C_3\times{}_4C_1=80$
답 80

[풀이2]
네 사람을 두 조(세 명/한 명)로 분할하는 방법의 수는
${}_4C_3$
두 조가 휴양지를 택하는 방법의 수는
${}_5P_2$
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
${}_4C_3\times{}_5P_2=80$
답 80

V051 | 답 25

[풀이]
(1) 한 세트에 A, B가 포함되는 경우 (C는 같은 세트에 담을 수 없다.)
D, E, F, G, H 중에서 서로 다른 2개를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2$이다.
(2) 한 세트에 A, B가 포함되지 않는 경우
C, D, E, F, G, H 중에서 서로 다른 4개를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_6C_4(={}_6C_2)$이다.
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
${}_5C_2+{}_6C_4=10+15=25$
답 25

[참고]
8종류의 과자를 종류별로 각각 하나씩 사용하여 4개짜리 한 세트(예를 들어 A, B, D, E)와 또 다른 4개짜리 한 세트(C, F, G, H)를 만드는 경우의 수를 구하라는 문제가 아니다. 다시 말하면 8종류의 과자를 종류별로 각각 하나씩 사용하여 서로 다른 두 세트를 만드는 경우의 수를 구하는 문제가 아니다.

V052 | 답 160

[풀이1]

남학생 2명을 각각 a_1, a_2, 여학생 2명을 각각 b_1, b_2라고 하자.

남학생 a_1이 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수는 10이다.

예를 들어 아래와 같이 앉았다고 하자.

			a_1	

남학생 a_1 옆에 앉을 여학생을 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_2C_1$이다.

예를 들어 b_2가 아래와 같이 앉았다고 하자.

			a_1	
			b_2	

남학생 a_2가 놀이기구의 의자에 앉는 방법의 수는 8이다.

예를 들어 아래와 같이 앉았다고 하자.

			a_1	
	a_2		b_2	

마지막으로 여학생 b_1이 남학생 a_2의 옆에 앉으면 된다. (경우의 수는 1이다.)

	b_1		a_1	
	a_2		b_2	

곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$10 \times {}_2C_1 \times 8 \times 1 = 160$

답 160

[풀이2]

2명의 남학생을 각각 a_1, a_2, 2명의 여학생을 각각 b_1, b_2라고 하자.

놀이기구의 5줄 중에서 남녀 두 쌍이 앉을 2줄을 선택하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2$이다.

예를 들어 아래와 같이 색칠된 줄에 남녀 두 쌍이 앉는 다고 하자.

남학생 a_1이 의자에 앉을 방법의 수는 4이다.

예를 들어 아래와 같이 앉았다고 하자.

	a_1			

남학생 a_2가 의자에 앉을 방법의 수는 2이다.

예를 들어 아래와 같이 앉았다고 하자.

				a_2
	a_1			

두 여학생 b_1, b_2가 의자에 앉을 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $2!$이다.

예를 들어 아래와 같이 앉았다고 하자.

	b_2			a_2
	a_1			b_1

구하는 방법의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_5C_2 \times 4 \times 2 \times 2! = 160$

답 160

[풀이3]

학생 4명을 두 개의 조로 나누는 방법의 수는 2이다. 이때, 각각의 조에 속한 두 학생의 성별은 서로 다르다.

두 개의 조를 놀이기구에 앉히는 방법의 수는

${}_5P_2 \times 2! \times 2!$

이다. 이때, ${}_5P_2$는 두 개의 조가 앉을 줄을 결정하는 방법의 수이고, $2! \times 2!$은 각각의 조의 두 명이 앉을 자리를 결정하는 방법의 수이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2 \times {}_5P_2 \times 2! \times 2! = 160$

답 160

V053 | 답 72

[풀이]

운전석에 어머니 혹은 아버지가 앉는 경우의 수는 2이다.

가운데 줄에 영희와 철수가 앉는 경우의 수는

조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_3C_2 \times 2!(= {}_3P_2)$이다.

남은 3자리에 운전석에 아직 앉지 않은 부모님과 할머니, 할아버지가 앉을 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $3!$이다.

구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2 \times ({}_3C_2 \times 2!) \times 3! = 72$

답 72

V054 | 답 ③

[풀이]
자연수 $abcde$가 5의 배수이므로 e는 5이다.
문제에서 주어진 조건을 다시 쓰면
$a > b > c$, $c < d < 5$ $\cdots(*)$
이때, c가 가질 수 있는 값은 1 또는 2 또는 3이다.
(1) $c = 1$인 경우
(*)은
$a > b > 1$, $1 < d < 5$
d가 가질 수 있는 자연수의 개수는 3,
a, b가 가질 수 있는 자연수의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_6C_2$이다.
이때, a, b는 1, d, 5 일 수 없다.
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$3 \times {}_6C_2 = 45$
(2) $c = 2$인 경우
(*)은
$a > b > 2$, $2 < d < 5$
d가 가질 수 있는 자연수의 개수는 2,
a, b가 가질 수 있는 자연수의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2$이다.
이때, a, b는 1, 2, d, 5 일 수 없다.
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$2 \times {}_5C_2 = 20$
(3) $c = 3$인 경우
(*)은
$a > b > 3$, $3 < d < 5$
d가 가질 수 있는 자연수의 개수는 1,
a, b가 가질 수 있는 자연수의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2$이다.
이때, a, b는 1, 2, 3, $d(=4)$, 5 일 수 없다.
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$1 \times {}_4C_2 = 6$
(1), (2), (3)은 동시에 일어나지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$45 + 20 + 6 = 71$
답 ③

V055 | 답 60

[풀이1] ★
서로 다른 5종류의 체험 프로그램을 각각 a, b, c, d, e라고 하자.
A가 2종류의 프로그램을 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2$이다.
예를 들어 A가 a와 d를 선택하였다고 하자.

a	b	c	d	e
A			A	

A가 선택한 2종류의 프로그램 중에서 B가 1종류의 프로그램을 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_2C_1$이다.
예를 들어 B가 d를 선택하였다고 하자.

a	b	c	d	e
A			A	
			B	

A가 선택하지 않은 3종류의 프로그램 중에서 B가 1종류의 프로그램을 선택할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_3C_1$이다.
예를 들어 B가 c를 선택하였다고 하자.

a	b	c	d	e
A			A	
		B	B	

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
${}_5C_2 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 = 10 \times 2 \times 3 = 60$
답 60

[풀이2] ★
서로 다른 5종류의 체험 프로그램을 각각 a, b, c, d, e라고 하자.
예를 들어 A, B가 공통으로 선택한 프로그램이 a일 때,
A, B가 a가 아닌 b, c, d, e 중에서 서로 다른 프로그램을 선택할 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 4×3이다.
A, B가 공통으로 선택할 수 있는 프로그램의 수는 5이므로
구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$5 \times 12 = 60$
답 60

[풀이3] +확률과 통계(조합) ★
서로 다른 5종류의 체험 프로그램을 각각 a, b, c, d, e라고 하자.
(1) A, B가 선택한 프로그램이 모두 같은 경우
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2$이다.
(2) A, B가 선택한 프로그램이 모두 다른 경우
경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_5C_2 \times {}_3C_2$이다.
구하는 경우의 수는
${}_5C_2 \times {}_5C_2 - ({}_5C_2 + {}_5C_2 \times {}_3C_2) = 100 - 40 = 60$

답 60

[풀이4] ★

A가 선택한 프로그램만을 원소로 갖는 집합을 A,
B가 선택한 프로그램만을 원소로 갖는 집합을 B
라고 하자. 문제에서 주어진 조건에 의하여

$n(A\cap B)=1$, $n(A^C\cap B)=1$, $n(A\cap B^C)=1$,
$n((A\cup B)^C)=2$
을 만족시키면 된다.

세 개의 집합
$A\cap B$, $A^C\cap B$, $A\cap B^C$
에 속할 각각의 원소를 결정하는 방법의 수는
곱의 법칙에 의하여
$5\times4\times3=60$ (혹은 순열의 수에 의하여 ${}_5\mathrm{P}_3$이다.)

답 60

V056 | 답 ②

[풀이] ★

〈증명〉

(1) $n=2$일 때,
$A_2=\{1,\ 2\}$의 원소가 2개인 부분집합은 자신뿐이므로

$$a_2=1=\frac{2+1}{3}$$

(2) $n=k$ $(k\geq2)$일 때 성립한다고 가정하면 $a_k=\dfrac{k+1}{3}$이다.

$A_{k+1}=\{1,\ 2,\ \cdots,\ k,\ k+1\}$의 부분집합 중 원소가 2개인 모든 부분집합은 A_k의 부분집합 중 원소가 2개인 모든 부분집합에 k개의 집합 $\{1,\ k+1\}$, $\{2,\ k+1\}$, $\cdots$, $\{k,\ k+1\}$을 추가한 것이다.

A_k의 부분집합 중 원소가 2개인 각 부분집합에서 작은 원소를 뽑아서 모두 합한 값은

$\boxed{{}_k\mathrm{C}_2}\times a_k$

($\because$ ${}_k\mathrm{C}_2\times a_k$=(원소의 개수가 2인 부분집합의 개수)×(평균)
=(원소의 개수가 2인 각 부분집합에서 작은 원소를 뽑아 모두 합한 값))

이고, 각 집합 $\{1,\ k+1\}$, $\{2,\ k+1\}$, $\cdots$, $\{k,\ k+1\}$에서 작은 원소를 뽑아서 모두 합한 값은
$1+2+\cdots+k$
이므로

$$a_{k+1}=\frac{\boxed{{}_k\mathrm{C}_2\times\dfrac{k+1}{3}}+(1+2+\cdots+k)}{{}_{k+1}\mathrm{C}_2}$$

$$=\frac{\dfrac{k(k-1)}{2}\times\dfrac{k+1}{3}+\dfrac{k(k+1)}{2}}{\dfrac{(k+1)k}{2}}$$

$$=\frac{k+2}{3}=\frac{(k+1)+1}{3}$$

그러므로 (1), (2)에 의하여 $n\geq2$인 모든 자연수 n에 대하여
$a_n=\dfrac{n+1}{3}$이다.

(가): ${}_k\mathrm{C}_2$

(나): ${}_k\mathrm{C}_2\times\dfrac{k+1}{3}$

답 ②

V057 | 답 30

[풀이1]

서로 다른 4개의 동아리를 각각 '가', '나', '다', '라' 라고 하자.

A와 B가 공통으로 가입하는 동아리의 개수는
0 또는 1 또는 2
이다.

A와 B가 동아리에 가입하는 경우의 수는
조합의 수에 의하여 각각 ${}_4\mathrm{C}_2$, ${}_4\mathrm{C}_2$이다.

A와 B가 공통으로 가입하는 동아리의 개수가 2인
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{C}_2$이다.

따라서 구하는 경우의 수는
${}_4\mathrm{C}_2\times{}_4\mathrm{C}_2-{}_4\mathrm{C}_2=36-6=30$

답 30

[풀이2]

서로 다른 4개의 동아리를 각각 '가', '나', '다', '라' 라고 하자.

(1) A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 없는 경우
우선 A가 2개의 동아리에 가입한다.

	가	나	다	라
A		○		○
B		×		×

이제 B가 남은 2개의 동아리에 가입하면 된다.

	가	나	다	라
A		○		○
B	○	×	○	×

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
${}_4\mathrm{C}_2\times1=6$

(2) A와 B가 공통으로 가입하는 동아리가 1개인 경우
우선 A와 B가 1개의 동아리에 함께 가입한다.

	가	나	다	라
A			○	
B			○	

A가 남은 3개의 동아리 중에서 1개에 가입한다.

	가	나	다	라
A		○	○	
B		×	○	

B가 남은 2개의 동아리 중에서 1개에 가입한다.

	가	나	다	라
A		○	○	
B	○	×	○	

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$_4C_1 \times 3 \times 2 = 24$
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$6+24=30$
답 30

V058 | 답 45

[풀이1]
문제에서 주어진 집합의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 조합의 수에 의하여
$$_5C_2 = \frac{5\times4}{1\times2} = 10$$
이 10개의 부분집합 중에서 임의로 선택한 두 집합은 서로 같지 않다.
따라서 구하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여
$$_{10}C_2 = \frac{10\times9}{1\times2} = 45$$
답 45

[참고]
문제에서 주어진 집합의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인 부분집합을 모두 쓰면 다음과 같다.
$\{1,\ 2\}$, $\{1,\ 3\}$, $\{1,\ 4\}$, $\{1,\ 5\}$
$\{2,\ 3\}$, $\{2,\ 4\}$, $\{2,\ 5\}$,
$\{3,\ 4\}$, $\{3,\ 5\}$,
$\{4,\ 5\}$

[풀이2]
문제에서 주어진 집합의 부분집합 중 원소의 개수가 2인 부분집합의 개수는 조합의 수에 의하여 $_5C_2(=10)$이다. 이 10개의 집합 중에서 임의로 2개의 집합을 선택한다고 하자.
(1) 선택된 두 집합의 교집합의 원소의 개수가 0인 경우
(즉, 교집합이 공집합인 경우)
예를 들어, 선택된 두 집합이 각각 $\{1,\ 3\}$, $\{2,\ 5\}$인 경우이다.
1, 2, 3, 4, 5 중에서 서로 다른 두 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 $_5C_2$이다. 예를 들어 1, 3을 선택하였을 때, 남은 2, 4, 5 중에서 서로 다른 두 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 $_3C_2$이다. 예를 들어 2, 5를 선택하였다고 하자. 이때, $\{1,\ 3\}\to\{2,\ 5\}$의 순서대로 선택하는 경우와 $\{2,\ 5\}\to\{1,\ 3\}$의 순서대로 선택하는 경우가 중복되므로 $_5C_2\times{}_3C_2$를 순열의 수 $2!(={}_2P_2)$로 나누어 주어야 한다.
경우의 수는 조합의 수, 곱의 법칙, 순열의 수에 의하여
$$\frac{_5C_2\times{}_3C_2}{2!} = 15$$
(2) 선택된 두 집합의 교집합의 원소의 개수가 1인 경우
(즉, 교집합이 공집합이 아닌 경우)
예를 들어, 선택된 두 집합이 각각 $\{1,\ 3\}$, $\{3,\ 4\}$인 경우이다.
1, 2, 3, 4, 5 중에서 '선택된 두 집합의 교집합의 원소가 될' 한 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 $_5C_1$이다. 예를 들어 3을 선택하였을 때, 남은 1, 2, 4, 5 중에서 한 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 $_4C_1$이다. 예를 들어 1을 선택하였을 때($\{1,\ 3\}$), 남은 2, 4, 5 중에서 한 개의 숫자를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 $_3C_1$이다. 예를 들어 4를 선택하였다고 하자. ($\{3,\ 4\}$) 이때, $\{1,\ 3\}\to\{3,\ 4\}$의 순서대로 선택하는 경우와 $\{3,\ 4\}\to\{1,\ 3\}$의 순서대로 선택하는 경우가 중복되므로 $_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_1$을 순열의 수 $2!(={}_2P_2)$로 나누어 주어야 한다.
경우의 수는 조합의 수, 곱의 법칙, 순열의 수에 의하여
$$\frac{_5C_1\times{}_4C_1\times{}_3C_1}{2!} = 30$$
(1)과 (2)는 동시에 일어나지 않으므로,
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$$\frac{_5C_2\times{}_3C_2}{2!} + \frac{5\times{}_4C_1\times{}_3C_1}{2!} = 15+30=45$$
답 45

[풀이3]
문제에서 주어진 집합의 부분집합 중에서 원소의 개수가 2인

부분집합을 두 개 선택하여 각각 A, B라고 하자.

$A=B$인 경우의 수가 ${}_5\mathrm{C}_2$이므로

$A\neq B$인 경우의 수는 $\underbrace{{}_5\mathrm{C}_2}_{A}\cdot\underbrace{{}_5\mathrm{C}_2}_{B}-\underbrace{{}_5\mathrm{C}_2}_{A=B}$ 이다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$\frac{{}_5\mathrm{C}_2\cdot{}_5\mathrm{C}_2-{}_5\mathrm{C}_2}{2!}=45$$

이때, $2!$으로 나누는 이유는 다음과 같이 중복되는 경우가 발생하기 때문이다.

$A=\{1,\ 2\}$, $B=\{3,\ 4\}$

$A=\{3,\ 4\}$, $B=\{1,\ 2\}$ (위와 중복)

$A=\{1,\ 2\}$, $B=\{2,\ 3\}$

$A=\{2,\ 3\}$, $B=\{1,\ 2\}$ (위와 중복)

⋮

답 45

V059 | 답 ⑤

[풀이] ★

〈과정〉

(ⅰ) 공역 X의 원소 중 짝수인 원소가 2개이므로 집합 A의 네 원소 중 세 원소는 홀수이고 한 원소는 짝수이다.

($\because$ '짝+짝+홀+홀=짝' (←더해지는 짝수의 개수가 2인 경우), '짝+홀+홀+홀=홀' (←더해지는 짝수의 개수가 1인 경우), 그리고 더해지는 짝수의 개수가 0인 경우는 없다.)

따라서 집합 X의 원소 중에서 집합 A의 네 원소를 택하는 경우의 수는 2이다.

(← $A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$ 또는 $A=\{1,\ 3,\ 4,\ 5\}$)

(ⅱ) 정의역 X를 4개의 부분집합으로 분할할 때, 4개의 부분집합의 원소의 개수는 각각 2, 1, 1, 1이 되어야 한다.

($\because 5=5$

$=4+1$

$=3+2=3+1+1$

$=2+2+1=\boxed{2+1+1+1}$

$=1+1+1+1+1$)

따라서 집합 X를 4개의 부분집합으로 분할하는 경우의 수는 $\boxed{{}_5\mathrm{C}_2}$이다.

($\because$

$X=\boxed{\{1,\ 2\}}\cup\{3\}\cup\{4\}\cup\{5\}$,

$X=\boxed{\{1,\ 3\}}\cup\{2\}\cup\{4\}\cup\{5\}$,

⋮

$X=\boxed{\{4,\ 5\}}\cup\{1\}\cup\{2\}\cup\{3\}$

이때, $\boxed{}$ 안에 올 집합을 결정할 경우의 수는 다섯 개의 수 1, 2, 3, 4, 5 중에서 두 개의 수를 선택하는 조합의 수 ${}_5\mathrm{C}_2$와 같다.)

(ⅲ) (ⅰ)과 (ⅱ)의 각 경우에 대하여 집합 X를 분할한 4개의 부분집합을 집합 A의 네 원소에 하나씩 대응시키는 경우의 수는 $\boxed{4!}$이다. (←비둘기 집의 원리)

($\because$ 예를 들어

집합 X를

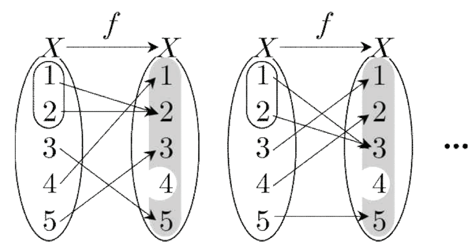
$X=\underbrace{\{1,\ 2\}}_{\text{원소 2개}}\cup\underbrace{\{3\}}_{\text{원소 1개}}\cup\underbrace{\{4\}}_{\text{원소 1개}}\cup\underbrace{\{5\}}_{\text{원소 1개}}$

와 같이 서로 다른 4개의 집합의 합집합으로 보고,

집합 A를

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$

으로 둘 때, 다음과 같은 경우가 가능하다.



네 개의 집합 $\{1,\ 2\}$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$에 집합 A의 서로 다른 원소를 각각 대응시킬 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{P}_4=4!$이다.)

(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

곱의 법칙에 의하여 $\boxed{2\times{}_5\mathrm{C}_2\times4!}$이다.

(가): ${}_5\mathrm{C}_2=10$

(나): $4!=24$

(다): $2\times{}_5\mathrm{C}_2\times4!=480$

$\therefore\ a+b+c=514$

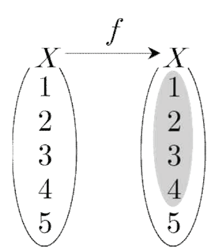
답 ⑤

V060 | 답 60

[풀이]

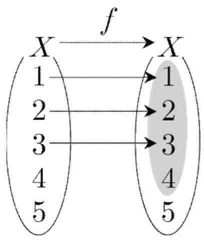
조건 (가)에 의하여 함수 f의 치역 $f(X)$의 원소의 개수는 4이다. 이때, 함수 f의 치역을 결정하는 방법의 수는 ${}_5\mathrm{C}_4$이다.

예를 들어 $f(X)=\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$라고 하자.

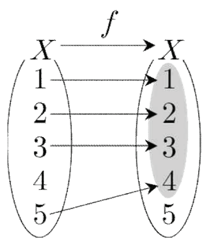


조건 (나)를 만족시키는 집합 X의 원소 $a(\in f(X))$를 결정하는 방법의 수는 ${}_4\mathrm{C}_3$이다.

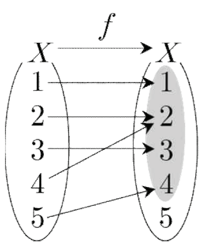
예를 들어 $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$이라고 하자.



$f(b)=4$이면 $b=5$이다.
왜냐하면
$f(1)=1\neq 4$, $f(2)=2\neq 4$,
$f(3)=3\neq 4$, $f(4)\neq 4$
이기 때문이다.
만약 $f(4)=4$이면 $f(a)=a$인 집합 X의 원소 a의 개수는 4이므로 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



$f(4)$가 가질 수 있는 값은 1 또는 2 또는 3이다.
왜냐하면 $f(4)\neq 4$, $f(4)\neq 5$이기 때문이다.
예를 들어 $f(4)=2$라고 하자.

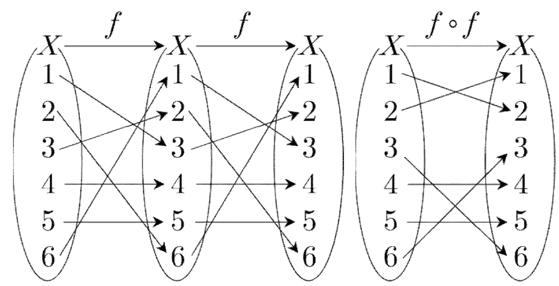


따라서 함수 $f:X\to X$의 개수는 곱의 법칙에 의하여
${}_5\mathrm{C}_4\times{}_4\mathrm{C}_3\times 3=60$

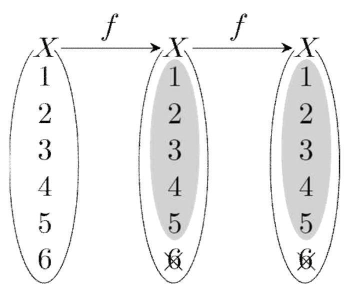
답 60

V061 | 답 ①

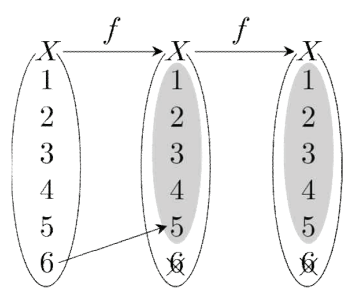
[풀이] ★
〈과정〉
함수 f와 함수 $f\circ f$의 치역을 각각 A와 B라 하자.
$n(A)=6$이면 함수 f는 일대일대응이고,
함수 $f\circ f$도 일대일대응이므로
$n(B)=6$이다.
예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



또한 $n(A)\le 4$이면 $B\subset A$이므로
($\because$ $A=\{f(x)|x\in X\}$, $B=\{f(f(x))|x\in X\}$
이므로 집합 B의 모든 원소는 집합 A의 원소이다.)
$n(B)\le 4$이다.
그러므로 $n(A)=5$,
즉 $B=A$인 경우만 생각하면 된다.
($\because$ 6 이하의 자연수 $n(A)$가 6, 4, 3, 2, 1
을 값으로 갖지 못하므로
$n(A)$의 값은 5일 수 밖에 없는 것이다.
그리고 집합 A의 부분집합 중에서
원소의 개수가 5인 집합은 집합 A뿐이다.)
(i) $n(A)=5$인 X의 부분집합 A를
선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 $\boxed{{}_6\mathrm{C}_5}$이다.
예를 들어 집합 A가 다음과 같이
$A=\{1, 2, 3, 4, 5\}$라고 하자.



(ii) (i)에서 선택한 집합 A에 대하여,
X의 원소 중 A에 속하지 않는 원소를 k라 하자.
($\leftarrow$위와 같은 경우 $k=6$이다.)
$n(A)=5$이므로 집합 A에서 $f(k)$를
선택하는 경우의 수는 $\boxed{5}$이다.
예를 들어 $f(k)=f(6)=5$라고 하자.



(iii) (i)에서 선택한
$A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$
와 (ii)에서 선택한 $f(k)$에 대하여,

$f(k) \in A$이며 $A = B$이므로

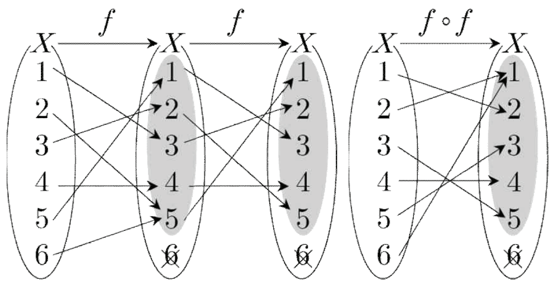
$A = \{f(a_1),\ f(a_2),\ f(a_3),\ f(a_4),\ f(a_5)\}\ \cdots(*)$

이다. (*)을 만족시키는 경우의 수는

집합 A에서 집합 A로의 일대일대응의 개수와

같으므로 $\boxed{5!}$이다.

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는

함수 f의 개수는

$\boxed{{}_6\mathrm{C}_5} \times \boxed{5} \times \boxed{5!}$이다.

이상에서

(가): $p = 6$

(나): $q = 5$

(다): $r = 120$

$\therefore\ p + q + r = 6 + 5 + 120 = 131$

답 ①

V062 | 답 ②

[풀이]

〈증명〉

(1) $n = 1$일 때,

$$(\text{좌변}) = \frac{{}_1\mathrm{C}_0}{{}_5\mathrm{C}_0} + \frac{{}_1\mathrm{C}_1}{{}_5\mathrm{C}_1} = \frac{6}{5},\quad (\text{우변}) = \frac{1+5}{5} = \frac{6}{5}$$

이므로 주어진 등식은 성립한다.

(2) $n = m$일 때, 등식

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{{}_m\mathrm{C}_k}{{}_{m+4}\mathrm{C}_k} = \frac{m+5}{5}$$

가 성립한다고 가정하자. $n = m+1$일 때,

$$\sum_{k=0}^{m+1} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_k}{{}_{m+5}\mathrm{C}_k}$$

$$= \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_0}{{}_{m+5}\mathrm{C}_0} + \left(\frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_1}{{}_{m+5}\mathrm{C}_1} + \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_2}{{}_{m+5}\mathrm{C}_2} + \cdots + \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{m+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{m+1}}\right)$$

$$= \boxed{1} + \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}}$$

이다. 자연수 l에 대하여

${}_{l+1}\mathrm{C}_{k+1}$

$$= \frac{(l+1) \cdot l \cdot (l-1) \cdot \ \cdots\ \cdot (l-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \cdots\ \cdot (k+1)}$$

$$= \frac{l+1}{k+1} \cdot \frac{l \cdot (l-1) \cdot \ \cdots\ \cdot (l-k+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ \cdots\ \cdot k}$$

$$= \boxed{\frac{l+1}{k+1}} \cdot {}_l\mathrm{C}_k (0 \le k \le l)$$

이므로

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_{k+1}}{{}_{m+5}\mathrm{C}_{k+1}} = \sum_{k=0}^{m} \frac{\frac{m+1}{k+1} \cdot {}_m\mathrm{C}_k}{\frac{m+5}{k+1} \cdot {}_{m+4}\mathrm{C}_k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \frac{m+1}{m+5} \cdot \frac{{}_m\mathrm{C}_k}{{}_{m+4}\mathrm{C}_k} = \boxed{\frac{m+1}{m+5}} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_m\mathrm{C}_k}{{}_{m+4}\mathrm{C}_k}$$

이다. 따라서

$$\sum_{k=0}^{m+1} \frac{{}_{m+1}\mathrm{C}_k}{{}_{m+5}\mathrm{C}_k} = \boxed{1} + \boxed{\frac{m+1}{m+5}} \cdot \sum_{k=0}^{m} \frac{{}_m\mathrm{C}_k}{{}_{m+4}\mathrm{C}_k}$$

$= 1 + \dfrac{m+1}{m+5} \cdot \dfrac{m+5}{5} = \dfrac{m+6}{5}$이다.

그러므로 모든 자연수 n에 대하여 주어진 등식이 성립한다.

(가): 1 (나): $\dfrac{l+1}{k+1}$ (다): $\dfrac{m+1}{m+5}$

답 ②

V063 | 답 ③

[풀이] ★

▸ ㄱ. (참)

$$\underbrace{1 \quad 2}_{\text{한 개 선택}} \quad \boxed{3} \quad \underbrace{4 \quad 5 \quad \cdots \quad 99 \quad 100}_{\text{서로 다른 두 개 선택}}$$

3 보다 작은 자연수 중에서 한 개를 선택하는

경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_2\mathrm{C}_1$

3 보다 큰 100 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 개를 선택하는

경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_{97}\mathrm{C}_2$

곱의 법칙에 의하여

$a_3 = {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_{97}\mathrm{C}_2$

예를 들어 아래와 같은 경우들이 가능하다.

$\{1,\ 3,\ 5,\ 20\},\ \{1,\ 3,\ 77,\ 94\},$

$\{2,\ 3,\ 16,\ 84\},\ \cdots$

▸ ㄴ. (거짓)

10 보다 작은 자연수 중에서 한 개를 선택하는

경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_9\mathrm{C}_1$

10 보다 큰 100 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 개를 선택하는

경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_{90}\mathrm{C}_2$

곱의 법칙에 의하여

$a_{10} = {}_{9}\mathrm{C}_1 \times {}_{90}\mathrm{C}_2$

90 보다 작은 자연수 중에서 한 개를 선택하는
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_{89}\mathrm{C}_1$

90 보다 큰 100 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 개를 선택하는
경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_{10}\mathrm{C}_2$

곱의 법칙에 의하여

$a_{90} = {}_{89}\mathrm{C}_1 \times {}_{10}\mathrm{C}_2$

$\therefore\ a_{10} = 9 \times \dfrac{90 \times 89}{2} \neq 89 \times \dfrac{10 \times 9}{2} = a_{90}$

▸ ㄷ. (참)

1 이상 100 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택할 때, 4개의 수 중에서 두 번째로 작은 수를 k라고 하면 k는 2 이상 98 이하의 자연수이다. 왜냐하면 1, 99, 100은 4개의 수 중에서 두 번째로 작은 수 일수 없기 때문이다.
그리고 2 이상 98 이하의 서로 다른 두 자연수 i, j에 대하여 두 번째로 작은 수가 i인 4개의 수만을 원소로 하는 집합과 두 번째로 작은 수가 j인 4개의 수만을 원소로 하는 집합의 교집합은 공집합이므로

$\therefore\ \displaystyle\sum_{k=2}^{98} a_k = {}_{100}\mathrm{C}_4$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

[참고] ★

보기 ㄷ을 수학적으로 엄밀하게 설명하면 다음과 같다.
1 이상 100 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택하는 사건을 A라고 하자.
1 이상 100 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택할 때, 선택된 4개의 수 중에서 k 보다 작은 수가 한 개이고, k 보다 큰 수가 두 개인 사건을 A_k라고 하자.
(단, k는 $2 \leq k \leq 98$인 자연수)
2 이상 98 이하의 서로 다른 두 자연수 i, j에 대하여

$A_i \cap A_j = \varnothing$

이고

$A = A_2 \cup A_3 \cup \cdots \cup A_{97} \cup A_{98}$

이므로 합의 법칙에 의하여 1 이상 100 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개의 수를 선택하는 경우의 수는
$a_2 + a_3 + \cdots + a_{98}$이다.

$\therefore\ {}_{100}\mathrm{C}_4 = \displaystyle\sum_{k=2}^{98} a_k$

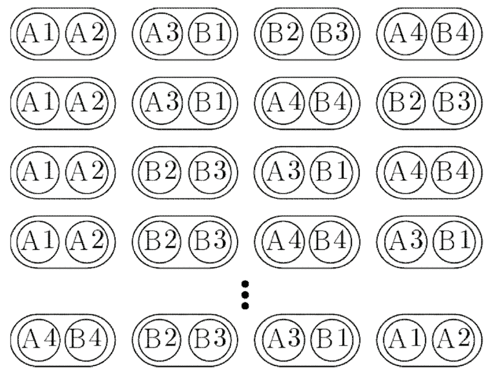
V064 | 답 81

[풀이1] ★

아시아 4개국을 각각 A1, A2, A3, A4,
아프리카 4개국을 각각 B1, B2, B3, B4라고 하자.
8개국을 2개국씩 짝지어 4개의 그룹으로 나누는
경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_{8}\mathrm{C}_2 \times {}_{6}\mathrm{C}_2 \times {}_{4}\mathrm{C}_2 \times {}_{2}\mathrm{C}_2 \times \dfrac{1}{4!} = 105$

위의 계산에서 4!으로 나누는 이유는
${}_{8}\mathrm{C}_2 \times {}_{6}\mathrm{C}_2 \times {}_{4}\mathrm{C}_2 \times {}_{2}\mathrm{C}_2$
에서 중복 계산된 경우를 제외하기 위해서이다.
예를 들어 아래의 24(=4!)가지의 경우는 모두 같으므로
1가지의 경우로 계산해야 한다.



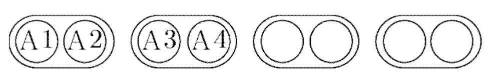
어느 아시아 2개국도 한 그룹에 속하지 않을
경우의 수는 순열의 수에 의하여
$4! = 24$
이때, 4!은 아래의 4개의 빈칸에
아프리카 4개국을 배열하는 경우의 수이다.

따라서 구하는 경우의 수는 $105 - 24 = 81$이다.

답 81

[풀이2] ★

아시아 4개국을 각각 A1, A2, A3, A4,
아프리카 4개국을 각각 B1, B2, B3, B4라고 하자.
(1) 두 개의 그룹이 아시아 국가만으로 이루어진 경우
예를 들어 아래와 같은 경우가 가능하다.



이때, 나머지 4개의 자리에 아프리카 4개국이 온다.
아시아 국가만으로 두 개의 그룹을 만드는
경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_{4}\mathrm{C}_2 \times {}_{2}\mathrm{C}_2 \times \dfrac{1}{2!}$

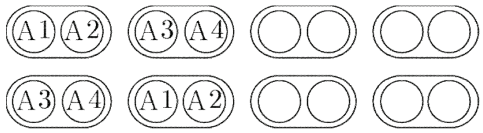
위의 계산에서 $2!$으로 나누는 이유는

${}_4C_2 \times {}_2C_2$

에서 중복 계산된 경우를 제외하기 위해서이다.

예를 들어 아래의 2가지의 경우는 같으므로

1가지의 경우로 계산해야 한다.



마찬가지의 방법으로 아프리카 국가만으로

두 개의 그룹을 만드는 경우의 수는

조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!}$$

따라서 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$${}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} \times {}_4C_2 \times {}_2C_2 \times \frac{1}{2!} = 9$$

(2) 오직 한 개의 그룹만이 아시아 국가만으로 이루어진 경우 또 다른 오직 한 개의 그룹은 아프리카 국가만으로 이루어져야 한다.

예를 들어 아래와 같은 경우가 가능하다.

이때, 나머지 2개의 자리에 B_1, B_2가 아닌 아프리카 2개국이 오면 된다.

경우의 수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_4C_2 \times {}_4C_2 \times 2! = 72$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$9 + 72 = 81$

답 81

[참고]

8개국을 2개국씩 짝지어 4개의 그룹으로 만드는 경우의 수를 다음과 같이 구해도 좋다.

$$\frac{8!}{(2!)^4 4!} = 105$$

V065 | 답 ①

[풀이] ★

조건 (가)에 의하여 함수 f의 치역으로 가능한 집합의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_2$이다.

예를 들어 함수 f의 치역을 $\{1, 2\}$라고 하자.

(1) $f(1) = 1$인 경우

합성함수의 정의에 의하여

$f(f(1)) = f(1) = 1$

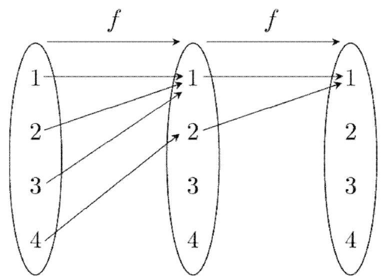
조건 (나)에 의하여

함수 $f \circ f$의 치역은 $\{1\}$이므로

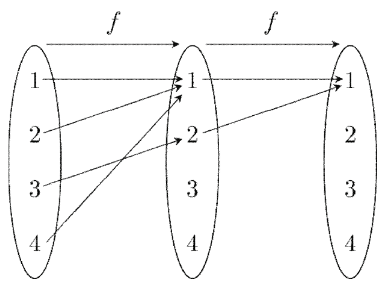
$f(2) = 1$

조건 (가), (나)가 모두 성립하는 경우는 다음과 같다.

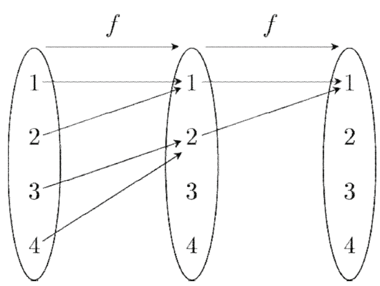
$f(3) = 1$, $f(4) = 2$인 경우



$f(3) = 2$, $f(4) = 1$인 경우



$f(3) = 2$, $f(4) = 2$인 경우



경우의 수는 3이다.

(2) $f(1) = 2$인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는 3이다.

구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_4C_2 \times 2 \times 3 = 36$

답 ①

T 집합과 명제 (교사경)

1	②	2	432	3	12	4	127	5	④
6	④	7	④	8	③	9	③	10	128
11	③	12	①	13	④	14	⑤	15	④
16	39	17	⑤	18	④	19	⑤	20	168
21	64	22	②	23	17	24	④	25	64
26	16	27	33	28	336	29	⑤	30	②
31	②	32	7	33	②	34	②	35	④
36	④	37	③	38	③	39	③	40	③
41	81	42	13	43	①	44	③	45	256
46	②	47	②	48	12	49	②	50	③
51	④	52	28	53	③	54	②	55	④
56	③	57	17	58	⑤	59	④	60	⑤
61	④	62	⑤	63	③	64	③	65	③
66	③	67	②	68	②	69	④	70	⑤
71	⑤	72	⑤	73	⑤	74	③	75	④
76	⑤	77	⑤	78	28				

T001 | 답 ②

[풀이]

(1) $6\in X$인 경우

조건 (나)를 만족시킨다.

조건 (가)에 의하여 집합 X의 개수는 집합 $\{3,\ 4,\ 5,\ 7\}$의 부분집합 중에서 원소의 개수가 1 이상인 집합의 개수와 같다.

집합 X의 개수는 $2^4-1=15$이다.

(2) $6\notin X$인 경우

조건 (나)를 만족시키기 위해서는

$3\in X,\ 4\in X$이어야 한다.

($\rightarrow$조건 (가)를 만족시킨다.)

집합 X의 개수는 집합 $\{5,\ 7\}$의 부분집합의 개수와 같다. 집합 X의 개수는 $2^2=4$이다.

(1), (2)에서 집합 X의 개수는 19이다.

답 ②

T002 | 답 432

[풀이] ★

조건 (가)에서 $\{4,\ 6\}\subset A$이므로

집합 A를 다음과 같이 두자.

$A=\{4,\ 6,\ a,\ b\}$

(단, $a+b=11$)

집합 B는

$B=\{4+k,\ 6+k,\ a+k,\ b+k\}$

만약 $k=0$이라고 하면

$A=B$이므로 집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 21이다. 이는 조건 (다)를 만족시키지 않는다.(즉, 가정에 모순이다.) 따라서 $k\neq 0$이다.

(1) $6+k=4$인 경우

$k=-2$이므로 두 집합 $A,\ B$는 각각

$A=\{4,\ 6,\ a,\ b\}$

$B=\{2,\ 4,\ a-2,\ b-2\}$

• $a-2=6$(즉, $a=8$)일 때,

두 집합 $A,\ B$는 각각

$A=\{4,\ 6,\ 8,\ 3(=b)\}$

$B=\{2,\ 4,\ 6,\ 1\}$

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8\}$이므로

집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 24이다.

이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

• $b-2=6$일 때도 마찬가지의 방법으로

집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 24이다.

이는 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(2) $a+k=4$인 경우

$k=4-a$이므로 두 집합 $A,\ B$는 각각

$A=\{4,\ 6,\ a,\ b\}$

$B=\{8-a,\ 10-a,\ 4,\ 4-a+b\}$

$a+b=11$이므로 다시 쓰면

$A=\{4,\ 6,\ a,\ 11-a\}$

$B=\{8-a,\ 10-a,\ 4,\ 15-2a\}$

• $8-a=6$(즉, $a=2$)일 때,

두 집합 $A,\ B$는 각각

$A=\{4,\ 6,\ 2,\ 9\}$

$B=\{6,\ 8,\ 4,\ 11\}$

$A\cup B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11\}$이므로

집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 40이다.

이는 조건 (나)를 만족시킨다.

• $10-a=6$(즉, $a=4$)일 때,

집합 A는

$A=\{4,\ 6,\ 7\}$

이므로 집합 A의 원소의 개수가 4라는 조건을 만족시키지 않는다.

• $15-2a=6$일 때,

$a=\dfrac{9}{2}$이므로 a가 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(3) $b+k=4$인 경우

$k=4-b$이므로 두 집합 $A,\ B$는 각각

$A=\{4,\ 6,\ a,\ b\}$

$B=\{8-b,\ 10-b,\ 4-b+a,\ 4\}$
$a+b=11$이므로 다시 쓰면
$A=\{4,\ 6,\ a,\ 11-a\}$
$B=\{a-3,\ a-1,\ 2a-7,\ 4\}$

- $a-3=6$(즉, $a=9$)일 때,

두 집합 A, B는 각각
$A=\{4,\ 6,\ 9,\ 2\}$
$B=\{6,\ 8,\ 11,\ 4\}$
$A\cup B=\{2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 11\}$이므로
집합 $A\cup B$의 모든 원소의 합은 40이다.
이는 조건 (나)를 만족시킨다.

- $a-1=6$(즉, $a=7$)일 때,

집합 A는
$A=\{4,\ 6,\ 7\}$
이므로 집합 A의 원소의 개수가 4라는 조건을 만족시키지 않는다.

- $2a-7=6$일 때,

$a=\dfrac{13}{2}$이므로 a가 자연수라는 조건을 만족시키지 않는다.

(1), (2), (3)에서
$A=\{4,\ 6,\ 2,\ 9\}$
따라서 집합 A의 모든 원소의 곱은 432이다.
답 432

T003 | 답 12

[풀이]
집합 A를 다음과 같이 두자.
$A=\{x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5\}$
집합 B는

$$B=\left\{\frac{x_1+a}{2},\ \frac{x_2+a}{2},\ \frac{x_3+a}{2},\ \frac{x_4+a}{2},\ \frac{x_5+a}{2}\right\}$$

조건 (가)에 의하여

$$x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=28 \qquad \cdots ㉠$$

이므로
집합 B의 모든 원소의 합은

$$\frac{1}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+\frac{5}{2}a$$

조건 (나), (다)에 의하여

$$\frac{3}{2}(x_1+x_2+x_3+x_4+x_5)+\frac{5}{2}a$$

$$=49+10+13=72 \qquad \cdots ㉡$$

㉠을 ㉡에 대입하여 a의 값을 구하면
$\therefore\ a=12$
답 12

T004 | 답 127

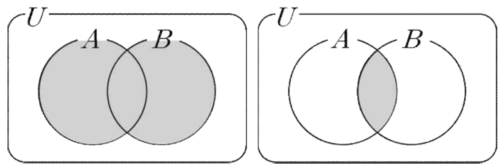
[풀이]
조건 (가)에 의하여 $X=\varnothing$이고,
집합 X의 모든 원소는 100 이하의 자연수이다.
조건 (나), (다)에 의하여
집합 X의 모든 원소는 $50(=2\times5^2)$과 서로소가 아니지만, $12(=2^2\times3)$과 서로소이다.
따라서 집합 X의 모든 원소는 5와 서로소가 아니지만, 2, 3과 서로소이다.
100 이하의 5의 배수 중에서 2의 배수도 아니고 3의 배수도 아닌 수를 모두 쓰면
5, 25, 35, 55, 65, 85, 95
따라서 집합 X의 개수는 곱의 법칙에 의하여
$2^7-1=127$
답 127

T005 | 답 ④

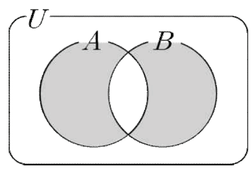
[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

두 집합 $A\cup B$, $A\cap B$를 벤다이어그램으로 각각 나타내면 다음과 같다.

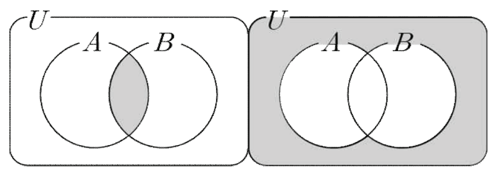


집합 $(A\cup B)-(A\cap B)$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



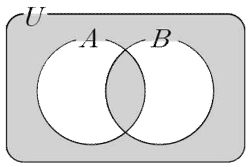
▸ ㄴ. (참)

두 집합 $A\cap B$, $(A\cup B)^C$를 벤다이어그램으로 각각 나타내면 다음과 같다.



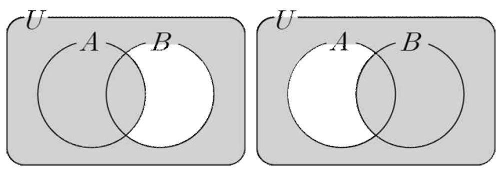
집합 $(A\cap B)\cup(A\cup B)^C$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음

과 같다.

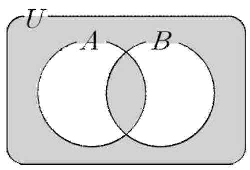


▸ ㄷ. (참)

두 집합 $A\cup B^C$, $B\cup A^C$를 벤다이어그램으로 각각 나타내면 다음과 같다.



집합 $(A\cup B^C)\cap(B\cup A^C)$를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



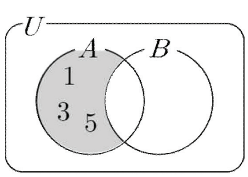
이상에서 옳은 것은 ㄴ, ㄷ이다.

답 ④

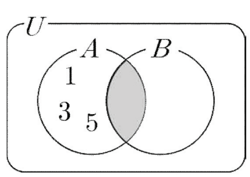
T006 | 답 ④

[풀이]

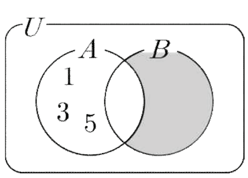
$U=\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9,\ 11\}$로 두자.



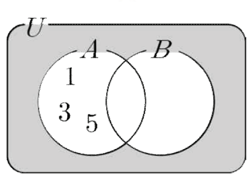
$A-B$



$A\cap B$



$B-A$



$(A\cup B)^C$

네 집합

$A-B$, $A\cap B$, $B-A$, $(A\cup B)^C$

중에서 어느 두 집합도 서로소이고,

이 네 집합의 교집합은 전체집합이다.

7, 9, 11 각각의 수는 세 집합

$A\cap B$, $B-A$, $(A\cup B)^C$

중에서 어느 한 집합의 원소이다.

따라서 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

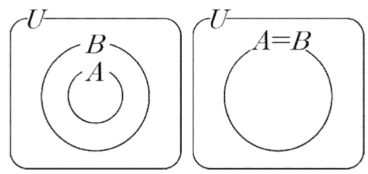
곱의 법칙에 의하여 $3^3=27$이다.

답 ④

T007 | 답 ④

[풀이] ★

$A\cup B=B\ \Leftrightarrow\ A\subset B$ ($\Leftrightarrow$ 집합 A가 집합 B의 진부분집합이거나 $A=B$이다.)



▸ ① (필요충분조건이 아니다.)

$A=B\ \Rightarrow\ A\cup B=B$

$A\cup B=B\ \rightarrow\ A=B$ (거짓)

따라서 $A=B$는 $A\cup B=B$이기 위한 충분조건이다.

▸ ② (필요충분조건이 아니다.)

$A\cup B^C=U\ \Leftrightarrow\ B\subset A$ ($\Leftrightarrow$ 집합 B가 집합 A의 진부분집합이거나 $A=B$이다.)

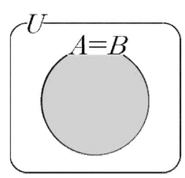
($\Rightarrow$) 증명

$B\not\subset A$라고 가정하자.

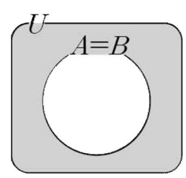
$B\not\subset A$이고 $B\not\subset B^C$이므로 $B\not\subset A\cup B^C(=U)$이다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $B\subset A$이다.

($\Leftarrow$) 증명



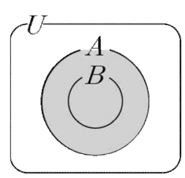
$A,\ B$



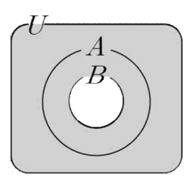
$A^C,\ B^C$

$A=B$일 때, $B^C=A^C$이므로

$A\cup B^C=A\cup A^C=U$



A



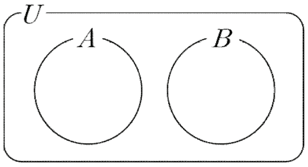
B^C

집합 B가 집합 A의 진부분집합일 때,

$A\cup B^C=U$

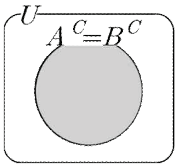
따라서 $A\cup B^C=U$는 $A\cup B=B$이기 위한 필요충분조건이 아니다.

▸ ③ (필요충분조건이 아니다.)

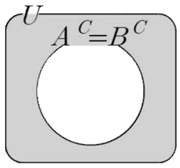


$A \cap B = \varnothing$ 이면 $A \neq B$이고 $A \not\subset B$이다.
따라서 $A \cap B = \varnothing$ 는 $A \cup B = B$이기 위한 필요충분조건이 아니다.

▸ ④ (필요충분조건이다.)
$A^C \supset B^C \Leftrightarrow A \subset B$ ($\Leftrightarrow$ 집합 A가 집합 B의 진부분집합이거나 $A = B$이다.)
($\Rightarrow$) 증명
$A^C = B^C$이면 $A = B$이다.

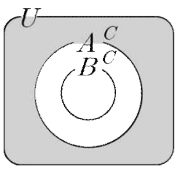


A^C, B^C

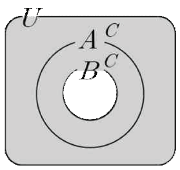


A, B

$B^C \subset A^C$이면 $A \subset B$이다.

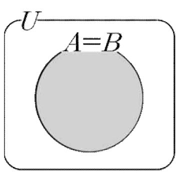


A

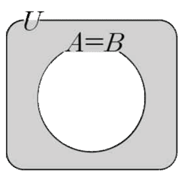


B

($\Leftarrow$) 증명
$A = B$이면 $A^C = B^C$이다.

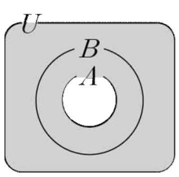


A, B

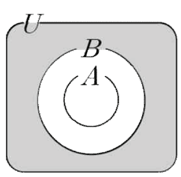


A^C, B^C

$A \subset B$이면 $A^C \supset B^C$이다.



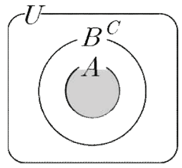
A^C



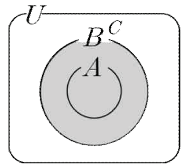
B^C

따라서 $A^C \supset B^C$는 $A \subset B$이기 위한 필요충분조건이다.

▸ ⑤ (필요충분조건이 아니다.)
차집합의 성질에 의하여
$A - B = A \cap B^C$이므로
$A \cap B^C = A$ $(A - B = A)$
$\Leftrightarrow$ $A \subset B^C$ ($\Leftrightarrow$ $A \cap B = \varnothing$)
($\Rightarrow$) 증명
$A \not\subset B^C$라고 가정하면
$A \not\subset A \cap B^C (= A)$
이는 가정에 모순이다.
따라서 $A \subset B^C$이다.
($\Leftarrow$) 증명
$A \subset B^C$이면 $A \cap B^C = A$이다.



A



B^C

따라서 $A - B = A$는 $A \subset B^C$이기 위한 필요충분조건이다.
답 ④

T008 | 답 ③

[풀이]
집합 A는
$A = \{1,\ 2,\ 5,\ 10\}$
문제에서 주어진 식에서
$X - A = \varnothing$ 이어야 한다.
즉, $X \subset A$이다.
집합 X가 가질 수 있는 원소는
1 또는 2 또는 5 또는 10
뿐이다.
따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$2^4 = 16$이다.
답 ③

T009 | 답 ③

[풀이]
조건 (가)에서
$A \subset X$
조건 (나)에서
$X \subset B^C$
정리하면
$A \subset X \subset B^C$
다시 쓰면
$\{1,\ 2,\ 3\} \subset X \subset \{1,\ 2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10\}$
집합 X의 개수는 집합 $\{7,\ 8,\ 9,\ 10\}$의 부분집합의 개수와 같다.
따라서 집합 X의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$2^4=16$

답 ③

T010 ㅣ답 128

[풀이]

조건 (가)에서

$A \subset X$ 즉, $\{1,\ 2\} \subset X$

조건 (나)에서

$\{3,\ 5,\ 7\} \cap X = \{5,\ 7\}$

이므로

$\{5,\ 7\} \subset X$, $3 \not\in X$

이상을 정리하면

$\{1,\ 2,\ 5,\ 7\} \subset X$, $3 \not\in X$

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.

	4	6	8	⋯	12
X	○	×	○	⋯	○
X^C	×	○	×	⋯	×

(단, ○는 포함된다, ×는 포함되지 않는다.)

곱의 법칙에 의하여 부분집합 X의 개수는

$2^7=128$

답 128

T011 ㅣ답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

차집합의 정의에 의하여

$A-B=A \cap B^C$

드모르간의 법칙에 의하여

$(A \cap B) \cup (A-B)$

$=(A \cap B) \cup (A \cap B^C)$

$=A \cap (B \cup B^C)$

$=A \cap U$

$=A$

문제에서 주어진 등식을 다시 쓰면

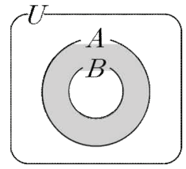
$A \cap B=B$

이므로

$\therefore\ B \subset A$

▸ ㄴ. (거짓)

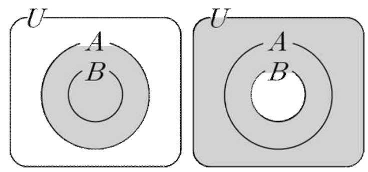
집합 $A-B$는 다음과 같다.



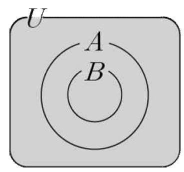
집합 $A-B$가 항상 공집합인 것은 아니다.

▸ ㄷ. (참)

두 집합 A, B^C은 다음과 같다.



집합 $A \cup B^C$은 다음과 같다.



$\therefore\ A \cup B^C=U$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

T012 ㅣ답 ①

[풀이] ★

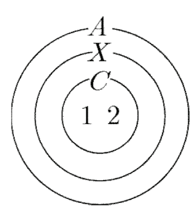
$C=A-B=\{1,\ 2\}$로 두자.

$A \cap X=X$이면 $X \subset A$이고,

$C \cup X=X$이면 $C \subset X$이다.

정리하면

$C \subset X \subset A$



집합 $A-C=\{3,\ 4,\ 5\}$의 각 원소는

집합 $X-C$에 속하거나, 집합 $A-X$에 속한다.

집합 $A-C$의 부분집합을 모두 쓰면

$\varnothing$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{5\}$,

$\{3,\ 4\}$, $\{3,\ 5\}$, $\{4,\ 5\}$,

$\{3,\ 4,\ 5\}$

집합 $X-C$는 위의 $8(=2^3)$개의 집합 이외의 집합일 수 없다.

집합 C의 모든 원소의 합이 3의 배수이므로

집합 $X-C$의 모든 원소의 합이 3의 배수이면

집합 X의 모든 원소의 합은 3의 배수이다.

집합 $X-C$는

$\varnothing$ 또는 $\{3\}$ 또는 $\{4,\ 5\}$ 또는 $\{3,\ 4,\ 5\}$

이므로, 집합 X는

$\{1,\ 2\}$ 또는 $\{1,\ 2,\ 3\}$ 또는 $\{1,\ 2,\ 4,\ 5\}$

또는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$

따라서 집합 X의 개수는 4이다.

답 ①

T013 | 답 ④

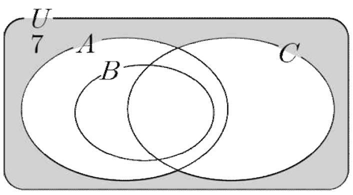
[풀이]

문제에서 주어진 조건에서

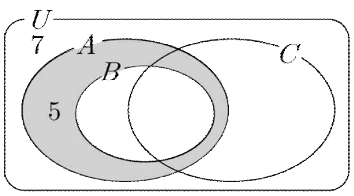
$B \subset A$이므로

$A \cup B \cup C = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

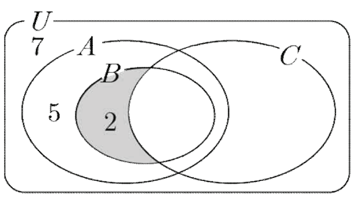
$U-(A \cup B \cup C) = \{7\}$



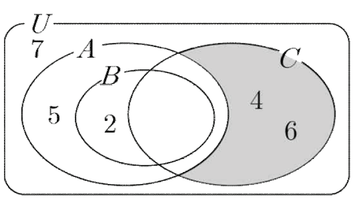
$A-B=\{5\}$이므로



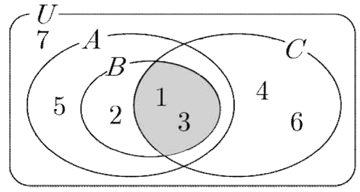
$B-C=\{2\}$이므로



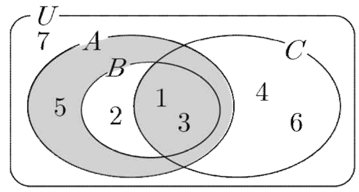
$C-A=\{4,\ 6\}$이므로



아래 그림처럼 1, 3은 집합 $A \cap B \cap C$의 원소일 수 밖에 없다.



집합 $A \cap (B^C \cup C)$은



$A \cap (B^C \cup C) = \{1,\ 3,\ 5\}$

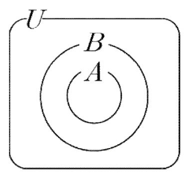
답 ④

T014 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 조건에 의하여

$A \cap B^C = \varnothing$ 이므로 $A \subset B$이다.



▸ ㄱ. (참)

$A \subset B$이므로 $A-B=\varnothing$ 이다.

▸ ㄴ. (참)

$A \cap B = A$이므로

$(A \cap B)^C = A^C$이다.

▸ ㄷ. (참)

드모르간의 법칙에 의하여

$(A^C \cup B) \cap A$

$=(A^C \cap A) \cup (B \cap A)$

$=\varnothing \cup A$

$=A$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

T015 | 답 ④

[풀이]

문제에서 주어진 조건에 의하여

$A \triangle B = (A \cup B)-(A \cap B)$

• ① (참)

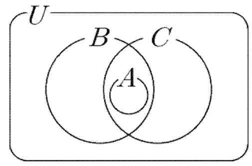
$\{a,\ b,\ c\}\triangle\{a,\ b,\ c\}$
$=\{a,\ b,\ c\}-\{a,\ b,\ c\}=\varnothing$
이므로 $Y=\varnothing$이다.
• ② (참)
$\{a,\ b,\ c\}\triangle\{d\}$
$=\{a,\ b,\ c,\ d\}-\varnothing=\{a,\ b,\ c,\ d\}$
이므로 $Y=U$이다.
• ③ (참)
$\{a,\ b,\ c\}\triangle\{c\}$
$=\{a,\ b,\ c\}-\{c\}=\{a,\ b\}$
이므로 $Y=\{a,\ b\}$이다.
• ④ (거짓)
$\{a,\ b,\ c\}\triangle\{a,\ b,\ c,\ d\}$
$=\{a,\ b,\ c,\ d\}-\{a,\ b,\ c\}=\{d\}$
이므로 $Y=\{d\}$이다.
• ⑤ (참)
$\{a,\ b,\ c\}\triangle\{c,\ d\}$
$=\{a,\ b,\ c,\ d\}-\{c\}=\{a,\ b,\ d\}$
이므로 $Y=\{a,\ b,\ d\}$이다.
이상에서 옳지 않은 것은 ④뿐이다.
답 ④

T016 | 답 39

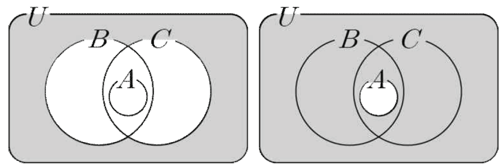
[풀이]
$n=1$인 경우: $A_1\cap A_2=A_2$ (◯)
$n=2$인 경우: $A_2\cap A_2=A_2\neq A_4$ (×)
$n=3$인 경우: $A_3\cap A_2=A_6$ (◯)
$n=4$인 경우: $A_4\cap A_2=A_4\neq A_8$ (×)
$n=5$인 경우: $A_5\cap A_2=A_{10}$ (◯)
$n=6$인 경우: $A_6\cap A_2=A_6\neq A_{12}$ (×)
$n=7$인 경우: $A_7\cap A_2=A_{14}$ (◯)
⋮
이상에서 문제에서 주어진 등식이 성립하는 자연수 n은 홀수임을 추론할 수 있다.
$90\in A_2-A_n$
이므로 $90\in A_2$, $90\notin A_n$이다.
$90=2^1 3^2 5^1$에서 n은 1, 3, 5, 9, 15, 45일 수 없다.
따라서 자연수 n의 개수는
$45-6=39$
답 39

T017 | 답 ⑤

[풀이] ★
▸ ㄱ. (참)
$A\subset B$, $A\subset C$이므로 $A\subset(B\cap C)$이다.



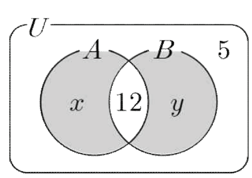
▸ ㄴ. (참)
드모르간의 법칙에 의하여
$B^C\cap C^C=(B\cup C)^C$이므로
두 집합 $B^C\cap C^C$, A^C을 벤다이어그램으로 각각 나타내면 다음과 같다.



$\therefore\ (B^C\cap C^C)\subset A^C$
▸ ㄷ. (참)
전체집합 U의 임의의 부분집합 X에 대하여
$A\subset B$이므로 $(X-B)\subset(X-A)$이고,
$X\subset U$이므로 $(X-A)\subset(U-A)$이다.
정리하면
$(X-B)\subset(X-A)\subset A^C$
($\because$ 여집합의 정의에 의하여 $U-A=A^C$)
$\therefore\ (X-B)\subset A^C$
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.
답 ⑤

T018 | 답 ④

[풀이]
드모르간의 법칙에 의하여
$A^C\cap B^C=(A\cup B)^C$
이므로
$n((A\cup B)^C)=5$
$n(A-B)=x$, $n(B-A)=y$라고 하자.



$n(A\cup B)=n(A-B)+n(A\cap B)+n(B-A)$

이므로

$45=x+12+y$ 즉, $x+y=33$

$\therefore\ n((A-B)\cup(B-A))=33$

답 ④

T019 | 답 ⑤

[풀이]

$A=\{1,\ 2,\ 3,\ 6\}$

▸ ㄱ. (참)

$A\cap B=\{2,\ 3\}$이므로

$5\not\in A\cap B$

▸ ㄴ. (참)

$B-A=\{5,\ 7\}$이므로

$n(B-A)=2$

▸ ㄷ. (참)

보기 ㄷ의 조건을 만족시키는 집합을 X라고 하자.

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}$

이므로

$X\cap\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7\}=\varnothing$

네 수 4, 8, 9, 10은 집합 X의 원소일 수도 있고, 아닐 수도 있다.

따라서 집합 X의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$2^4=16$

이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

T020 | 답 168

[풀이1]

$A-B=\{1,\ 2\}$, $A\cap B=\{3,\ 4,\ 5\}$,

$B-A=\{6,\ 7,\ 8\}$

집합 X가 다음의 세 조건을 모두 만족시키면 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

(조건1) $X\subset(A\cup B)$

(조건2) 집합 X가 집합 $A-B$의 원소 중 적어도 하나 이상을 원소로 갖는다.

(조건3) 집합 X가 집합 $B-A$의 원소 중 적어도 하나 이상을 원소로 갖는다.

집합 $A\cap B$의 각 원소는 집합 X의 원소일 수도 있고, 아닐 수도 있으므로 구하는 경우의 수는

$2^3(2^2-1)(2^3-1)=168$

이때, 2^3은 집합 $A\cap B$의 부분집합의 개수, 2^2-1은 집합 $A-B$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 집합의 개수, 2^3-1은 집합 $B-A$의 부분집합 중에서 공집합을 제외한 집합의 개수이다.

답 168

[풀이2]

$X\subset(A\cup B)$인 경우의 수를 p,

$X\subset A$인 경우의 수를 q,

$X\subset B$인 경우의 수를 r,

$X\subset(A\cap B)$인 경우의 수를 s라고 할 때, 구하는 경우의 수는

$p-q-r+s$

이다. 이때, 다음의 필요충분조건이 성립함을 이용한 것이다.

$X\subset A$, $X\subset B\Leftrightarrow X\subset(A\cap B)$

$A\cap B=\{3,\ 4,\ 5\}$

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

$p=2^8$, $q=2^5$, $r=2^6$, $s=2^3$

이므로

$\therefore\ p-q-r+s$

$=2^8-2^5-2^6+2^3=168$

답 168

T021 | 답 64

[풀이] ★

$A\cup C=B\cup C$이므로

$A\cup C\subset B\cup C$이고 $A\cup C\supset B\cup C$이다.

(1) $A\cup C\subset B\cup C$인 경우

$\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}\cup C\subset\{3,\ 6,\ 9\}\cup C$

그런데 집합 $A\cap B=\{3,\ 9\}$이므로

$A-B=\{1,\ 5,\ 7\}\subset C$

(2) $A\cup C\supset B\cup C$인 경우

$\{1,\ 3,\ 5,\ 7,\ 9\}\cup C\supset\{3,\ 6,\ 9\}\cup C$

그런데 집합 $A\cap B=\{3,\ 9\}$이므로

$B-A=\{6\}\subset C$

(1), (2)에서

$\{1,\ 5,\ 6,\ 7\}\subset C$

집합

$U-\{1,\ 5,\ 6,\ 7\}=\{2,\ 3,\ 4,\ 8,\ 9,\ 10\}$

의 각 원소는 집합 C의 원소이거나 집합 C^C의 원소이다.

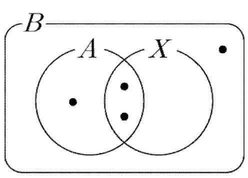
예를 들어

	2	3	4	8	9	10
C	○	○	×	○	×	○
C^C	×	×	○	×	○	×

(단, ○는 원소이다. ×는 원소가 아니다.)
이면
$C=\{1,\ 2,\ 3,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 10\}$,
$C^C=\{4,\ 9\}$
이다.
따라서 곱의 법칙에 의하여 집합 C의 개수는 $2^6(=64)$이다.
답 64

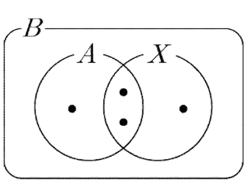
T022 | 답 ②

[풀이] ★
$B\cup X=B$이면 $X\subset B$이다.
그런데 $A\subset B$이므로 B를 전체집합으로 두어도 좋다.
$A=(A-X)\cup(A\cap X)$,
$(A-X)\cap(A\cap X)=\varnothing$
이고, 집합 $A\cap X$의 원소의 개수가 2이므로 집합 $A-X$의 원소의 개수는 1이다. 왜냐하면 집합 A의 원소의 개수가 3이기 때문이다.
(1) $X-A=\varnothing$인 경우
집합 B의 원소의 개수가 4이므로 집합 $(A\cup X)^C$의 원소의 개수는 1이다.



$A\cap X$	$A-X$	$(A\cup X)^C$
$\{a,\ b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$
$\{a,\ c\}$	$\{b\}$	$\{d\}$
$\{b,\ c\}$	$\{a\}$	$\{d\}$

집합 X는
$\{a,\ b\}$ 또는 $\{a,\ c\}$ 또는 $\{b,\ c\}$
이다.
(2) $X-A\neq\varnothing$인 경우
집합 B의 원소의 개수가 4이므로 집합 $X-A$의 원소의 개수는 1이다.

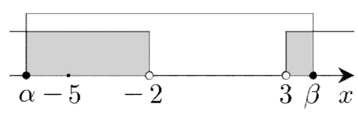


$A\cap X$	$A-X$	$X-A$
$\{a,\ b\}$	$\{c\}$	$\{d\}$
$\{a,\ c\}$	$\{b\}$	$\{d\}$
$\{b,\ c\}$	$\{a\}$	$\{d\}$

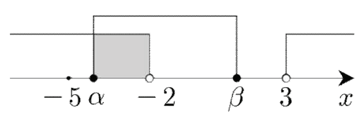
집합 X는
$\{a,\ b,\ d\}$ 또는 $\{a,\ c,\ d\}$ 또는 $\{b,\ c,\ d\}$
이다.
(1), (2)에 의하여 집합 X의 개수는 6이다.
답 ②

T023 | 답 17

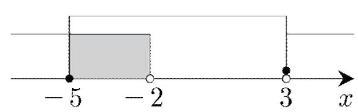
[풀이]
집합 A에서 주어진 부등식을 풀자.
$(x-3)(x+2)>0$
이차부등식을 풀면
$x<-2$ 또는 $x>3$
조건 (가)에서
$A^C=\{x\mid -2\leq x\leq 3\}\subset B$
이므로 이차방정식 $x^2+ax+b=0$은 서로 다른 두 실근을 가져야 한다. 이때, 서로 다른 두 실근을 α, $\beta(\alpha<\beta)$라고 하자.
집합 B에서 주어진 부등식을 풀면
$\alpha\leq x\leq\beta$
만약 $\alpha\neq-5$이거나 $\beta\neq3$이면
조건 (가) 또는 (나)가 성립하지 않는다.
예를 들어 $\alpha<-5$, $\beta>3$이라고 하자.



조건 (가)는 성립하지만, 조건 (나)는 성립하지 않는다.
예를 들어 $-5<\alpha<-2$, $-2<\beta<3$이라고 하자.



두 조건 (가), (나) 모두 성립하지 않는다.
$\alpha=-5$, $\beta=3$이라고 하자.



두 조건 (가), (나) 모두 성립한다.
이차방정식 $x^2+ax+b=0$의 두 실근이 -5, 3이므로 이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여
$-5+3=-a$, $-5\times3=b$

$\therefore\ a-b=2+15=17$

답 17

T024 | 답 ④

▶ 실전풀이: [풀이2]

[풀이1]

$A\cap B=\{2,\ 3\}$이다.

• (1) 집합 X가 2 또는 3을 원소로 갖는 경우

$2\in X,\ 3\notin X$

또는

$2\notin X,\ 3\in X$

또는

$2\in X,\ 3\in X$

인 세 가지의 경우가 가능하다.

이때, $A\cap X\neq\varnothing$, $B\cap X\neq\varnothing$이다.

각각의 경우에 대하여

1, 5, 7, 4, 6

은 집합 X의 원소일 수도 있고, 아닐 수도 있다.

경우의 수는 합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여

$2^5+2^5+2^5=3\times2^5=96$

• (2) 집합 X가 2와 3을 원소로 갖지 않는 경우

$1\in X,\ 2\notin X,\ 3\notin X,\ 5\in X,\ 7\notin X$

$1\in X,\ 2\notin X,\ 3\notin X,\ 5\notin X,\ 7\in X$

$1\in X,\ 2\notin X,\ 3\notin X,\ 5\in X,\ 7\in X$

인 세 가지의 경우가 가능하다.

이때, $A\cap X\neq\varnothing$, $B\cap X\neq\varnothing$이다.

각각의 경우에 대하여

4, 6

은 집합 X의 원소일 수도 있고, 아닐 수도 있다.

경우의 수는 합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여

$2^2+2^2+2^2=3\times2^2=12$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

U의 부분집합 X의 개수는

$96+12=108$

답 ④

[풀이2]

주어진 조건의 부정은

'$A\cap X=\varnothing$ 또는 $B\cap X=\varnothing$' $\cdots$(*)

• (1) $A\cap X=\varnothing$인 경우는 $2^4=16$가지이다.

이때, 2^4은 집합 $A^C=\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$의 부분집합의 개수이다.

• (2) $B\cap X=\varnothing$인 경우는 $2^3=8$가지이다.

이때, 2^3은 집합 $B^C=\{1,\ 4,\ 6\}$의 부분집합의 개수이다.

• (3) $(A\cup B)\cap X=\varnothing$인 경우는 $2^2=4$가지이다.

이때, 2^2은 집합 $(A\cup B)^C=\{4,\ 6\}$의 부분집합의 개수이다.

(*)의 경우의 수는

(1)+(2)−(3)$=16+8-4=20$

전체집합 U의 부분집합의 개수는 $2^7=128$이므로

구하는 경우의 수는

$128-20=108$

답 ④

T025 | 답 64

[풀이]

$A\cap B=\{1,\ 3,\ 5\}$,

$A-B=\{2,\ 4\}$, $B-A=\{7,\ 9\}$

집합의 상등의 정의에 의하여

$A\cup C\subset B\cup C$, $B\cup C\subset A\cup C$

이므로

$A-B\subset C$, $B-A\subset C$

즉, $\{2,\ 4\}\subset C$, $\{7,\ 9\}\subset C$에서

$\{2,\ 4,\ 7,\ 9\}\subset C$

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.

	1	3	5	6	8	10
C	○	×	○	×	×	○
C^C	×	○	×	○	○	×

(단, ○는 포함된다, ×는 포함되지 않는다.)

곱의 법칙에 의하여 부분집합 C의 개수는

$2^6=64$

답 64

T026 | 답 16

[풀이]

$A\cup B=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5\}$, $A\cap B=\{2,\ 3\}$

이므로 차집합의 성질에 의하여

$P=(A\cup B)-(A\cap B)=\{1,\ 4,\ 5\}$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$\{1,\ 4,\ 5\}\subset X\subset\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7\}$

집합 X의 개수는 집합 $U-P=\{2,\ 3,\ 6,\ 7\}$의 부분집합의 개수와 같다.

따라서 구하는 값은 $2^4=16$이다.

답 16

T027 | 답 33

[풀이]

조건 (가), (나)에 의하여

$n(A)+n(B)$

$=n(A\cup B)+n(A\cap B)=55+15=70$

$n(B)+n(C)$

$=n(B\cup C)+n(B\cap C)=54+12=66$

$n(C)+n(A)$

$=n(C\cup A)+n(C\cap A)=51+11=62$

위의 세 등식을 변변히 모두 더하여 정리하면

$n(A)+n(B)+n(C)=99$

$\therefore\ n(A)=99-66=33$

답 33

T028 | 답 336

[풀이]

조건 (가)에서 다음의 6가지의 경우가 가능하다.

1	2	3	4
○	○	×	×
○	×	○	×
○	×	×	○
×	○	○	×
×	○	×	○
×	×	○	○

(단, ○는 집합 P의 원소이다,
×는 집합 P의 원소가 아니다.)

이때, 집합 A의 서로 다른 두 원소의 합의 최솟값과 최댓값은 각각 $3(=1+2)$, $7(=3+4)$임을 기억하자.

조건 (나)에서

$P\subset B$

(1) $n(P-A)=4$인 경우

집합 $P-A$의 모든 원소의 합은

$26(=5+6+7+8)$이다.

조건 (다)에 의하여

집합 $P\cap A$의 모든 원소의 합은 $2(=28-26)$이다.

그런데 집합 $P\cap A$의 원소의 합의 최솟값은 3이므로, 이는 가정에서 모순이다.

(2) $n(P-A)=3$인 경우

집합 $P-A$의 서로 다른 세 원소의 합의 최솟값과 최댓값은 각각 $18(=5+6+7)$, $21(=6+7+8)$이다.

조건 (다)에 의하여

집합 $P\cap A$의 원소의 합의 최솟값과 최댓값은 각각 7 $(=28-21)$, $10(=28-18)$이다.

그런데 집합 $P\cap A$의 모든 원소의 합의 최댓값은 7이므로

$P\cap A=\{3,\ 4\}$, $P-A=\{6,\ 7,\ 8\}$

즉, $P=\{3,\ 4,\ 6,\ 7,\ 8\}$

(3) $n(P-A)=2$인 경우

집합 $P-A$의 서로 다른 두 원소의 합의 최솟값과 최댓값은 각각 $11(=5+6)$, $15(=7+8)$이다.

조건 (다)에 의하여

집합 $P\cap A$의 모든 원소의 합의 최솟값과 최댓값은 각각 13 $(=28-15)$, $17(=28-11)$이다.

그런데 집합 $P\cap A$의 원소의 합의 최댓값은 7이므로, 이는 가정에서 모순이다.

(4) $n(P-A)=1$인 경우

집합 $P-A$의 원소의 최솟값과 최댓값은 각각 5, 8이다.

조건 (다)에 의하여

집합 $P\cap A$의 모든 원소의 합의 최솟값과 최댓값은 각각 20 $(=28-8)$, $23(=28-5)$이다.

그런데 집합 $P\cap A$의 원소의 합의 최댓값은 7이므로, 이는 가정에서 모순이다.

(5) $n(P-A)=0$(즉, $P-A=\varnothing$)인 경우

조건 (다)에 의하여

집합 $P\cap A$의 모든 원소의 합은 28이다.

그런데 집합 $P\cap A$의 원소의 합의 최댓값은 7이므로, 이는 가정에 모순이다.

(1)~(5)에서

$P-A=\{6,\ 7,\ 8\}$

따라서 구하는 값은

$6\times7\times8=336$

답 336

T029 | 답 ⑤

[풀이]

조건 (가)에서

$1\not\in X$, $2\in X$, $3\not\in X$

네 수 4, 5, 6, 7 각각은 집합 X의 원소일 수도 있고, 아닐 수도 있다.

조건 (나)에 대해서 생각하자.

$S(X)=2+S(X-\{2\})$

$S(X)$의 값은 홀수이므로

$S(X-\{2\})$의 값은 홀수이다.

그런데 $X-\{2\}\subset\{4,\ 5,\ 6,\ 7\}$이므로

$X-\{2\}=\{4,\ 6,\ 7\}$

일 때, $S(X-\{2\})$, $S(X)$는 최대가 된다.

다시 말하면

$X=\{2,\ 4,\ 6,\ 7\}$일 때, $S(X)$는 최댓값을 갖는다.
이때, 최댓값은 19이다.
답 ⑤

T030 | 답 ②

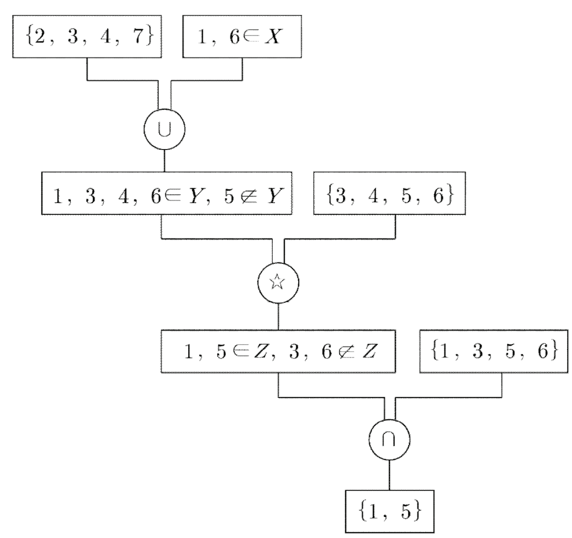
[풀이]
집합 A에서 주어진 방정식을 정리하면
$x(x^2+ax+b)=0$에서
$x=0$ 또는 $x^2+ax+b=0$
집합 B에서 주어진 방정식을 정리하면
$x(x^2+bx+a)=0$에서
$x=0$ 또는 $x^2+bx+a=0$
$n(A\cap B)=2$이므로 두 이차방정식
$x^2+ax+b=0,\ x^2+bx+a=0$
은 공통근을 갖는다.
이 공통근을 α라고 하면
$\alpha^2+a\alpha+b=0,\ \alpha^2+b\alpha+a=0$
두 식을 변끼리 빼면
$\alpha(a-b)+b-a=(a-b)(\alpha-1)=0$
$a\neq b$이므로 $\alpha=1$
$x^2+ax+b=0,\ x^2+bx+a=0$
에 $x=1$을 대입하여 정리하면
$a+b=-1$
이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여
$x^2+ax+b=0$
의 한 근이 1이므로 다른 한 근은 b이다.
$(\because\ 1+b=-a,\ 1\times b=b)$
이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여
$x^2+bx+a=0$
의 한 근이 1이므로 다른 한 근은 a이다.
$(\because\ 1+a=-b,\ 1\times a=a)$
$n(A\cup B)=4,\ n(A\cap B)=2$이므로
$a\neq 0,\ a\neq 1,\ b\neq 0,\ b\neq 1$
두 집합 $A,\ B$는 각각
$A=\{0,\ 1,\ b\},\ B=\{0,\ 1,\ a\}$
$(A\cup B)-(A\cap B)=\{a,\ b\}$이므로
구하는 값은 $a+b=-1$이다.
답 ②

T031 | 답 ②

[풀이]
세 종류의 자격증 A, B, C를 취득한 수강생만을 원소로 하는 집합을 각각 $A,\ B,\ C$라고 하자.
문제에서 주어진 조건에 의하여
$n(A)=21,\ n(B)=18,\ n(C)=15,$
$n(A\cap B)=p,\ n(B\cap C)=q,\ n(C\cap A)=r,$
$n(A\cap B\cap C)=0,$
$n((A\cup B\cup C)^C)=3$
여집합의 성질에 의하여
$n(A\cup B\cup C)=35-3=32$
이므로
$n(A\cup B\cup C)$
$=n(A)+n(B)+n(C)$
$-n(A\cap B)-n(B\cap C)-n(C\cap A)$
$+n(A\cap B\cap C)$
즉, $32=21+18+15-(p+q+r)+0$
정리하면
$p+q+r=22$
따라서 자격증 A, B, C 중에서 두 종류의 자격증만 취득한 수강생의 수는 22이다.
답 ②

T032 | 답 7

[풀이] ★



(1) 집합 Z에 대한 조건을 생각하자.
$Z\cap\{1,\ 3,\ 5,\ 6\}=\{1,\ 5\}$이므로
$\{1,\ 5\}\subset Z,\ 3\not\in Z,\ 6\not\in Z$ $\cdots$ ㉠
(2) 집합 Y에 대한 조건을 생각하자.
$\{2,\ 3,\ 4,\ 7\}\cup X=Y$이므로

$\{2,\ 3,\ 4,\ 7\} \subset Y$ $\cdots$ ㉡

연산 ☆은 다음과 같이 정의될 수 있다.

$A☆B = (A \cup B) - (A \cap B)$

$Y☆\{3,\ 4,\ 5,\ 6\} = Z$이므로 ㉠에 의하여

$\{1,\ 5\} \subset Y☆\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $\cdots$ ㉢

$3 \not\in Y☆\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$, $\cdots$ ㉣

$6 \not\in Y☆\{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ $\cdots$ ㉤

$\{3,\ 4,\ 6\} \subset Y \cap \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ $\cdots$ ㉥

($\because$ ㉡에서 $4 \in Y$, ㉣, ㉤)

$\{1,\ 2,\ 7\} \subset Y - \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$

($\because$ ㉡에서 $3 \in Y$, $4 \in Y$이고,

$1 \not\in \{3,\ 4,\ 5,\ 6\}$이므로 ㉢에서 $1 \in Y$)

$\{5\} \subset \{3,\ 4,\ 5,\ 6\} - Y$

($\because$ ㉡에서 $3 \in Y$, $4 \in Y$, ㉥에서 $6 \in Y$)

정리하면

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7\} \subset Y$

(3) 집합 X에 대한 조건을 생각하자.

$\{2,\ 3,\ 4,\ 7\} \cup X = Y$이므로

$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 7\} \subset \{2,\ 3,\ 4,\ 7\} \cup X$

$1 \in X$, $6 \in X$

다시 말하면 집합 X는 1과 6을 반드시 원소로 가져야 한다.

따라서 집합 X의 모든 원소의 합의 최솟값은 7이다.

$\therefore\ s \geq 7$

답 7

T033

| 답 ②

[풀이]

$S(X)$가 최대이고, $S(Y)$가 최소이면 $S(X) - S(Y)$는 최댓값을 갖는다.

우선 조건 (나)에 대하여 생각하자.

집합 X의 임의의 서로 다른 두 원소가 서로 나누어떨어지지 않으려면 $k \in X$일 때, k를 제외한 k의 약수와 배수가 집합 X의 원소가 아니어야 한다.

11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21

중에서 서로 다른 어느 두 수도 서로 나누어떨어지지 않으므로 $S(X)$가 최댓값을 가지려면 집합 X는 11, 12, 13, $\cdots$, 21을 원소로 가져야 한다.

그리고 1, 3, 7은 21의 약수,

2, 4, 5, 10은 20의 약수,

6, 9는 18의 약수,

8은 16의 약수이므로

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

은 집합 X의 원소일 수 없다.

따라서 집합 X는

$X = \{11,\ 12,\ 13,\ 14,\ 15,$

$16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21\}$

조건 (가)에 의하여

$Y = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 11\}$

이때, $S(Y)$는 최솟값을 갖는다.

$\therefore\ S(X) - S(Y)$

$\leq \dfrac{12+21}{2} \times 10 - \dfrac{1+6}{2} \times 6 = 144$

($\because$ 등차수열의 합의 공식)

답 ②

T034

| 답 ②

[풀이]

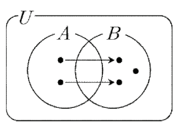
조건 (다)에 의하여

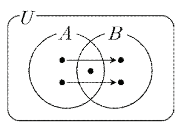
$\in A$ 이면	1	2	3	4	5	6	7	8
$\in B$ 이다.	1	5	2	6	3	7	4	8

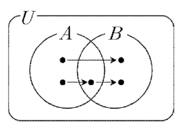
위의 표에서 아래의 표를 만들 수 있다.

$\in A$이면	$\in B$이다.	$\in A \cap B$
$\boxed{2}$, 3	5, $\boxed{2}$	2
2, 4	5, 6	$\times$
2, $\boxed{5}$	$\boxed{5}$, 3	5
2, 6	5, 7	$\times$
2, 7	5, 4	$\times$
3, 4	2, 6	$\times$
$\boxed{3}$, 5	2, $\boxed{3}$	3
3, 6	2, 7	$\times$
3, 7	2, 4	$\times$
4, 5	6, 3	$\times$
4, $\boxed{6}$	$\boxed{6}$, 7	6
$\boxed{4}$, 7	6, $\boxed{4}$	4
5, 6	3, 7	$\times$
5, 7	3, 4	$\times$
6, $\boxed{7}$	$\boxed{7}$, 4	7

조건 (가), (나)에 의하여 다음의 세 경우가 가능하다.

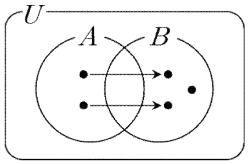




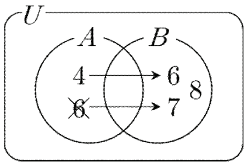


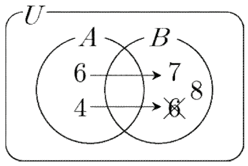
가장 왼쪽부터 순서대로 (경우1), (경우2), (경우3)이라고 하자.

▸ (경우1)

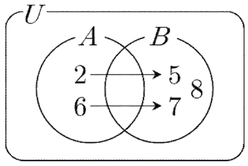


다음의 경우를 생각하자.
집합 U의 세 원소의 합의 최댓값은 $21(=6+7+8)$이다. 집합 $B-A=\{6,\ 7,\ 8\}$이 될 수 있는지를 확인해보자.



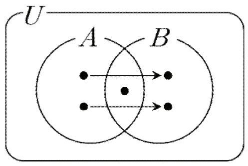


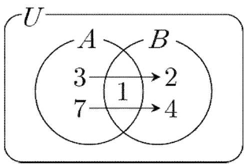
위와 같이 6과 7이 동시에 집합 $B-A$의 원소일 수 없다.

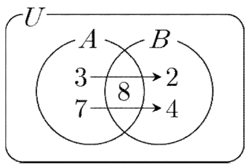


위와 같이 $B-A=\{5,\ 7,\ 8\}$일 때, 집합 $B-A$의 원소의 합은 최대가 된다.
$\therefore\ M=5+7+8=20$
M의 값을 구했으므로, 이제 m의 값을 구하자.

▸ (경우2)

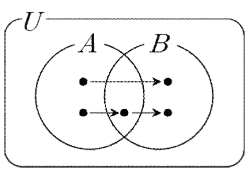


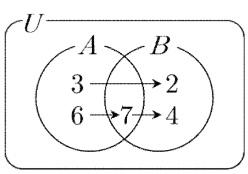


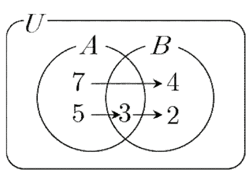


위와 같이 $B-A=\{2,\ 4\}$일 때, 집합 $B-A$의 원소의 합은 최소가 된다.
$\therefore\ m=2+4=6$
m의 값을 구했지만, $m=6$이 되는 다른 경우들도 모두 찾아보자.

▸ (경우3)







위와 같이 $B-A=\{2,\ 4\}$일 때, 집합 $B-A$의 원소의 합은 최소가 된다.
$\therefore\ m=2+4=6$
이상에서 구하는 값은 $20+6=26$이다.

답 ②

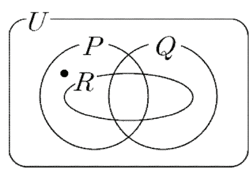
T035 | 답 ④

[풀이]
조건 p에서 주어진 부등식을 풀면
$x\le -a$ 또는 $x\ge a$
$p\Rightarrow q$이므로 $P\subset Q$이다.
$-a<-2,\ a\ge 4$
정리하면
$\therefore\ a\ge 4$

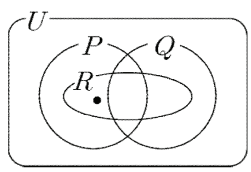
답 ④

T036 | 답 ④

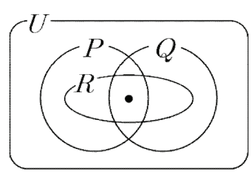
[풀이] ★
① (거짓)
$P\not\subset Q$이므로 $p\rightarrow q$는 거짓이다.
아래에서 •가 주어진 명제의 반례이다.



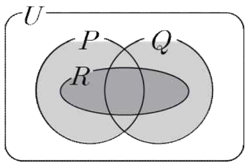
② (거짓)
$R\not\subset P^C$이므로 $r\rightarrow\ \sim p$는 거짓이다.
아래에서 •가 주어진 명제의 반례이다.



③ (거짓)
$P\not\subset Q^C$이므로 $p\rightarrow\ \sim q$는 거짓이다.
아래에서 •가 주어진 명제의 반례이다.



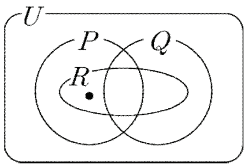
④ (참)
$R\subset(P\cup Q)$이므로 $r\Rightarrow(p$또는$q)$이다.



⑤ (거짓)

$(P \cap R) \not\subset Q$이므로 (p이고r)$\rightarrow q$는 거짓이다.

아래에서 •가 주어진 명제의 반례이다.



이상에서 참인 것은 ④뿐이다.

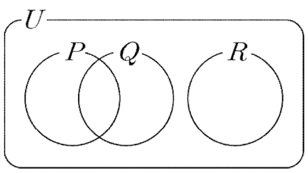
답 ④

T037 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 조건에 의하여

$P \cap R = \varnothing$, $Q \cap R = \varnothing$



① (거짓)

$P \not\subset R$이므로 $p \rightarrow r$은 거짓이다.

② (거짓)

$Q \not\subset R$이므로 $q \rightarrow r$은 거짓이다.

③ (참)

$P \subset R^C$이므로 $p \Rightarrow \sim r$이다.

④ (거짓)

$R^C \not\subset P$이므로 $\sim r \rightarrow p$은 거짓이다.

⑤ (거짓)

$R^C \not\subset Q$이므로 $\sim r \rightarrow q$은 거짓이다.

이상에서 옳은 것은 ③뿐이다.

답 ③

T038 | 답 ③

[풀이] ★

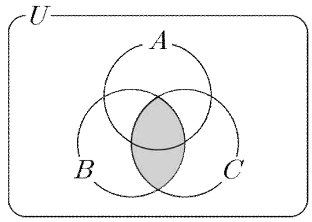
조건 (가)에서

$A \not\subset B$

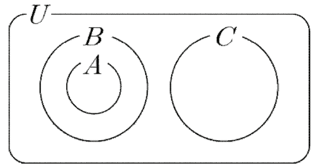
조건 (나)에서

$B \cap C = \varnothing$

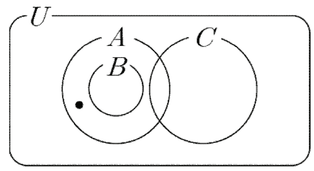
① 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



② 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

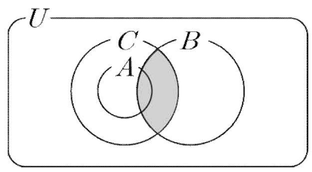


③ 두 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.

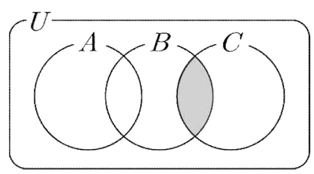


•은 조건 (가)를 만족시키는 집합 A의 원소이다.

④ 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



⑤ 조건 (나)를 만족시키지 않는다.



이상에서 문제에서 주어진 두 조건을 모두 만족시키는 것은 ③뿐이다.

답 ③

T039 | 답 ③

[풀이]

$p \Rightarrow q$에서 $P \subset Q$이고,

$\sim p \Rightarrow q$에서 $P^C \subset Q$이므로

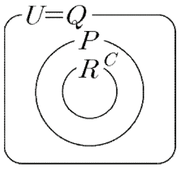
$(P \cup P^C) = U \subset Q$

그런데 $Q \subset U$이므로

집합의 상등의 정의에 의하여

$Q = U$

$\sim r \Rightarrow p$에서 $R^C \subset P$



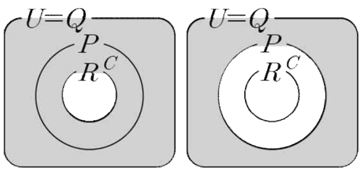
▸ ㄱ. (참)

집합 Q가 전체집합 U와 같으므로

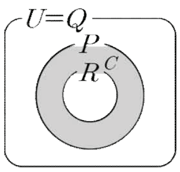
$P^C \subset Q$

▸ ㄴ. (거짓)

두 집합 R, P^C은 각각 다음과 같다.



집합 $R-P^C$은 다음과 같다.



따라서 집합 $R-P^C$이 항상 공집합인 것은 아니다.

▸ ㄷ. (참)

$R^C \subset U$, $P^C \subset U$이고,

집합 Q가 전체집합 U와 같으므로

$R^C \cup P^C \subset Q$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

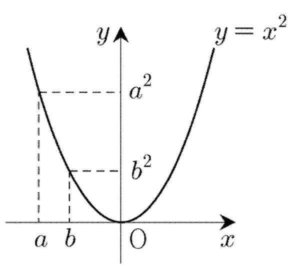
T040 | 답 ③

[풀이] ★

▸ ㄱ. (참)

아래와 같이 함수 $y=x^2$의 그래프에서

$a<b<0$이면 $a^2>b^2$임을 알 수 있다.



▸ ㄴ. (참)

제곱근의 곱셈에 의하여

$a>0$, $b>0$이면 $\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다.

그리고

$a>0$, $b=0$이면

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{a}\times 0=0=\sqrt{ab}$

$a=0$, $b>0$이면

$\sqrt{a}\sqrt{b}=0\times\sqrt{b}=0=\sqrt{ab}$

$a=0$, $b=0$이면

$\sqrt{a}\sqrt{b}=0\times 0=0=\sqrt{ab}$

따라서 $a\geq 0$, $b\geq 0$이면

$\sqrt{a}\sqrt{b}=\sqrt{ab}$이다.

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

$a=1$, $b=-3$이면

$|a|+|b|=1+3=4$, $|a+b|=2$

이므로

$|a|+|b|\geq|a+b|$

이다.

따라서 $|a|+|b|\geq|a+b|$라고 해서 항상 $a\geq 0$ 이고 $b\geq 0$인 것은 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

T041 | 답 81

[풀이]

문제에서 주어진 명제의 부정은

'모든 실수 x에 대하여 $x^2-18x+k\geq 0$이다.'

이차방정식 $x^2-18x+k=0$의 판별식을 D라고 하면

$D/4=(-9)^2-k\leq 0$

$\therefore\ k\geq 81$

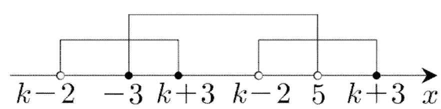
따라서 k의 최솟값은 81이다.

답 81

T042 | 답 13

[풀이]

주어진 명제가 참이라고 하면 $P\cap Q\neq\varnothing$이다.



$-3\leq k+3$, $k-2<5$

연립방정식을 풀면 $-6\leq k<7$이므로

정수 k의 개수는 $13(=6-(-6)+1)$이다.

답 13

T043

| 답 ①

[풀이]

문제에서 주어진 명제의 대우명제는 다음과 같다.

'$x-a=0$이면 $x^2-6x+5=0$이다.'

위의 명제가 참이면 문제에서 주어진 명제도 참이다.

$a^2-6a+5=0$, $(a-5)(a-1)=0$

풀면

$a=1$ 또는 $a=5$

따라서 구하는 값은 6이다.

답 ①

T044

| 답 ③

[풀이] ★

$p \Rightarrow q$이면 $P \subset Q$이고,

$\sim p \Rightarrow q$이면 $P^C \subset Q$이므로

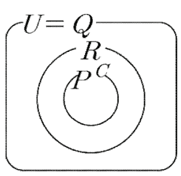
$(P \cup P^C) = U \subset Q$

그리고 $Q \subset U$이므로

집합의 상등의 정의에 의하여

$Q=U$

$\sim p \Rightarrow r$이면 $P^C \subset R$이다.



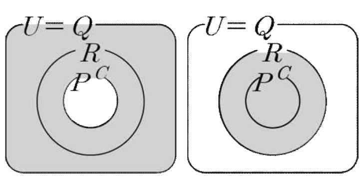
▸ ㄱ. (참)

Q가 전체집합이므로

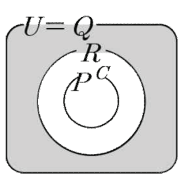
$Q-R^C=U-R^C=R$

▸ ㄴ. (거짓)

두 집합 P, R은 각각



집합 $P-R$은



따라서 집합 $P-R$이 항상 공집합인 것은 아니다.

▸ ㄷ. (참)

Q가 전체집합이므로

$Q-P=U-P=P^C \subset R$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

T045

| 답 256

[풀이]

조건 p에서 주어진 부등식을 정리하면

$x^2-2x-8 \le 0$, $(x-4)(x+2) \le 0$

풀면

$-2 \le x \le 4$

이므로

$P=\{1, 2, 3, 4\}$,

$P^C=\{5, 6, 7, 8\}$

문제에서 주어진 조건에 의하여

$P \subset Q$, $P^C \subset R$

네 수 1, 2, 3, 4는 집합 Q의 원소이고

아래의 표와 같은 경우가 가능하다.

	5	6	7	8
Q	○	○	○	×
Q^C	×	×	×	○

(단, ○는 포함된다, ×는 포함되지 않는다.)

곱의 법칙에 의하여 집합 Q의 개수는

$2^4=16$

네 수 5, 6, 7, 8은 집합 R의 원소이고

아래의 표와 같은 경우가 가능하다.

	1	2	3	4
R	○	×	○	○
R^C	×	○	×	×

(단, ○는 포함된다, ×는 포함되지 않는다.)

곱의 법칙에 의하여 집합 R의 개수는

$2^4=16$

따라서 곱의 법칙에 의하여 순서쌍 (Q, R)의 개수는

$16 \times 16 = 256$

답 256

T046

| 답 ②

[풀이]

조건 p에서 주어진 부등식을 정리하면

$(x-3)(x+2)<0$

풀면

$-2 < x < 3$ ⋯㉠

조건 q에서 주어진 부등식을 정리하면

$x^2-3(a-2)x+(2a-2)(a-4) \geq 0$

좌변을 인수분해하면

$(x-2a+2)(x-a+4) \geq 0$

풀면

$a \leq -2$일 때, $2a-2 \leq a-4 \leq -6$이므로

$x \leq 2a-2$, $x \geq a-4$ ⋯㉡

$a > -2$일 때, $-6 < a-4 < 2a-2$이므로

$x \leq a-4$, $x \geq 2a-2$ ⋯㉢

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.

• (1) $a \leq -2$인 경우

정수 전체의 집합의 부분집합 $P \cap Q$의 원소의 개수가 1이어야 하므로

㉠, ㉡에서 집합 $P \cap Q = \{-1, 0, 1, 2\}$이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

• (2) $a > -2$인 경우

정수 전체의 집합의 부분집합 $P \cap Q$의 원소의 개수가 1이어야 하므로

㉠, ㉢에서

$-1 \leq a-4 < 0$ 또는 $1 < 2a-2 \leq 2$

이면 $P \cap Q$의 원소의 개수는 1이다. 이때, 전자는 $P \cap Q = \{-1\}$이고, 후자는 $P \cap Q = \{2\}$이다.

a에 대한 두 개의 연립부등식을 각각 풀면

$3 \leq a < 4$ 또는 $\frac{3}{2} < a \leq 2$

이를 만족시키는 정수 a는 3 또는 2이다.

따라서 모든 정수 a의 값의 합은 5이다.

답 ②

T047 | 답 ②

[풀이]

문제에서 주어진 부등식을 정리하면

$x^2+4kx+3k^2-2k+3 \geq 0$

이차방정식 $x^2+4kx+3k^2-2k+3=0$의 판별식을 D라고 하면

$D/4=(2k)^2-(3k^2-2k+3)$

$=k^2+2k-3 \leq 0$

정리하면

$(k+3)(k-1) \leq 0$

풀면

$-3 \leq k \leq 1$

이므로

$M=1$, $m=-3$

$\therefore\ M-m=4$

답 ②

T048 | 답 12

[풀이]

문제에서 주어진 명제에 의하여

$3 \in P$ 또는 $6 \in P$

(1) $3 \in P$, $6 \not\in P$인 경우

집합 P의 개수는 2^2이다. 이때, 2^2는 집합 $\{1, 2\}$의 부분집합의 개수이다.

(2) $3 \not\in P$, $6 \in P$인 경우

집합 P의 개수는 2^2이다. 이때, 2^2는 집합 $\{1, 2\}$의 부분집합의 개수이다.

(3) $3 \in P$, $6 \in P$인 경우

집합 P의 개수는 2^2이다. 이때, 2^2는 집합 $\{1, 2\}$의 부분집합의 개수이다.

(1), (2), (3)에서 합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$4+4+4=12$

답 12

T049 | 답 ②

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$a=0$이면 조건 p에서 주어진 부등식은

(좌변)$=0=$(우변)

이므로 모든 실수 x에 대하여 성립하지 않는다.

$\therefore\ P=\varnothing$

▸ ㄴ. (참)

$a>0$일 때, 조건 p에서 주어진 부등식을 풀면

$1 < x < 2$

$b=0$일 때, 조건 q에서 주어진 부등식은

$x > 0$

$\therefore\ P \subset Q$

▸ ㄷ. (거짓)

$a<0$일 때, 조건 p에서 주어진 부등식은

$(x-1)(x-2) > 0$

풀면

$x < 1$, $x > 2$

$b=3$일 때, 조건 q에서 주어진 부등식은

$x > 3$

이므로 $Q \subset P$이다.

$P^C \not\subset Q$이므로 주어진 명제는 거짓이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ②

T050

| 답 ③

[풀이]

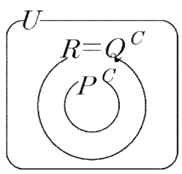
$\sim p \Rightarrow r$, $r \Rightarrow \sim q$, $\sim r \Rightarrow q$이므로

$P^C \subset R$, $R \subset Q^C$, $R^C \subset Q$

그런데 $R^C \subset Q$이면 $Q^C \subset R$이므로

집합의 상등의 정의에 의하여

$R = Q^C$

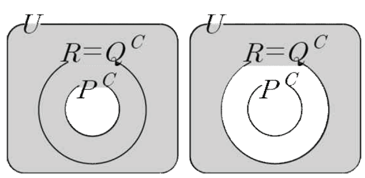


▸ ㄱ. (참)

$P^C \subset R$

▸ ㄴ. (거짓)

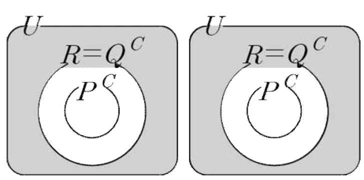
두 집합 P, Q는 각각



$Q \subset P$이지만 $P \not\subset Q$이다.

▸ ㄷ. (참)

두 집합 $P \cap Q$, R^C는 각각



$P \cap Q = R^C$이므로

$\therefore\ P \cap Q \subset R^C$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

T051

| 답 ④

[풀이]

10 이하의 4의 약수는 1, 2, 4이므로

$P = \{1,\ 2,\ 4\}$

조건 q에서 주어진 부등식을 풀면

$x \le \dfrac{17}{2} = 8.5$

$Q = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$

$P \subset X \subset Q$이므로

$1 \in X$, $2 \in X$, $4 \in X$,

$9 \not\in X$, $10 \not\in X$

	3	5	6	7	8
X	○	○	×	○	×
X^C	×	×	○	×	○

(단, ○는 포함된다, ×는 포함되지 않는다.)

예를 들어 위의 표와 같으면

$X = \{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 7\}$

따라서 집합 X의 개수는 곱의 법칙에 의하여

$2^5 = 32$

답 ④

T052

| 답 28

[풀이]

첫 번째 명제에서 주어진 부등식을 풀면

$x(x-3) < 0$에서 $0 < x < 3$이다.

3 미만의 자연수는 1, 2이므로

$A = \{1\}$ 또는 $A = \{2\}$ 또는 $A = \{1,\ 2\}$

• (1) $A = \{1\}$인 경우

집합 B는 1을 원소로 가져야 한다.

전체집합 U의 부분집합인 집합 B의 원소의 개수는 2^3이다.

이때, 2^3은 집합 $\{2,\ 3,\ 4\}$의 부분집합의 개수이다.

• (2) $A = \{2\}$인 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로

전체집합 U의 부분집합인 집합 B의 원소의 개수는 2^3이다.

• (3) $A = \{1,\ 2\}$인 경우

다음과 같은 세 경우를 생각할 수 있다.

집합 B는 1을 원소로 갖고, 2를 원소로 갖지 않는다.

전체집합 U의 부분집합인 집합 B의 원소의 개수는 2^2이다.

이때, 2^2은 집합 $\{3,\ 4\}$의 부분집합의 개수이다.

집합 B는 2를 원소로 갖고, 1을 원소로 갖지 않는다.

전체집합 U의 부분집합인 집합 B의 원소의 개수는 2^2이다.

이때, 2^2은 집합 $\{3,\ 4\}$의 부분집합의 개수이다.

집합 B는 1과 2를 모두 원소로 갖는다.

전체집합 U의 부분집합인 집합 B의 원소의 개수는 2^2이다.

이때, 2^2은 집합 $\{3,\ 4\}$의 부분집합의 개수이다.

(1), (2), (3)에서 모든 순서쌍 $(A,\ B)$의 개수는

$2^3 + 2^3 + 3 \times 2^2 = 28$

답 28

T053 | 답 ③

[풀이]

이차방정식

$ax^2-bx+c=0$ $\cdots(*)$

의 판별식을 D라고 하자.

$D=b^2-4ac\le 0$일 때,

모든 실수 x에 대하여

$ax^2-bx+c\ge 0$이고,

$cx^2-bx+a\ge 0$

$\left(\Leftrightarrow \dfrac{a}{x^2}-\dfrac{b}{x}+c\ge 0\right)$

이므로 $P=\varnothing$, $Q=\varnothing$이다.

$D=b^2-4ac>0$일 때, 이차방정식 (*)의 서로 다른 두 실근을 α, β라고 하자. (단, $\alpha<\beta$)

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$\alpha+\beta=\dfrac{b}{a}>0$, $\alpha\beta=\dfrac{c}{a}>0$

이므로 α, β는 모두 양수이다.

$P=\{x\,|\,\alpha<x<\beta\}$

이차방정식

$cx^2-bx+a=0$

$\left(\Leftrightarrow \dfrac{a}{x^2}-\dfrac{b}{x}+c=0\right)$

은 서로 다른 두 실근 $\dfrac{1}{\alpha}(>0)$, $\dfrac{1}{\beta}(>0)$을 갖는다.

이때, $0<\dfrac{1}{\beta}<\dfrac{1}{\alpha}$이다.

$Q=\left\{x\,\middle|\,\dfrac{1}{\beta}<x<\dfrac{1}{\alpha}\right\}$

한편 실수 t에 대하여

$t^2\ge 0$ (단, 등호는 $t=0$일 때 성립한다.)

이므로 부등식

$(x-1)^2\le 0 \Leftrightarrow x-1=0$

풀면 $x=1$이므로

$R=\{1\}$

이제 두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$의 방정식이 다음과 같다고 하자.

$f(x)=ax^2-bx+c\,(a>0)$,

$g(x)=cx^2-bx+a\,(c>0)$

▸ ㄱ. (참)

$R\subset P$이므로 $1\in P$이다.

$x=1$을 조건 p에서 주어진 부등식에 대입하면

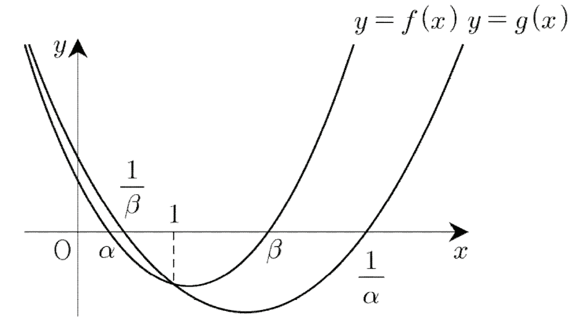
$a-b+c<0$

$x=1$을 조건 q에서 주어진 부등식에 대입하면

$a-b+c<0$

$1\in Q$이므로 $R\subset Q$이다.

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



▸ ㄴ. (거짓)

보기 ㄴ에서 주어진 명제의 대우명제는 다음과 같다.

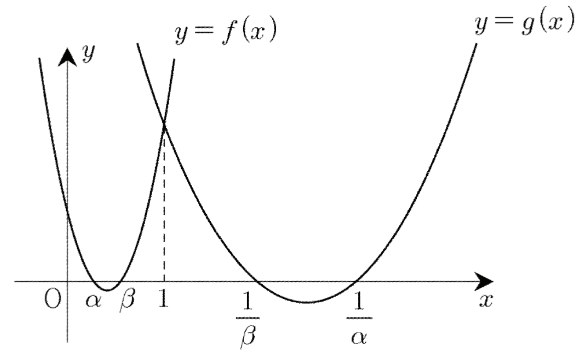
'$R\not\subset P$ 이고 $R\not\subset Q$이면 $P\cap Q\ne\varnothing$이다.'

$\Leftrightarrow$

'$1\notin P$ 이고 $1\notin Q$이면 $P\cap Q\ne\varnothing$이다.'

$0<\alpha<\beta<1$이면 $1<\dfrac{1}{\beta}<\dfrac{1}{\alpha}$이고,

두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



$1\notin P$ 이고 $1\notin Q$이지만 $P\cap Q=\varnothing$이다.

보기 ㄴ에서 주어진 대우명제가 거짓이므로

보기 ㄴ에서 주어진 명제는 거짓이다.

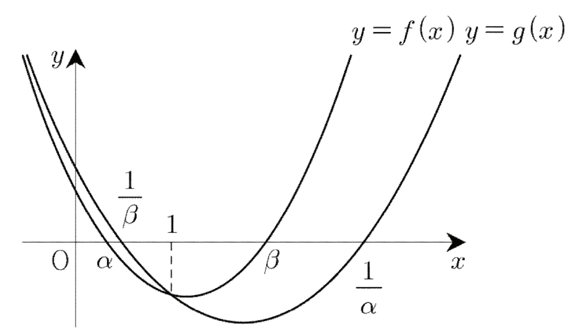
▸ ㄷ. (참)

$P\cap Q\ne\varnothing$이므로 $0<\alpha<1<\beta$이어야 한다.

$0<\alpha<1<\beta$일 때,

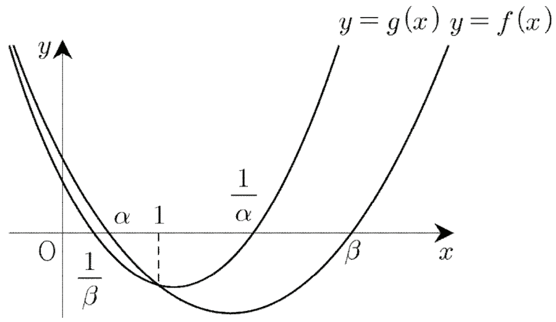
두 이차함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는 다음과 같다.

▸ (경우1)



$P\cap Q=\left\{x \,\middle|\, \frac{1}{\beta}< x < \beta\right\}$이므로 $1\in P\cap Q$

▸ (경우2)



$P\cap Q=\left\{x \,\middle|\, \alpha < x < \frac{1}{\alpha}\right\}$이므로 $1\in P\cap Q$

위의 두 경우에 대하여

$R\subset P\cap Q$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

T054 | 답 ②

[풀이]

조건 p에서 주어진 이차부등식의 좌변을 정리하면

$(x-4)(x+2)<0$

풀면

$-2<x<4$

$p\Longrightarrow q$이므로 $P\subset Q$이다.

$\therefore\ a\le -2$

답 ②

T055 | 답 ④

[풀이]

조건 p에서 주어진 부등식을 다시 쓰자.

$x\ge 2$일 때,

$3x-6<9-2x$에서 $2\le x<3$

$x<2$일 때,

$6-3x<9-2x$에서 $-3<x<2$

정리하면

$-3<x<3$

p가 q이기 위한 필요충분조건이기 위해서는

$a=-3$, $b=3$

$\therefore\ b-a=6$

답 ④

T056 | 답 ③

[풀이]

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.

문제에서 주어진 조건에 의하여

$p\Longleftrightarrow q$이므로 $P=Q$이다.

방정식 $x^2+ax+b=0$의 서로 다른 두 실근이 각각 -1, 2이어야 한다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

$-1+2=-a$, $-1\times 2=b$

풀면

$a=-1$, $b=-2$

$\therefore\ a+b=-3$

답 ③

T057 | 답 17

[풀이]

문제에서 주어진 조건에 의하여

$R\subset P\subset Q$

조건 q에서 주어진 부등식을 풀면

$n\ge 3.5$이므로 $n\ge 4$

조건 r에서 주어진 부등식을 풀면

$(n-20)(n+1)\ge 0$

$n+1$은 양수이므로 $n\ge 20$

$P=\{k,\ k+1,\ \cdots\}$

$Q=\{4,\ 5,\ \cdots\}$

$R=\{20,\ 21,\ \cdots\}$

k의 범위는

$4\le k\le 20$

따라서 자연수 k의 개수는 17이다.

답 17

T058 | 답 ⑤

[풀이] ★

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.

▸ ㄱ. (참)

두 실수 a, b에 대하여

$a^2\ge 0$ (단, 등호는 $a=0$일 때 성립한다.)

$b^2\ge 0$ (단, 등호는 $b=0$일 때 성립한다.)

변변히 더하면

$a^2+b^2\ge 0$ (단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립한다.)

이므로

$a^2+b^2=0$이면 $a=b=0$이다.

$P=\{(a,\ b)|a=b=0\}$

$Q=\{(a,\ b)|a=b\}$

$P\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

▸ ㄴ. (참)

부등식 $ab<0$을 풀면

p: $a>0$, $b<0$ 또는 $a<0$, $b>0$

조건 q는

q: $a>0$, $b<0$ 또는 $a<0$, $b>0$ 또는 $a<0$, $b<0$

$P\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

▸ ㄷ. (참)

조건 p에서 주어진 방정식을 풀자.

$a^3-b^3=0$

$\Leftrightarrow$

$(a-b)(a^2+ab+b^2)=0$

$\Leftrightarrow$

$a=b$ 이고 $a^2+ab+b^2=0$

$\Leftrightarrow$

$a=b$

($\because$ 방정식

$$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2=0$$

을 풀면 $a=b=0$이다.)

조건 q에서 주어진 방정식을 풀자.

$a^2-b^2=0$

$\Leftrightarrow$

$(a-b)(a+b)=0$

$\Leftrightarrow$

$a=b$ 또는 $a=-b$

$P\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

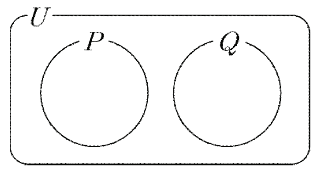
답 ⑤

T059 | 답 ④

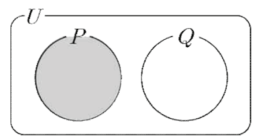
[풀이]

$P\cap Q=\varnothing$이고 $P\cup Q\neq U$이므로

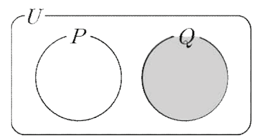
두 집합 P, Q를 벤다이어그램으로 나타내면 다음과 같다.



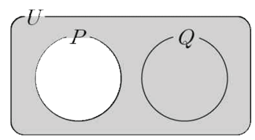
(단, $P\neq\varnothing$, $Q\neq\varnothing$, $(P\cup Q)^C\neq\varnothing$)



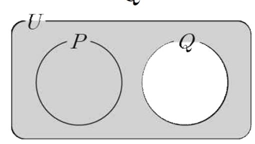
P



Q



P^C



Q^C

① (거짓)

$P\not\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이 아니다.

② (거짓)

$P^C\not\subset Q$이므로 $\sim p$는 q이기 위한 충분조건이 아니다.

③ (거짓)

$Q\not\subset P$이므로 q는 p이기 위한 충분조건이 아니다.

④ (참)

$Q\subset P^C$이므로 q는 $\sim p$이기 위한 충분조건이다.

⑤ (거짓)

$P^C\not\subset Q^C$이므로 $\sim p$는 $\sim q$이기 위한 충분조건이 아니다.

이상에서 항상 옳은 것은 ④이다.

답 ④

T060 | 답 ⑤

[풀이]

$p\Longrightarrow q$이므로 $P\subset Q$이고,

$p\Longrightarrow r$이므로 $P\subset R$이다.

(1) $a^2-1=3$인 경우

이차방정식을 풀면

$a=2$ 또는 $a=-2$

$a=2$이면

$Q=\{3,\ b\}$, $R=\{2,\ 2b\}$

이므로 $2b=3$에서 $b=\frac{3}{2}$이다.

이때, $a+b=\frac{7}{2}$이다.

두 집합 Q, R은

$Q=\left\{3,\ \frac{3}{2}\right\}$, $R=\{2,\ 3\}$

$a=-2$이면

$Q=\{3,\ b\}$, $R=\{-2,\ -2b\}$

이므로 $-2b=3$에서 $b=-\dfrac{3}{2}$이다.

두 집합 Q, R은

$Q=\left\{3,\ -\dfrac{3}{2}\right\}$, $R=\{-2,\ 3\}$

이때, $a+b=-\dfrac{7}{2}$이다.

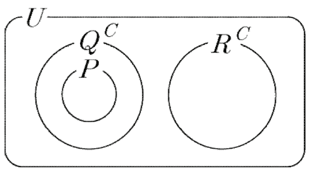
(2) $b=3$인 경우
두 집합 Q, R은
$Q=\{a^2-1,\ 3\}$, $R=\{a,\ 3a\}$
$a=3$이면 두 집합 Q, R은
$Q=\{8,\ 3\}$, $R=\{3,\ 9\}$
이때, $a+b=6$이다.
$3a=3(a=1)$이면 두 집합 Q, R은
$Q=\{0,\ 3\}$, $R=\{1,\ 3\}$
이때, $a+b=4$이다.

(1), (2)에서 $a+b$의 최솟값은 $-\dfrac{7}{2}$이다.

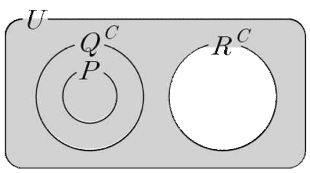
답 ⑤

T061 | 답 ④

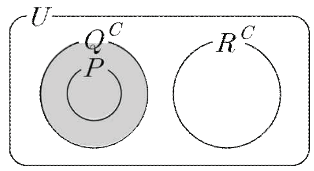
[풀이]
문제에서 주어진 조건에 의하여
$P\subset Q^C$, $R^C\subset Q$



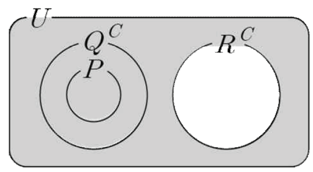
① (참)
$P\subset Q^C$
② (참)
집합 R은 다음과 같다.

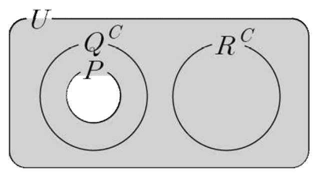


$P\subset R$
③ (참)
집합 $R\cap Q^C$은 다음과 같다.

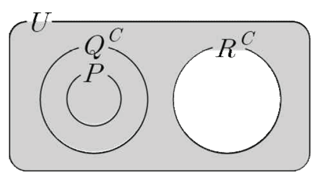


$P\subset (R\cap Q^C)$
④ (거짓)
두 집합 R, P^C은 다음과 같다.





$R\not\subset P^C$
⑤ (참)
집합 R은 다음과 같다.



$Q^C\subset R$
따라서 옳지 않은 것은 ④뿐이다.

답 ④

T062 | 답 ⑤

[풀이]
세 조건 p, q, r의 진리집합을 각각 P, Q, R이라고 하자.
조건 p에서 주어진 방정식을 풀자.
모든 실수 a, b에 대하여
$|a|\ge 0$, $|b|\ge 0$
(단, 등호는 $a=0$(왼쪽), $b=0$(오른쪽)일 때 성립한다.)
두 식을 변변히 더하면
$|a|+|b|\ge 0$
(단, 등호는 $a=b=0$일 때 성립한다.)
따라서 $|a|+|b|=0$이면 $a=b=0$이다.
$\therefore\ P=\{(a,\ b)\,|\,a=b=0\}$
조건 q에서 주어진 방정식을 풀자.
$a-b$가 실수이므로
$(a-b)^2=0 \Leftrightarrow a=b$
$\therefore\ Q=\{(a,\ b)\,|\,a=b\}$

집합 Q는 다음의 두 집합의 합집합이다.

$Q=\{(a,\ b)|a=b=0\}$

$\cup\{(a,\ b)|a=b\neq 0\}$

조건 r에서 주어진 방정식을 풀자.

$a+b=a-b$ 또는 $a+b=b-a$

$(\because |x|=|y| \Leftrightarrow x=\pm y)$

정리하면

$b=0$ 또는 $a=0$

$\therefore\ R=\{(a,\ b)|a=0$ 또는 $b=0\}$

집합 R은 다음의 세 집합의 합집합이다.

$R=\{(a,\ b)|a=0,\ b\neq 0\}$

$\cup\{(a,\ b)|a\neq 0,\ b=0\}$

$\cup\{(a,\ b)|a=0,\ b=0\}$

▸ ㄱ. (참)

$P\subset Q$이므로 $p\Rightarrow q$이다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

▸ ㄴ. (참)

$P\subset R$이므로 $p\Rightarrow r$이다.

이 명제의 대우명제

$\sim r\Rightarrow\sim p\ (R^C\subset P^C)$

는 참이다.

따라서 $\sim p$는 $\sim r$이기 위한 필요조건이다.

▸ ㄷ. (참)

$Q\cap R=P$이므로

q이고 r은 p이기 위한 필요충분조건이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

T063 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

우선 $p\Rightarrow q$임을 보이자.

$ab>0 \Leftrightarrow a>0,\ b>0$ 또는 $a<0,\ b<0$

$a>0,\ b>0$이면

$|a+b|=a+b,\ |a|=a,\ |b|=b$

이므로

$|a+b|=|a|+|b|$

$a<0,\ b<0$이면

$|a+b|=-a-b,\ |a|=-a,\ |b|=-b$

이므로

$|a+b|=|a|+|b|$

따라서 $p\Rightarrow q$이다.

이제 $q\rightarrow p$가 거짓임을 보이자.

(반례)

$a=0$이면

$|a+b|=b,\ |a|=0,\ |b|=b$

이므로

$|a+b|=|a|+|b|$

이다. 하지만 $ab=0$이다.

따라서 $q\rightarrow p$는 거짓이다.

▸ ㄴ. (참)

우선 $p\Rightarrow q$임을 보이자.

아래의 명제는 참이다.

'$a<1$이고, $b<1$이면 $a+b<2$이다.'

위의 명제의 대우명제는 참이다.

'$a+b\geq 2$이면 $a\geq 1$ 또는 $b\geq 1$이다.'

이제 $q\rightarrow p$가 거짓임을 보이자.

(반례) $a=2,\ b=-3$이면

$a+b=-1<2$이다.

▸ ㄷ. (거짓)

조건 p에서 주어진 등식을 풀어쓰면

$a+b=a-b$ 또는 $a+b=-a+b$

$(\because\ |x|=|y| \Leftrightarrow x=\pm y)$

정리하면

$b=0$ 또는 $a=0$

조건 q에서 주어진 부등식을 풀자.

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2\leq 0 \qquad \cdots ㉠$$

그런데

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2\geq 0,\ \left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2\geq 0$$

이므로

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2\geq 0 \qquad \cdots ㉡$$

㉠, ㉡이 모두 성립해야 하므로

$$\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}b\right)^2=0$$

$\Leftrightarrow$

$$a+\frac{b}{2}=0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}b=0$$

$\Leftrightarrow$

$a=b=0$

$p\rightarrow q$는 거짓이지만, $q\Rightarrow p$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

T064 | 답 ③

[풀이]

▸ ㄱ. (거짓)

(반례)

세 집합 U, A, B가 다음과 같다고 하자.

$U=\{1, 2, 3\}$,

$A=\{1\}$, $B=\{2, 3\}$

$n(A)=1$, $n(B)=2$이므로

$n(A)\le n(B)$이지만 $A\not\subset B$이다.

따라서 $p\to q$는 거짓이다.

▸ ㄴ. (거짓)

세 집합 U, A, B가 다음과 같다고 하자.

$U=\{1, 2, 3\}$,

$A=\{1\}$, $B=\{1, 2\}$

$A-B=\varnothing$ 이므로 $n(A-B)=0$이지만

$n(A)=1\ne 2=n(B)$이다.

따라서 $p\to q$는 거짓이다.

▸ ㄷ. (참)

$p\to q$가 참임을 증명하자.

$A=B^C$이면 $A\cup B=B^C\cup B=U$

이므로 $p\Rightarrow q$이다.

$q\to p$가 거짓임을 반례를 이용하여 증명하자.

(반례)

세 집합 U, A, B가 다음과 같다고 하자.

$U=\{1, 2, 3\}$,

$A=\{1, 2\}$, $B=\{2, 3\}$

$A\cup B=U$이지만 $A\ne B^C$이다.

따라서 p는 q이기 위한 충분조건이다.

이상에서 옳은 것은 ㄷ이다.

답 ③

T065 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 조건에 의하여

$x\ne 0$, $y\ne 0$, $z\ne 0$

▸ ㄱ. (필요충분조건이다.)

조건 p에서 주어진 등식의 양변을 $xy(\ne 0)$으로 나누면

$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1$

즉, 조건 q에서 주어진 등식이 유도된다.

(또는 조건 q에서 주어진 등식에서 조건 p에서 주어진 등식을 유도해도 좋다.)

$\therefore\ p\Leftrightarrow q$

▸ ㄴ. (필요충분조건이다.)

조건 p에서 주어진 부등식의 각 변을 $xy(\ne 0)$으로 나누면

$0<\frac{1}{y}<\frac{1}{x}$

즉, 조건 q에서 주어진 부등식이 유도된다.

(또는 조건 q에서 주어진 부등식에서 조건 p에서 주어진 부등식을 유도해도 좋다.)

$\therefore\ p\Leftrightarrow q$

▸ ㄷ. (필요충분조건이 아니다.)

조건 p에서 주어진 등식을 정리하면

$x=y$ 또는 $y=z$ 또는 $z=x$

이므로 $q\Rightarrow p$이지만, $p\to q$는 거짓이다.

이상에서 필요충분조건인 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

T066 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 조건에서

$p\Rightarrow q$이지만, $q\to p$는 거짓이다.

즉, $P\subset Q$, $Q\not\subset P$

▸ ㄱ. (참)

조건 q에서 주어진 방정식을 풀자.

$x+y=x-y$ 또는 $x+y=-(x-y)$

정리하면

$y=0$ 또는 $x=0$

즉, 조건 q는

$x=0$, $y=0$ 또는 $x\ne 0$, $y=0$

또는 $x=0$, $y\ne 0$

이므로 $p\Rightarrow q$, $q\to p$(거짓)이다.

▸ ㄴ. (참)

q에서 주어진 부등식을 풀자.

$x=y$라고 가정하면

$(x-y)(y-z)(z-x)=0$이므로

이는 가정에 모순이다.

따라서 $x\ne y$이다.

마찬가지의 방법으로

$y\ne z$, $z\ne x$이다.

$x>y$라고 하면 $x-y>0$이므로

$(y-z)(z-x)<0$

풀면

$z<y<x$ 또는 $y<x<z$

$x<y$라고 하면 $x-y<0$이므로

$(y-z)(z-x)>0$

풀면

$x < z < y$
즉, 조건 q는
$z < y < x$ 또는 $y < x < z$
또는 $x < z < y$
이므로 $p \Rightarrow q$, $q \rightarrow p$(거짓)이다.

▸ ㄷ. (거짓)
조건 q에서 주어진 부등식을 풀자.
$x = 0$이면
(좌변)$= |y| =$(우변)
이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.
$y = 0$이면
(좌변)$= |x| =$(우변)
이므로 주어진 부등식은 성립하지 않는다.
따라서 $x \neq 0$, $y \neq 0$이다.
(1) $x + y = 0$(단, $x \neq 0$, $y \neq 0$)인 경우
(좌변)$= 2|x| > 0 =$(우변)
이므로 주어진 부등식은 성립한다.
$xy = -x^2 < 0$이다.
(2) $x + y \neq 0$(단, $x \neq 0$, $y \neq 0$)인 경우
$|x| + |y| > 0$, $|x + y| > 0$이므로
$|x| + |y| > |x + y|$
$\Leftrightarrow$
$(|x| + |y|)^2 - |x + y|^2 > 0$
좌변을 전개하면
$x^2 + 2|xy| + y^2 - x^2 - 2xy - y^2 > 0$
정리하면
$|xy| > xy$
$\Leftrightarrow$
$xy < 0$
($\because$ 만약 xy가 양수이면 $|xy| = xy$이다.)
(1), (2)에서 $xy < 0$이다.
따라서 $p \Leftrightarrow q$이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.
답 ③

T067 | 답 ②

[풀이] ★
두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라고 하자.
$Q \subset P$이고 $P \not\subset Q$이면 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.
이를 만족시키는 보기를 찾으면 된다.

▸ ㄱ. (만족×)
조건 q에서 주어진 부등식을 풀면 $a \neq 0$이다. (즉, 0을 제외한 모든 실수이다.)
왜냐하면 0이 아닌 모든 실수 x에 대하여 $x^2 > 0$이고, $0^2 = 0$이기 때문이다.
$P = \{a | a > 0\}$, $Q = \{a | a > 0$ 또는 $a < 0\}$
$P \subset Q$이고 $Q \not\subset P$이므로 p는 q이기 위한 충분조건이지만 필요조건은 아니다.

▸ ㄴ. (만족○)
조건 p에서 주어진 방정식을 풀자.
$(a - b)c = 0$에서 $a = b$ 또는 $c = 0$이다.
$Q \subset P$이고 $P \not\subset Q$이므로 p는 q이기 위한 필요조건이지만 충분조건은 아니다.

▸ ㄷ. (만족×)
조건 q에서 주어진 부등식을 풀자.
실수 a, b에 대하여
$a^2 \geq 0$, $b^2 \geq 0$
(단, 왼쪽 등호는 $a = 0$일 때 성립하고,
오른쪽 등호는 $b = 0$일 때 성립한다.)

a^2	b^2	$a^2 + b^2$
양수 ($a \neq 0$)	양수 ($b \neq 0$)	양수
양수 ($a \neq 0$)	0 ($b = 0$)	양수
0 ($a = 0$)	양수 ($b \neq 0$)	양수
0 ($a = 0$)	0 ($b = 0$)	0 ($a = 0$ & $b = 0$)

위의 표에서 다음이 성립함을 알 수 있다.
$Q^C = \{a | a = 0\} \cap \{b | b = 0\}$
드모르간의 법칙에 의하여
$Q = \{a | a \neq 0\} \cup \{b | b \neq 0\}$
$P = Q$이므로 p는 q이기 위한 필요충분조건이다.
이상에서 문제에서 주어진 조건을 만족시키는 보기는 ㄴ뿐이다.
답 ②

T068 | 답 ②

[풀이]
〈증명〉
$abc > 0$이므로 a, b, c 중 어느 것도 0이 아닌다.
이제 $a < 0$이라고 가정하자.
$0 < abc = a(bc)$이므로
$bc \boxed{<} 0$ ⋯㉠
한편, 조건에 의하면 $ab + bc + ca > 0$이므로
$(0 <) - bc < ab + ca$ ⋯㉡

㉠, ㉡에 의하여 $ab+ca\boxed{>}0$이므로

$a(b+c)>0$ 양변을 음수 a로 나누면

$\therefore\ b+c\boxed{<}0$

두 수 a, $b+c$는 모두 음수이므로

$\therefore\ a+b+c<0$

그런데, 이는 조건 $a+b+c>0$에 모순이다.

$\therefore\ a>0$(←귀류법)

마찬가지 방법으로 $b>0$, $c>0$임을 알 수 있다.

따라서 a, b, c는 모두 양수이다.

이상에서

(가): $<$, (나): $>$, (다): $<$

답 ②

T069 | 답 ④

[풀이]

(증명)

$-|a|\le a\le|a|$이고 $-|b|\le b\le|b|$이므로

각 변을 변변히 더하면

$-(|a|+|b|)\le a+b\le|a|+|b|$

$|a+b|\le||a|+|b||=|a|+|b|$

$|a+b|\le\boxed{|a|+|b|}$ …㉠

㉠을 이용하면 $|a|\le|a+b|+\boxed{|b|}$이므로

($\because$ ㉠: a, b의 자리에 각각 $a+b$, $-b$를 대입)

$|a|-\boxed{|b|}\le|a+b|$이다.

같은 방법으로 하면 $\boxed{|b|}-|a|\le|a+b|$

$\therefore\ \boxed{||a|-|b||}\le|a+b|$ …㉡

㉠과 ㉡에 의해

$\boxed{||a|-|b||}\le|a+b|\le\boxed{|a|+|b|}$

가 성립한다.

답 ④

T070 | 답 ⑤

[풀이]

〈증명〉

$|ap+bq|^2-(\sqrt{a^2p+b^2q})^2$

$=a^2p(p-1)+b^2q\boxed{(q-1)}+2abpq$

$=a^2p(p-1)+b^2(1-p)(-p)+2abp(1-p)$

($\because q(q-1)=(1-p)(-p)$, $q=1-p$)

$=(a^2-2ab+b^2)p(p-1)$

$=\boxed{(a-b)^2}p(p-1)$

$p\ge0$, $q\ge0$, $p+q=1$이므로

$p(p-1)\boxed{\le}0$이다.

($\because 0\le q=1-p$에서 $p-1\le0$)

따라서

$|ap+bq|^2-(\sqrt{a^2p+b^2q})^2\le0$

그러므로

$|ap+bq|\le\sqrt{a^2p+b^2q}$

이다.

(가): $q-1$

(나): $(a-b)^2$

(다): $\le$

답 ⑤

T071 | 답 ⑤

[풀이]

〈학생 풀이〉

산술평균과 기하평균의 대소 관계를 적용하면

$a+\dfrac{1}{b}\ge2\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ …㉠

$b+\dfrac{4}{a}\ge2\sqrt{\dfrac{4b}{a}}$ …㉡

㉠, ㉡의 양변을 각각 곱하면

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)\ge4\sqrt{\dfrac{a}{b}\cdot\dfrac{4b}{a}}=8$ …㉢

그러므로 구하는 최솟값은 8이다.

〈첨삭 내용〉

㉠의 등호가 성립할 때는 $\boxed{ab=1}$이고,

($ab=1$은 $a=\dfrac{1}{b}$에서 유도된 것이다.)

㉡의 등호가 성립할 때는 $\boxed{ab=4}$이다.

($ab=4$은 $b=\dfrac{4}{a}$에서 유도된 것이다.)

따라서 (가)와 (나)를 동시에 만족하는 양수 a, b는 존재하지 않으므로 최솟값은 8이 될 수 없다.

($\because ab$가 1인 동시에 4일 수 없다.)

(가) $ab=1$, (나) $ab=4$

이제 최솟값을 구해보자.

$\left(a+\dfrac{1}{b}\right)\left(b+\dfrac{4}{a}\right)$

$=ab+\dfrac{4}{ab}+5$

$\ge2\sqrt{ab\times\dfrac{4}{ab}}+5$

$=9$

(단, 등호는 $ab=2$일 때 성립한다.)

답 ⑤

T072 | 답 ⑤

[풀이]

문제에서 주어진 조건에 의하여

$a \geq 0,\ b \geq 0$

▸ ㄱ. (참)

$a=0,\ b=0$인 경우

(좌변)$=0=$(우변)

$a=0,\ b\neq 0$인 경우

(좌변)$=-\sqrt{b}<\sqrt{b}=$(우변)

$a\neq 0,\ b=0$인 경우

(좌변)$=\sqrt{a}=$(우변)

$a\neq 0,\ b\neq 0$인 경우

(즉, $a>0,\ b>0$)

$\sqrt{a}>0,\ \sqrt{b}>0,\ \sqrt{a+b}>0$

$(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a})^2$

$=2b+2\sqrt{ab+b^2}>0$

이므로

$(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a})^2$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{a+b}+\sqrt{b}>\sqrt{a}$

즉, $\sqrt{a}-\sqrt{b}<\sqrt{a+b}$

$\therefore\ \sqrt{a}-\sqrt{b}\leq\sqrt{a+b}$

(단, 등호는 $b=0$일 때 성립한다.)

▸ ㄴ. (참)

$a=0,\ b=0$인 경우

(좌변)$=0=$(우변)

$a=0,\ b\neq 0$인 경우

(좌변)$=\sqrt{b}=$(우변)

$a\neq 0,\ b=0$인 경우

(좌변)$=\sqrt{a}=$(우변)

$a\neq 0,\ b\neq 0$인 경우

$\sqrt{a}>0,\ \sqrt{b}>0,\ \sqrt{a+b}>0$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2$

$=2\sqrt{ab}>0$

이므로

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

$\therefore\ \sqrt{a+b}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

(단, 등호는 $a=0$ 또는 $b=0$일 때 성립한다.)

▸ ㄷ. (참)

$a=0,\ b=0$인 경우

(좌변)$=0=$(우변)

$a=0,\ b\neq 0$인 경우

(좌변)$=\sqrt{b}<\sqrt{2b}=$(우변)

$a\neq 0,\ b=0$인 경우

(좌변)$=\sqrt{a}<\sqrt{2a}=$(우변)

$a\neq 0,\ b\neq 0$인 경우

$\sqrt{a}>0,\ \sqrt{b}>0,\ \sqrt{2(a+b)}>0$

$(\sqrt{2(a+b)})^2-(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$=(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\geq 0$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

이므로

$(\sqrt{2(a+b)})^2\geq(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{2(a+b)}\geq\sqrt{a}+\sqrt{b}$

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b}\leq\sqrt{2(a+b)}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

T073 | 답 ⑤

[풀이]

▸ ㄱ. (참)

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}-\frac{4}{a+b}=\frac{(a-b)^2}{ab(a+b)}\geq 0$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

$\therefore\ \frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq\frac{4}{a+b}$

(단, 등호는 $a=b$일 때 성립한다.)

▸ ㄴ. (참)

$\sqrt{a}>0,\ \sqrt{b}>0,\ \sqrt{a+b}>0$

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2-(\sqrt{a+b})^2$

$=2\sqrt{ab}>0$

이므로

$(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2>(\sqrt{a+b})^2$

$\Leftrightarrow\ \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

$\therefore\ \sqrt{a}+\sqrt{b}>\sqrt{a+b}$

▸ ㄷ. (참)

$\sqrt{a}=A,\ \sqrt{b}=B,\ \sqrt{c}=C$로 두자.

이때, $A,\ B,\ C$는 모두 양수이다.

$a+b+c-\sqrt{ab}-\sqrt{bc}-\sqrt{ca}$

$=A^2+B^2+C^2-AB-BC-CA$

$=\frac{1}{2}\{(A-B)^2+(B-C)^2+(C-A)^2\}$

≥ 0

(단, 등호는 $A=B=C(a=b=c)$ 일 때 성립한다.)

$\therefore\ a+b+c \geq \sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ca}$

(단, 등호는 $a=b=c$일 때 성립한다.)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

T074 | 답 ③

[풀이]

〈증명〉

$b+c=x,\ c+a=y,\ a+b=z$라 하면,

$a+b+c=\boxed{\frac{1}{2}}(x+y+z)$이므로

$a=\frac{y+z-x}{2},\ b=\frac{z+x-y}{2},$

$c=\frac{x+y-z}{2}$이다.

그러므로

$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}$

$=\frac{1}{2}\left(\frac{y}{x}+\frac{z}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{y}+\frac{x}{z}+\frac{y}{z}\right)+\boxed{-\frac{3}{2}}$

$\geq \boxed{1}\left(\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}\right.$

$\left.+\sqrt{\frac{x}{z}\cdot\frac{z}{x}}\right)+\boxed{-\frac{3}{2}}$

($\because$ 산술기하절대부등식)

$=\frac{3}{2}$

따라서 세 양수 $a,\ b,\ c$에 대하여 주어진 부등식이 성립한다.

(가): $\frac{1}{2}$, (나): $-\frac{3}{2}$, (다): 1

답 ③

T075 | 답 ④

[풀이] ★

$a^2-6a+\frac{a}{b}+\frac{9b}{a}$

$=(a-3)^2-9+\frac{a}{b}+\frac{9b}{a}$

$\geq 0-9+2\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{9b}{a}}$

(단, 등호는 $a=3,\ a^2=9b^2(b=1)$일 때 성립한다.)

$=-3$

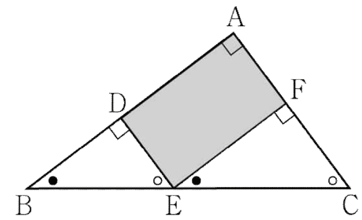
$\therefore\ m+n=4$

답 ④

T076 | 답 ⑤

[풀이]

[그림1]에서 주어진 직사각형의 네 꼭짓점을 A, D, E, F, $\overline{\mathrm{AD}}=x,\ \overline{\mathrm{AF}}=y$라고 하자.



아래의 세 삼각형은 서로 닮음이다.

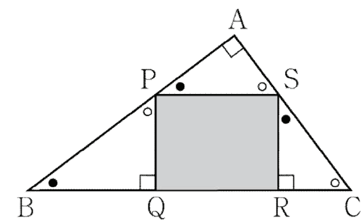
$\triangle \mathrm{ABC} \sim \triangle \mathrm{DBE} \sim \triangle \mathrm{FEC}$

$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{AC}}$ 즉, $(8-x):y=4:3$

정리하면

$3x+4y=24$(단, $x>0,\ y>0$) …㉠

[그림2]에서 주어진 직사각형의 네 꼭짓점을 P, Q, R, S, $\overline{\mathrm{PQ}}=z,\ \overline{\mathrm{PS}}=w$라고 하자.



아래의 네 삼각형은 서로 닮음이다.

$\triangle \mathrm{BAC} \sim \triangle \mathrm{BQP} \sim \triangle \mathrm{PAS} \sim \triangle \mathrm{SRC}$

직각삼각형 ABC에서 피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{\mathrm{BC}}=10$

$\overline{\mathrm{BQ}}:\overline{\mathrm{QP}}=\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{AC}}$ 즉, $\overline{\mathrm{BQ}}:z=4:3$

$\overline{\mathrm{BQ}}=\frac{4}{3}z$

$\overline{\mathrm{RC}}=\overline{\mathrm{BC}}-\overline{\mathrm{BQ}}-\overline{\mathrm{QR}}$

$=10-\frac{4}{3}z-w$

$\overline{\mathrm{SR}}:\overline{\mathrm{RC}}=\overline{\mathrm{BA}}:\overline{\mathrm{AC}}$

즉, $z:\left(10-\frac{4}{3}z-w\right)=4:3$

정리하면

$25z+12w=120$(단, $z>0,\ w>0$) …㉡

▸ ㄱ. (참)

㉠에 산술기하절대부등식을 적용하면

$24 = 3x + 4y \geq 2\sqrt{12xy} = 2\sqrt{12S_1}$

(단, 등호는 $3x = 4y = 12$

($x = 4$, $y = 3$)일 때 성립한다.)

정리하면

$S_1 \leq 12$

(단, 등호는 $x = 4$, $y = 3$일 때 성립한다.)

따라서 S_1의 최댓값은 12이다.

▸ ㄴ. (참)

S_1이 최대일 때, $x = 4$, $y = 3$이므로

직사각형의 둘레의 길이는 14이다.

▸ ㄷ. (참)

㉡에서 산술기하절대부등식을 적용하면

$120 = 25z + 12w \geq 2\sqrt{25 \times 12 \times zw}$

$= 20\sqrt{3S_2}$

(단, 등호는 $25z = 12w = 60$

($z = \frac{12}{5}$, $w = 5$)일 때 성립한다.)

정리하면

$S_2 \leq 12$

(단, 등호는 $z = \frac{12}{5}$, $w = 5$일 때 성립한다.)

따라서 S_2의 최댓값은 12이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

T077 | 답 ⑤

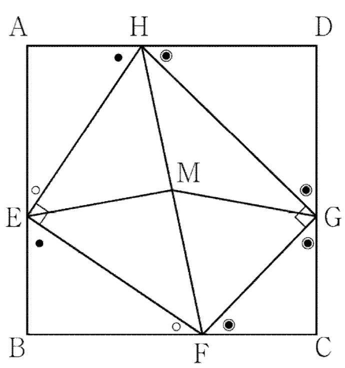
[풀이]

두 직각삼각형 HAE, EBF는 서로 RHS합동이다.

삼각형 FCG는 $\overline{FC} = \overline{CG}$인 직각이등변삼각형이고,

삼각형 GDH는 $\overline{GD} = \overline{DH}$인 직각이등변삼각형이다.

정사각형 ABCD의 두 대각선의 교점은 M이다.



(단, ○+●$= 90°$, ◉$= 45°$ 이다.)

삼각형의 내각의 합은 $180°$이므로

위의 그림에서

○+●$= 90°$ 이고, ◉$= 45°$ 이다.

따라서

$\angle \mathrm{HEF} = 90°$, $\angle \mathrm{FGH} = 90°$

이고, 네 점 E, F, G, H는 선분 HF를 지름으로 하는 원 위에 있다.

▸ ㄱ. (참)

원의 정의에 의하여

$\overline{FM} = \overline{GM}$

▸ ㄴ. (참)

피타고라스의 정리에 의하여

$\overline{HE} = \overline{EF} = \sqrt{a^2 + b^2}$

$\overline{FG} = \sqrt{2}a$, $\overline{GH} = \sqrt{2}b$

(△EFM의 넓이)$= \frac{1}{2}$(△HEF의 넓이)

$= \frac{a^2 + b^2}{4}$

(△FGM의 넓이)$= \frac{1}{2}$(△FGH의 넓이)

$= \frac{1}{2}ab$

산술기하절대부등식에 의하여

$a > 0$, $b > 0$일 때,

$\frac{a^2 + b^2}{4} \geq 2\sqrt{\frac{a^2}{4} \times \frac{b^2}{4}} = \frac{1}{2}ab$

이므로

$\therefore$ △EFM $\geq$ △FGM

▸ ㄷ. (참)

$\overline{HE} = \overline{EF}$인 직각이등변삼각형 HEF의 빗변의 길이는

$\overline{FH} = \sqrt{2(a^2 + b^2)}$

이므로

$\sqrt{2(a^2 + b^2)} = 6\sqrt{2}$

양변을 제곱하여 정리하면

$a^2 + b^2 = 36$ (단, $a > 0$, $b > 0$)

산술기하절대부등식에 의하여

(△FGM의 넓이)

$= \frac{1}{2}ab \leq \frac{a^2 + b^2}{4} = 9$

(단, 등호는 $a = b$일 때 성립한다.)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

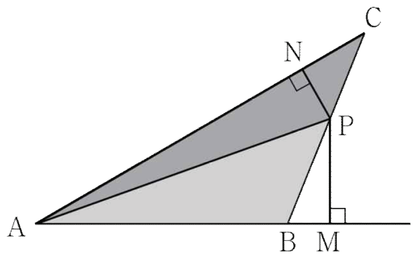
T078

| 답 28

[풀이] ★

$\overline{\mathrm{PM}}=x$, $\overline{\mathrm{PN}}=y$로 두자.

(단, $x>0$, $y>0$이다.)



삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

($\triangle\mathrm{ABC}$의 넓이)

$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{AC}}\sin 30^\circ=\frac{3}{2}$

($\triangle\mathrm{APB}$의 넓이)

$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AB}}\,\overline{\mathrm{PM}}=x$

($\triangle\mathrm{APC}$의 넓이)

$=\frac{1}{2}\overline{\mathrm{AC}}\,\overline{\mathrm{PN}}=\frac{3}{2}y$

이므로

$x+\frac{3}{2}y=\frac{3}{2}$

정리하면

$2x+3y=3$(단, $x>0$, $y>0$) $\cdots(*)$

산술기하절대부등식에 의하여

$3\left(\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{PM}}}+\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{PN}}}\right)$

$=3\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)$

$=(2x+3y)\left(\frac{2}{x}+\frac{3}{y}\right)$

$=13+6\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)$

$\geq 13+6\times 2\sqrt{\frac{y}{x}\times\frac{x}{y}}$

$=25$

(단, 등호는 $\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$일 때 성립한다.)

등호가 성립할 때의 x, y의 값을 구하자.

$\frac{x}{y}=\frac{y}{x}$에서 $x=y$

이를 (*)에 대입하여 정리하면

$x=y=\frac{3}{5}$

따라서 다음의 부등식이 항상 성립한다.

$\frac{\overline{\mathrm{AB}}}{\overline{\mathrm{PM}}}+\frac{\overline{\mathrm{AC}}}{\overline{\mathrm{PN}}}\geq\frac{25}{3}$

(단, 등호는 $x=y=\frac{3}{5}$일 때 성립한다.)

$p=25$, $q=3$이므로

$\therefore\ p+q=28$

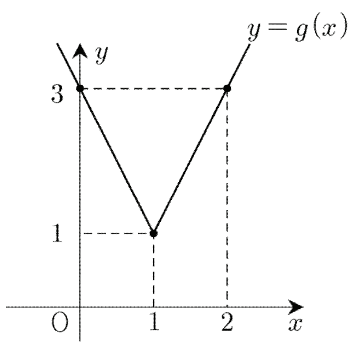
답 28

U 함수 (교사경)

1	④	2	③	3	②	4	③	5	②
6	5	7	7	8	①	9	④	10	243
11	3	12	④	13	4	14	③	15	③
16	①	17	④	18	③	19	②	20	⑤
21	②	22	17	23	②	24	③	25	28
26	①	27	33	28	③	29	⑤	30	③
31	③	32	③	33	⑤	34	①	35	②
36	①	37	②	38	③	39	⑤	40	12
41	②	42	③	43	①	44	①	45	③
46	②	47	⑤	48	③	49	⑤	50	②
51	②	52	①	53	⑤	54	①	55	⑤
56	③	57	①	58	②	59	20	60	320
61	④	62	①	63	16	64	②	65	②
66	④	67	②	68	②	69	①	70	③
71	①	72	③	73	②	74	③	75	④
76	④	77	④	78	④	79	⑤		

U001 | 답 ④

[풀이]
함수 $f:X\to Y$의 대응관계를 쓰면
$f(0)=3,\ f(1)=1,\ f(2)=3$
함수의 상등의 정의에 의하여
함수 $g:X\to Y$의 대응관계는
$g(0)=3,\ g(1)=1,\ g(2)=3$
아래 그림처럼 함수 $g(x)$의 그래프는 세 점
$(0,\ 3),\ (1,\ 1),\ (2,\ 3)$
을 지나야 한다.



$g(0)=a+b=3,\ g(1)=b=1$
연립방정식을 풀면
$a=2,\ b=1$
$\therefore\ 2a-b=3$
답 ④

U002 | 답 ③

[풀이]
함수 $f:X\to Y$는 일대일함수이므로
$f(1)\neq 4,\ f(3)\neq 4,\ f(1)\neq f(3)$
따라서
$f(1)=2,\ f(3)=3$
또는
$f(1)=3,\ f(3)=2$
이면 $f(1)+f(3)$은 최대가 된다. 이때, 최댓값은 5이다.
답 ③

U003 | 답 ②

[풀이]
함수 $g:X\to X$는 항등함수이므로
$g(3)=3$
조건 (가)에 의하여
$f(2)=3,\ h(6)=3$ $\cdots$ ㉠
함수 $f:X\to X$는 일대일대응이므로
$f(2),\ f(3),\ f(6)$
중에서 어느 두 수도 서로 같지 않다.
조건 (나), ㉠에 의하여
$f(3)=2,\ f(6)=6$
$(\because f(2)f(3)=f(6)(\leftarrow 3\times 2=6))$
함수 $h:X\to X$는 상수함수이므로
㉠에 의하여
$h(2)=3$
$\therefore\ f(3)+h(2)=2+3=5$
답 ②

U004 | 답 ③

[풀이]
$f:X\to X$가 항등함수이므로
$f(-2)=4a-2b-2=-2$
$f(-1)=a-b-2=-1$
$f(3)=3$
$a,\ b$에 대한 연립방정식을 풀면
$a=-1,\ b=-2$
$\therefore\ a+b=-3$
답 ③

U005 | 답 ②

[풀이]

6 이하의 자연수 중에서 중복을 허락하여 임의로 뽑은 두 수의 합의 최솟값과 최댓값은 각각 $2(=1+1)$, $12(=6+6)$이다.

$f(1)+f(2)$가 4의 배수이므로

$f(1)+f(2)$가 가질 수 있는 값은 4, 8, 12이다.

(1) $f(1)+f(2)=4$인 경우

$4=1+3=2+2$

다음의 세 경우가 가능하다.

$f(1)=1$, $f(2)=3$

$f(1)=3$, $f(2)=1$

$f(1)=2$, $f(2)=2$

(2) $f(1)+f(2)=8$인 경우

$8=2+6=3+5=4+4$

다음의 다섯 경우가 가능하다.

$f(1)=2$, $f(2)=6$

$f(1)=6$, $f(2)=2$

$f(1)=3$, $f(2)=5$

$f(1)=5$, $f(2)=3$

$f(1)=4$, $f(2)=4$

(3) $f(1)+f(2)=12$인 경우

$12=6+6$

다음의 한 경우가 가능하다.

$f(1)=6$, $f(2)=6$

(1)~(3)에서 함수 f의 개수는

$3+5+1=9$

답 ②

U006 | 답 5

[풀이]

문제에서 주어진 조건에서

$f(4)=2<3=g(4)$이므로 $h(4)=3$

$h(3)\ge 3=g(3)$이고,

$h(x)$는 일대일대응이므로 $h(3)=4$

$h(1)\ge 2=g(1)$이고,

$h(x)$는 일대일대응이므로 $h(1)=2$

이상을 정리하면

$h(1)=2$, $h(3)=4$, $h(4)=3$

$h(x)$는 일대일대응이므로

$h(2)=1$

$g(2)=1$, $h(2)=1$이므로

$f(2)\le 1$ 즉, $f(2)=1$

$\therefore\ f(2)+h(3)=1+4=5$

답 5

U007 | 답 7

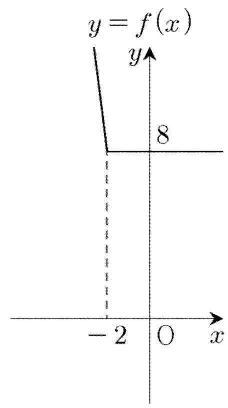
[풀이] ★

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}(a-4)x+2a & (x\ge -2)\\ -(a+4)x-2a & (x<-2)\end{cases}$$

(1) $a=4$인 경우

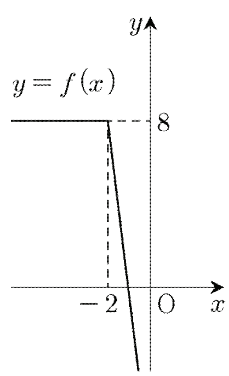
함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.

(2) $a=-4$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.

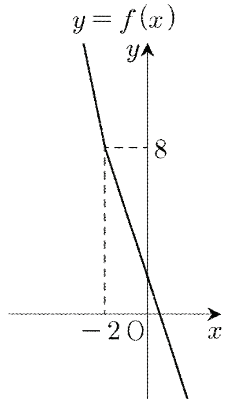
(3) $(a-4)(-a-4)>0$인 경우

이차부등식을 풀면

$-4<a<4$

예를 들어 $a=1$일 때,

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 일대일대응이다.

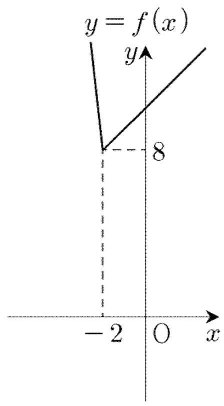
(4) $(a-4)(-a-4)<0$인 경우

이차부등식을 풀면

$a<-4$ 또는 $a>4$

예를 들어 $a=5$일 때,

함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같다.



함수 $f(x)$는 일대일대응이 아니다.

(1)~(4)에서 a의 범위는

$-4<a<4$

따라서 정수 a의 개수는 7이다.

답 7

U008 | 답 ①

[풀이]

네 개의 수 5, 6, 7, 8 중에서 뽑은 서로 다른 두 개의 수의 차의 최솟값과 최댓값은 각각 1, 3이다.

$f(2)-f(3)=3=8-5$

에서

$f(2)=8,\ f(3)=5$

문제에서 주어진 조건에서

$f(1)=7$

함수 $f:X\to Y$는 일대일대응이므로

$f(4)=6$일 수 밖에 없다.

$\therefore\ f(3)+f(4)=5+6=11$

답 ①

U009 | 답 ④

[풀이]

우선 조건 (가)에서 $f(5)$가 가질 수 있는 값의 범위에 대하여 생각하자.

집합 X의 서로 다른 두 원소의 차의 최솟값과 최댓값은 각각 $1,\ 4(=5-1)$이므로 $f(5)$가 가질 수 있는 값은 4 이하의 자연수이다. (큰 수에서 작은 수를 빼는 경우만을 생각한 것이다.)

(1) $f(5)=4(=5-1)$라고 가정하자.

$f(2)-f(3)=f(4)-f(1)=4$

에서

$f(4)=5,\ f(1)=1$

이고

$f(2)=5,\ f(3)=1$

이므로 f가 일대일대응이라는 조건을 만족시키지 않는다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $f(5)\neq 4$이다.

(2) $f(5)=2$라고 가정하자.

$5-3=4-2=3-1=2$

$5-3=4-2=2 \leftarrow$ 2가 중복된다. $\cdots$ ㉠

$5-3=3-1=2 \leftarrow$ 3이 중복된다.

$4-2=3-1=2 \leftarrow$ 2가 중복된다.

예를 들어 ㉠일 때,

$f(4)=5,\ f(1)=3,\ f(3)=4,$

$f(2)=2(=f(5))$

이므로 f가 일대일대응이라는 조건을 만족시키지 않는다.

다른 두 경우도 f가 일대일대응이라는 조건을 만족시키지 않는다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $f(5)\neq 2$이다.

(3) $f(5)=1$이라고 가정하자.

$5-4=4-3=3-2=2-1=1$

함수 f가 일대일대응이므로 다음의 경우만이 가능하다.

$5-4=3-2=1$

$f(4)=5,\ f(1)=4,\ f(2)=3,$

$f(3)=2$이면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

$f(4)=3,\ f(1)=2,\ f(2)=5,$

$f(3)=4$이면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $f(5)\neq 1$이다.

(1), (2), (3)에서 $f(5)=3$이다. (귀류법)

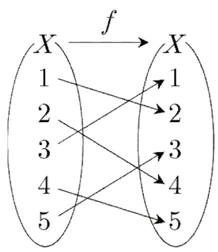
$5-2=4-1=3$

$f(4)=5,\ f(1)=2,\ f(2)=4,$

$f(3)=1$이면 조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.

$f(4)=4,\ f(1)=1,\ f(2)=5,$

$f(3)=2$이면 조건 (나)를 만족시키지 않는다.
따라서 함수 f는 다음과 같다.



$\therefore\ f(2)+f(5)=4+3=7$

답 ④

U010

|답 243

[풀이]

$f(x)$가 일차함수이고, 이차함수 $g(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 함수 $h_1(x)$는 최고차항의 계수가 1인 이차함수이고, 함수 $h_2(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 이차함수이다.

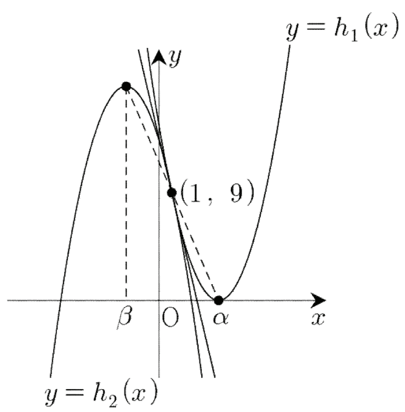
조건 (가), (다)에서
함수 $h_1(x)$의 방정식은

$h_1(x)=(x-\alpha)^2$

이때, 곡선 $y=h_1(x)$는 점 $(\alpha,\ 0)$에서 x축에 접한다.

조건 (다)에서
함수 $h_2(x)$의 방정식은

$h_2(x)=-(x-\beta)^2+c$(단, c는 상수)



조건 (나)에서 두 곡선
$y=h_1(x)$, $y=h_2(x)$
는 점 $(1,\ 9)$에서 서로 접하므로
$h_1(1)=9$, $h_2(1)=9$
즉,
$(1-\alpha)^2=9$, $\cdots$ ㉠
$-(1-\beta)^2+c=9$ $\cdots$ ㉡
이고,
$h_1{}'(1)=h_2{}'(1)$($\leftarrow$접선의 기울기가 같다.)
즉, $\alpha+\beta=2$ $\cdots$ ㉢
㉠: $\alpha=-2$ 또는 $\alpha=4$
이를 ㉢에 대입하면
$(\alpha,\ \beta)=(-2,\ 4)$, $(4,\ -2)$
그런데 $\alpha>\beta$이므로
$(\alpha,\ \beta)=(4,\ -2)$
이를 ㉡에 대입하면
$(\alpha,\ \beta,\ c)=(4,\ -2,\ 18)$
두 함수 $h_1(x)$, $h_2(x)$의 방정식은

$h_1(x)=(x-4)^2$

$h_2(x)=-(x+2)^2+18$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 방정식은

$$f(x)=\frac{h_1(x)+h_2(x)}{2}=-6x+15$$

$$g(x)=\frac{h_1(x)-h_2(x)}{2}=(x-1)^2$$

$\therefore\ f(\beta)\times g(\alpha)=27\times 9=243$

답 243

[참고]
다음과 같이 $\alpha+\beta$, c의 값을 빠르게 구할 수도 있다.
최고차항의 계수의 절댓값이 같은
두 이차함수 $h_1(x)$, $h_2(x)$가
한 점 $(1,\ 9)$에서 접하므로
두 이차함수의 꼭짓점의 중점은 $(1,\ 9)$이다.

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=1$에서 $\alpha+\beta=2$

$\dfrac{0+c}{2}=9$에서 $c=18$

U011

|답 3

[풀이]

$g(0)=0-2=-2$에서
$f(g(0))=f(-2)=a-2$

- (1) $a<2$인 경우

$f(0)=a$에서 $g(f(0))=a-2$
$f(g(0))+g(f(0))$
$=a-2+a-2=2a-4=10$
그런데 $7>2$이므로
a에 대한 일차방정식은 해를 갖지 않는다.

- (2) $a\geq 2$인 경우

$f(0)=a$에서 $g(f(0))=a^2$
$f(g(0))+g(f(0))$
$=a-2+a^2=a^2+a-2=10$

정리하면

$a^2+a-12=0$, $(a+4)(a-3)=0$

풀면

$a=3(\because a\ge 2)$

(1), (2)에서 $a=3$이다.

답 3

U012 | 답 ④

[풀이]

합성함수 $f(g(x))$의 방정식은

$f(g(x))=(a-4)(3-b)x+2a-2$

(단, a, b는 6 이하의 자연수이다.)

직선 $y=f(g(x))$이 x축과 만나지 않기 위해서는

(기울기)$=(a-4)(3-b)=0$

즉, $a=4$ 또는 $b=3$ …㉠

(y절편)$=2a-2\ne 0$

즉, $a\ne 1$ …㉡

㉠, ㉡을 만족시키는 순서쌍 $(a,\ b)$는

$(4,\ 1)$, $(4,\ 2)$, $(4,\ 3)$, $(4,\ 4)$,

$(4,\ 5)$, $(4,\ 6)$, $(2,\ 3)$, $(3,\ 3)$,

$(5,\ 3)$, $(6,\ 3)$

따라서 구하는 경우의 수는 10이다.

답 ④

U013 | 답 4

[풀이]

이차함수

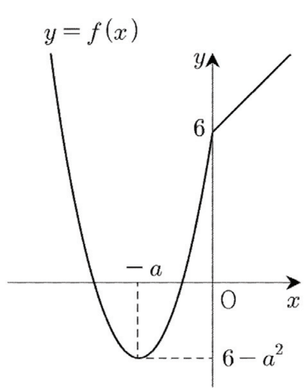
$y=x^2+2ax+6=(x+a)^2+6-a^2$

의 꼭짓점의 좌표는 $(-a,\ 6-a^2)$이다.

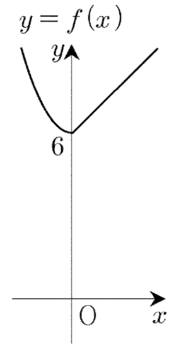
a의 값에 따른 함수 $f(x)$의 그래프는

다음과 같다.

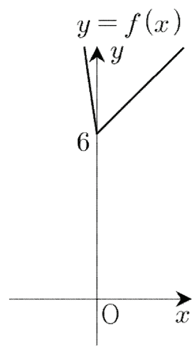
• $a>0$인 경우



• $a=0$인 경우



• $a<0$인 경우



함수 $g(f(x))$의 치역이 $y\ge 0$이므로

$g(f(x))=f(x)+10\ge 0$

풀면

$f(x)\ge -10$

즉, 함수 $f(x)$의 치역은 $y\ge -10$이다.

따라서 $a>0$이고,

$6-a^2=-10$이어야 한다.

풀면

$\therefore\ a=4$

답 4

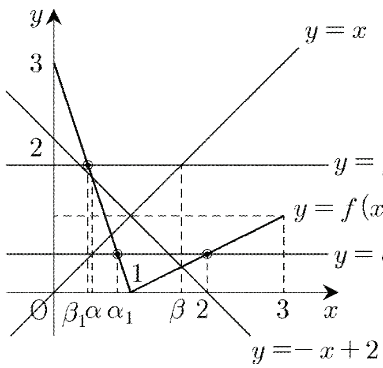
U014 | 답 ③

[풀이] ★

$f(x)=t$로 두면

$f(t)=2-t$ ⇔ 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2-x$의 교점의 x좌표만의 집합

아래 그림처럼 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=2-x$는 서로 다른 두 점에서 만난다. 이 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라고 하자.



문제에서 주어진 방정식과 아래의 방정식은 서로 필요충분조건을 이룬다.

$f(x)=\alpha$ 또는 $f(x)=\beta$

위의 그림에서

$f(x)=\alpha \Leftrightarrow x=\alpha_1$ 또는 $x=2(=\alpha_2)$

$f(x)=\beta \Leftrightarrow x=\beta_1$

세 수 α_1, $\alpha_2(=2)$, β_1 중에서 어느 두 수도 서로 같지 않으므로 문제에서 주어진 방정식의 해집합은

$\{\alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1\}$

따라서 문제에서 주어진 방정식의 서로 다른 실근의 개수는 3이다.

답 ③

U015 | 답 ③

[풀이]

함수 $g(f(x))$의 치역의 원소의 개수가 1이므로

함수 $g(f(x))$의 치역으로 가능한 집합은 다음과 같다.

$\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3\}$

(1) 치역이 $\{0\}$인 경우 (◯)

$f(x)(=mx)$를 4로 나눈 나머지가 0이다.

즉, m, $2m$, $3m$, $4m$, $\cdots$

을 4로 나눈 나머지가 0이다.

m, $2m$, $3m$, $4m$, $\cdots$

가 4의 배수가 되는 자연수 m의 최솟값은 4이다.

(2) 치역이 $\{1\}$인 경우 (×)

$f(x)(=mx)$를 4로 나눈 나머지가 1이다.

즉, m, $2m$, $3m$, $4m$, $\cdots$

을 4로 나눈 나머지가 1이다.

m을 4로 나눈 나머지가 1이므로

$m=4m'+1$(m'는 음이 아닌 정수)로 두자.

$2m=4(2m')+2$이므로

$2m$을 4로 나눈 나머지는 2이다.

따라서 치역이 $\{1\}$일 수 없다.

(3) 치역이 $\{2\}$인 경우 (×)

$f(x)(=mx)$를 4로 나눈 나머지가 2이다.

즉, m, $2m$, $3m$, $4m$, $\cdots$

을 4로 나눈 나머지가 2이다.

m을 4로 나눈 나머지가 2이므로

$m=4m'+2$(m'는 음이 아닌 정수)로 두자.

$2m=4(2m'+1)$이므로

$2m$을 4로 나눈 나머지는 0이다.

따라서 치역이 $\{2\}$일 수 없다.

(4) 치역이 $\{3\}$인 경우 (×)

$f(x)(=mx)$를 4로 나눈 나머지가 3이다.

즉, m, $2m$, $3m$, $4m$, $\cdots$

을 4로 나눈 나머지가 3이다.

m을 4로 나눈 나머지가 3이므로

$m=4m'+3$(m'는 음이 아닌 정수)로 두자.

$2m=4(2m'+1)+2$이므로

$2m$을 4로 나눈 나머지는 2이다.

따라서 치역이 $\{3\}$일 수 없다.

(1)~(4)에서 자연수 m의 최솟값은 4이다.

답 ③

U016 | 답 ①

[풀이]

조건 (가)에서 함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=ax(x-2)$(단, $a\neq 0$)

조건 (나)에서 주어진 방정식을 정리하면

$ax(x-2)-6(x-2)=0$

$(ax-6)(x-2)=0$

풀면

$x=2$ 또는 $x=\dfrac{6}{a}$

이 이차방정식은 중근을 가져야 하므로

$\dfrac{6}{a}=2$에서 $a=3$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=3x(x-2)$

이제 $f(f(x))=-3$을 풀자.

$f(x)=t$로 두면

$f(t)=-3 \Leftrightarrow 3t(t-2)=-3$

$\Leftrightarrow (t-1)^2=0 \Leftrightarrow t=1$

이므로

$f(x)=1 \Leftrightarrow 3x^2-6x-1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D/4=(-3)^2-3\times(-1)=12>0$

이 이차방정식은 서로 다른 두 실근을 갖는다.

이차방정식의 근과 계수와의 관계에 의하여

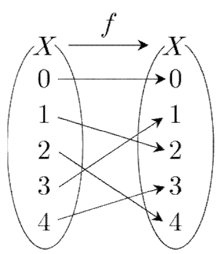
서로 다른 실근을 모두 곱한 값은 $-\frac{1}{3}$이다.

답 ①

U017 | 답 ④

[풀이]

2×0을 5로 나눈 나머지는 0,
2×1을 5로 나눈 나머지는 2,
2×2를 5로 나눈 나머지는 4,
2×3을 5로 나눈 나머지는 1,
2×4를 5로 나눈 나머지는 3
이므로 함수 f의 대응관계는 다음과 같다.



$g(1)=3$이므로
$f(g(1))=f(3)=1$
$f(1)=2$이므로
$g(f(1))=g(2)$
함수의 상등의 정의에 의하여
$g(2)=1$
$g(2)=1$이므로
$f(g(2))=f(1)=2$
$f(2)=4$이므로
$g(f(2))=g(4)$
함수의 상등의 정의에 의하여
$g(4)=2$
$g(4)=2$이므로
$f(g(4))=f(2)=4$
$f(4)=3$이므로
$g(f(4))=g(3)$
함수의 상등의 정의에 의하여
$g(3)=4$
이제 $g(0)$의 값을 구하자.
$f(0)=0$이므로 $g(f(0))=g(0)$
함수의 상등의 정의에 의하여
$f(g(0))=g(0)(=g(f(0)))$
$f(x)=x$인 x는 오직 0뿐이므로
$g(0)=0$일 수 밖에 없다.

$\therefore\ g(0)+g(3)=0+4=4$

답 ④

U018 | 답 ③

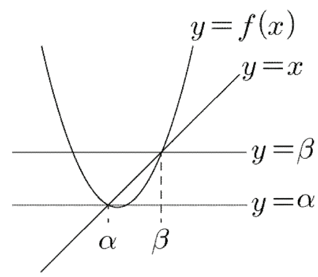
[풀이]

$f(f(x))=f(x) \Leftrightarrow f(x)=t,\ f(t)=t$ $\cdots$(*)

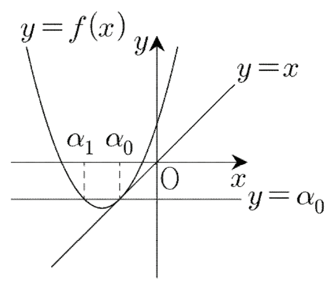
함수 $f(x)=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2+1-\frac{a^2}{4}$의

대칭축 $x=-\frac{a}{2}(<0)$은 제2사분면과 제3사분면을 지난다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 서로 다른 두 점에서 만난다고 하자. 이때, 두 교점의 x좌표를 각각 α, β라고 하면
(*) $\Leftrightarrow$ $f(x)=\alpha$, $f(x)=\beta$, $f(\alpha)=\alpha$, $f(\beta)=\beta$
이므로 방정식 (*)의 서로 다른 실근의 개수는 4이다. (아래 그림)



이는 가정에 모순이므로 곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$는 접해야 한다. (아래 그림)
이때, 접점의 x좌표를 α_0라고 하자.



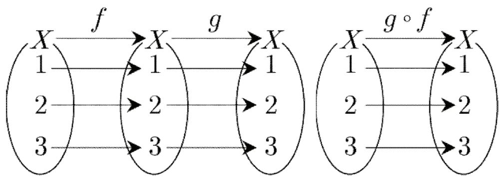
$f(x)=x \Leftrightarrow x^2+(a-1)x+1=0$
(판별식)$=(a-1)^2-4=0$, $a=3$
답 ③

U019 | 답 ②

[풀이] ★

▸ ㄱ. (참)

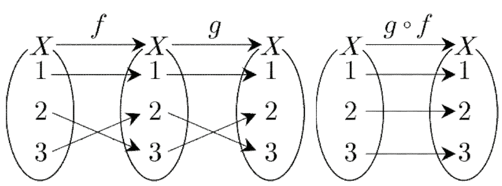
세 함수 f, g, $g\circ f$는 다음과 같다.



따라서 주어진 명제는 참이다.

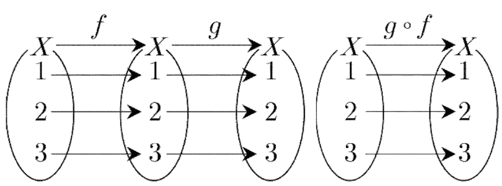
▸ ㄴ. (참)

$a \in X$, $b \in X (a \neq b)$에 대하여
$g(f(a)) = a$, $g(f(b)) = b$
$f(a) = f(b)$라고 가정하면
$g(f(a)) = g(f(b))$ 즉, $a = b$
이므로, 이는 가정에 모순이다.
따라서 $f(a) \neq f(b)$이다.
일대일함수의 정의에 의하여
함수 f는 일대일함수이다.
그런데 함수 f의 치역의 원소의 개수와 공역의 원소의 개수가 같으므로 함수 f는 일대일대응이다.
따라서 세 수 $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$ 중에서 어느 두 수도 서로 같지 않고, 다음이 성립한다.
$\{f(1),\ f(2),\ f(3)\} = \{1,\ 2,\ 3\}$
함수 $g \circ f$는 항등함수이므로
$g(f(1)) = 1$, $g(f(2)) = 2$, $g(f(3)) = 3$
함수 g의 정의역의 원소 p, q에 대하여
$p \neq q$이면 $g(p) \neq g(q)$
이므로 함수 g은 일대일대응이다.
예를 들어 세 함수 f, g, $g \circ f$는 다음과 같다.

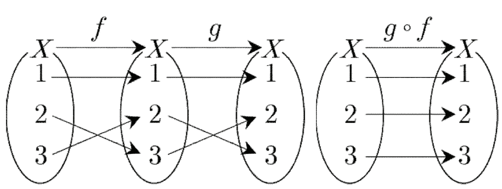


▸ ㄷ. (거짓)

세 함수 f, g, $g \circ f$가 모두 항등함수인 경우



두 함수 f, g는 항등함수가 아니지만, 함수 $g \circ f$는 항등함수인 경우 (←반례)



따라서 주어진 명제는 거짓이다.
이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

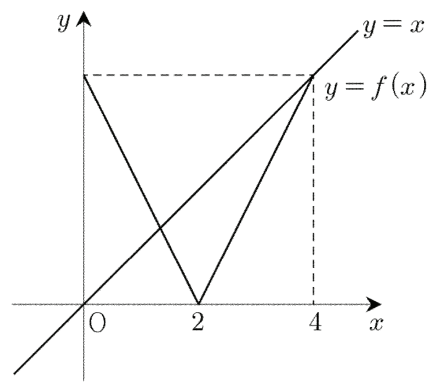
U020 | 답 ⑤

[풀이] ★

▸ ㄱ. (참)

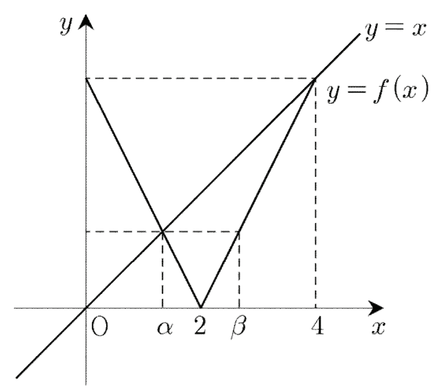
$f(1) = 2$이므로
$f(f(1)) = f(2) = 0$

▸ ㄴ. (참)



곡선 $y = f(x)$와 직선 $y = x$의 교점의 개수는 2이다.
따라서 방정식 $f(x) = x$의 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

▸ ㄷ. (참)



(단, $0 < \alpha < \beta < 4$,
$f(\alpha) = \alpha$, $f(\beta) = \alpha$이다.)
$f(x) = t$로 두면 주어진 방정식은
$f(t) = t \Leftrightarrow t = \alpha$ 또는 $t = 4$
(1) $t = \alpha$인 경우
$f(x) = \alpha \Leftrightarrow x = \alpha$ 또는 $x = \beta$
(2) $t = 4$인 경우
$f(x) = 4 \Leftrightarrow x = 0$ 또는 $x = 4$
(1), (2)에서 방정식 $f(f(x)) = x$의 해집합은
$\{0,\ \alpha,\ \beta,\ 4\}$
함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $x = 2$에 대하여 대칭이므로
$\dfrac{\alpha + \beta}{2} = 2$
따라서 모든 실근의 합은

$\therefore\ 0+\alpha+\beta+4=8$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

U021 | 답 ②

[풀이]

우선 조건 (나)에 대하여 생각하자.

함수 $f:X\to X$가 일대일대응이 아니라고 가정하면

합성함수 $g\circ f:X\to X$는 일대일대응이 아니므로 항등함수일 수 없다.

따라서 조건 (나)에 의하여 함수 $f:X\to X$는 일대일대응이다.

마찬가지의 이유로 함수 $g:X\to X$는 일대일대응이다.

(예를 들어

$f(1)=1,\ f(2)=2,\ f(3)=3,\ f(4)=4,$

$f(5)=5,\ f(6)=6,\ f(7)=7,\ f(8)=8,$

$f(9)=8$

일 때, 동시에

$g(f(8))=g(8)=8$이고 $g(f(9))=g(8)=9$

일 수 없다. 이는 함수의 정의에 모순이다.)

이제 조건 (다)에 대하여 생각하자.

$f(1)+g(1)=c$

$f(2)+g(2)=c$

$f(3)+g(3)=c$

$\vdots$

$f(9)+g(9)=c$

(단, c는 상수이다.)

위의 식을 변변히 모두 더하면

$f(1)+f(2)+f(3)+\ \cdots\ +f(9)$

$+g(1)+g(2)+g(3)+\ \cdots\ +g(9)$

$=9c$

그런데 두 함수

$f:X\to X,\ g:X\to X$

의 치역은 모두 집합 X이므로

$9c=2\times(1+2+3+\ \cdots\ +9)$

등차수열의 합의 공식에 의하여

$$c=2\times\frac{9\times10}{2}\times\frac{1}{9}=10$$

조건 (가), (다)에 의하여

$f(1)+g(1)=10$에서 $g(1)=2$

$f(3)+g(3)=10$에서 $g(3)\neq4$

조건 (나)에 의하여

$g(f(1))=g(8)=1$에서 $g(8)=1$

조건 (다)에 의하여

$f(8)+g(8)=10$에서 $f(8)=9$

조건 (나)에 의하여

$g(f(8))=g(9)=8$에서 $g(9)=8$

조건 (다)에 의하여

$f(9)+g(9)=10$에서 $f(9)=2$

조건 (나)에 의하여

$g(f(9))=g(2)=9$에서 $g(2)=9$

조건 (다)에 의하여

$f(2)+g(2)=10$에서 $f(2)=1$

한편 $f(5)=a$로 두자.

조건 (나)에 의하여

$g(f(5))=g(a)=5$

조건 (다)에 의하여

$f(a)+g(a)=10$에서 $f(a)=5$

조건 (나)에 의하여

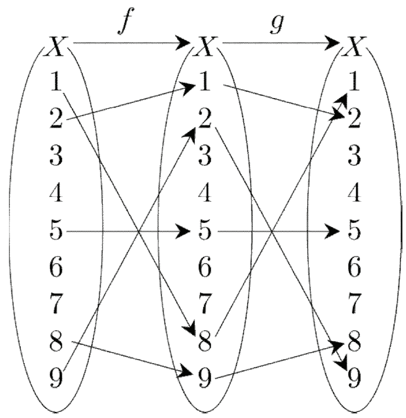
$g(f(a))=g(5)=a$

조건 (다)에 의하여

$f(5)+g(5)=a+a=10$에서 $a=5$

즉, $f(5)=5$이고 $g(5)=5$이다.

이상을 정리하면 다음과 같다.



• (경우1) $f(3)=3$인 경우

조건 (다)에 의하여

$f(3)+g(3)=10$에서 $g(7)=3$

조건 (나)에 의하여

$g(f(3))=g(3)=3$에서 $g(3)=3$

함수 $g:X\to X$는 일대일대응이므로

$g(3)=3$이고 $g(7)=3$일 수 없다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $f(3)\neq3$이다.

• (경우2) $f(3)=7$인 경우

조건 (다)에 의하여

$f(3)+g(3)=10$에서 $g(3)=3$

조건 (나)에 의하여

$g(f(3))=g(7)=3$

함수 $g:X\to X$는 일대일대응이므로

$g(3)=3$이고 $g(7)=3$일 수 없다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $f(3)\neq7$이다.

- (경우3) $f(3)=4$인 경우

조건 (다)에 의하여

$f(3)+g(3)=10$에서 $g(3)=6$

조건 (나)에 의하여

$g(f(3))=g(4)=3$에서 $g(4)=3$

조건 (다)에 의하여

$f(4)+g(4)=10$에서 $f(4)=7$

조건 (나)에 의하여

$g(f(4))=g(7)=4$에서 $g(7)=4$

조건 (다)에 의하여

$f(7)+g(7)=10$에서 $f(7)=6$

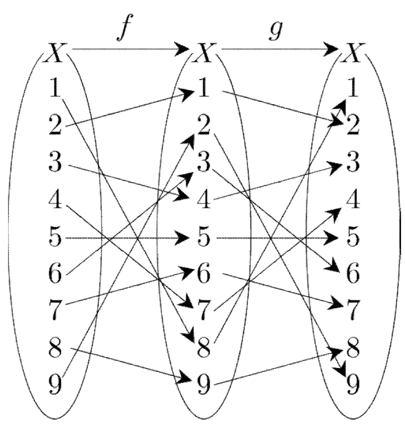
조건 (나)에 의하여

$g(f(7))=g(6)=7$에서 $g(6)=7$

조건 (다)에 의하여

$f(6)+g(6)=10$에서 $f(6)=3$

이상을 정리하면 다음과 같다.



$\therefore\ f(f(f(7)))=f(f(6))=f(3)=4$

답 ②

U022 | 답 17

[풀이]

조건 (가)에서 함수 $f: X \to X$는 일대일대응이다.

조건 (나)에서

$f(f(1))=f(1)-2$ …㉠

$f(f(2))=f(2)-4$ …㉡

$f(f(3))=f(3)-6$ …㉢

㉢: $f(f(3)) \in X$이므로

$1 \le f(3)-6 \le 7$에서 $7 \le f(3) \le 13$

$f(3) \in X$이므로 $f(3)=7$

$f(f(3))=f(7)=7-6=1$ 즉, $f(7)=1$

정리하면

$f(3)=7,\ f(7)=1$ …㉣

㉡: $f(f(2)) \in X$이므로

$1 \le f(2)-4 \le 7$에서 $5 \le f(2) \le 11$

$f(2)=5$ 또는 $f(2)=6$

$f(2)=5$라고 가정하면

$f(f(2))=f(5)=5-4=1$

그런데 ㉣에서 $f(7)=1$이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $f(2)=6$이다.

$f(f(2))=f(6)=6-4=2$

즉, $f(6)=2$

정리하면

$f(2)=6,\ f(6)=2$ …㉤

㉠: $f(f(1)) \in X$이므로

$1 \le f(1)-2 \le 7$에서 $3 \le f(1) \le 9$

$f(1)=3,\ f(1)=4,\ f(1)=5$

$f(1)=3$이라고 가정하면

$f(f(1))=f(3)=3-2=1$

그런데 ㉣에서 $f(7)=1$이므로 이는 가정에 모순이다.

$f(1)=4$라고 가정하면

$f(f(1))=f(4)=4-2=2$

그런데 ㉤에서 $f(6)=2$이므로 이는 가정에 모순이다.

따라서 $f(1)=5$이다.

$f(f(1))=f(5)=5-2=3$

즉, $f(5)=3$

정리하면

$f(1)=5,\ f(5)=3$

마지막으로 $f(4)=4$로 결정된다.

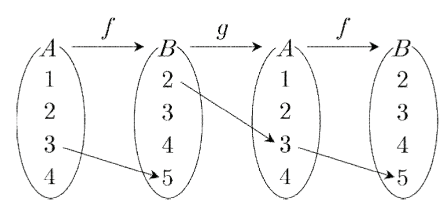
$\therefore\ f(2)+f(3)+f(4)=6+7+4=17$

답 17

U023 | 답 ②

[풀이] ★

조건 (가)에 의하여



조건 (나)에 의하여 $g(4)=4$이다.

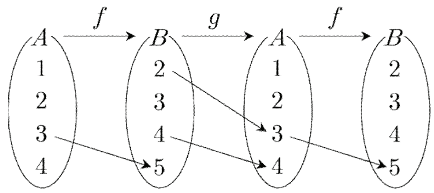
왜냐하면

$g(2)=3 \ne 2$, ($\because$ 조건(가))

$g(3) \ne 3$, ($\because$ g는 일대일대응)

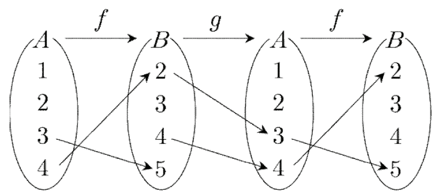
$g(5) \ne 5$ ($\because$ $5 \notin A$)

이기 때문이다.



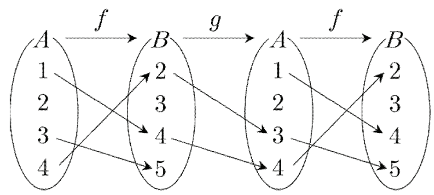
조건 (다)에서

$(f \circ g \circ f)(4)=5$이므로 $f(4)=2$이다.



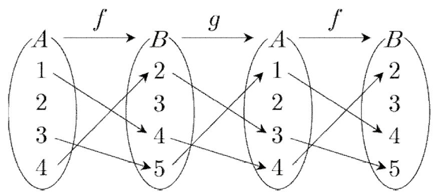
조건 (다)에서

$(f \circ g \circ f)(1)=2$이므로 $f(1)=4$이다.



조건 (다)에서

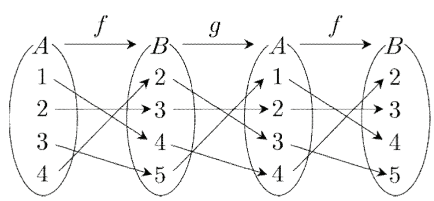
$(f \circ g \circ f)(3)=4$이므로 $g(5)=1$이다.



조건 (다)에서

$(f \circ g \circ f)(2)=3$이므로

$f(2)=3$, $g(3)=2$이다.



$\therefore\ f(1)+g(3)=4+2=6$

답 ②

U024

| 답 ③

[풀이] ★

▸ ㄱ. (참)

$f(1)\times f(2)=6=2\times 3=3\times 2$

이므로

$f(1)=2$, $f(2)=3$ …㉠

또는

$f(1)=3$, $f(2)=2$ …㉡

함수 $f:X\to X$가 일대일대응이므로

㉠:

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 모두 쓰면

1, 4, 5

이므로

$f(3)+f(4)+f(5)=10$

㉡:

$f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 모두 쓰면

1, 4, 5

이므로

$f(3)+f(4)+f(5)=10$

$\therefore\ f(3)+f(4)+f(5)=10$

▸ ㄴ. (참)

$a\in X$, $b\in X$(단, $a\neq b$)에 대하여

(1) $f(a)=a$인 경우

$f(f(a))=f(a)=a$이므로

$f(a)=a$이면 성립한다.

(2) $f(a)=b$인 경우

$f(f(a))=f(b)=a$이므로

$f(a)=b$, $f(b)=a$이면 성립한다.

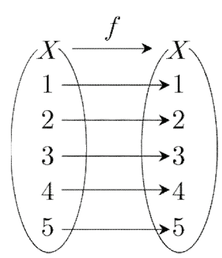
만약 $f(a)=a$인 a의 개수가

0 또는 2 또는 4

이면 (1)과 (2)가 동시에 성립하지 않는다.

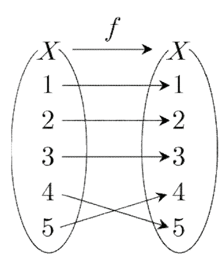
• $f(a)=a$인 a의 개수가 5인 경우

함수 $f:X\to X$는 다음과 같다.



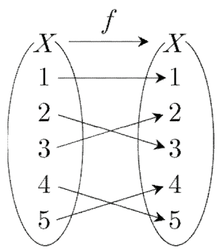
• $f(a)=a$인 a의 개수가 3인 경우

예를 들어 함수 $f:X\to X$는 다음과 같다.



• $f(a)=a$인 a의 개수가 1인 경우

예를 들어 함수 $f:X\to X$는 다음과 같다.



▸ ㄷ. (거짓)

$a \in X$, $b \in X$, $c \in X$

에 대하여

(단, $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$)

$f(f(f(a))) = a$ $\cdots$ ㉢

라고 하자.

(1) $f(a) = a$인 경우

$f(f(f(a))) = f(f(a)) = f(a) = a$

(2) $f(a) = b$인 경우

$f(f(f(a))) = f(f(b)) = a$($\because$ ㉢)

$f(b) = a$라고 가정: $f(f(b)) = f(a) = a$

그런데 $f(a) = a$, $f(a) = b$가 되므로

함수 f가 일대일대응이라는 조건을 만족시키지 않는다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $f(b) \neq a$이다.

$f(b) = b$라고 가정: $f(f(b)) = f(b) = a$

그런데 $f(b) = a$, $f(b) = b$가 되므로

함수 f가 일대일대응이라는 조건을 만족시키지 않는다.

이는 가정에 모순이다. 따라서 $f(b) \neq b$이다.

귀류법에 의하여 $f(b) = c$일 수 밖에 없다.

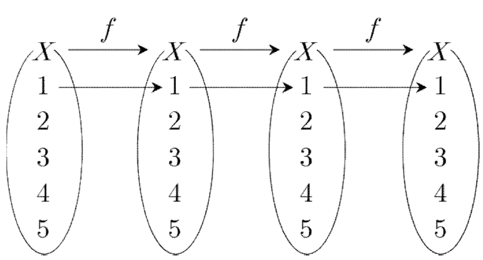
$f(b) = c$이면 $f(f(b)) = f(c) = a$이다.

(1)과 (2)를 정리하자.

$f(f(f(a))) = a$이면

(1): $f(a) = a$

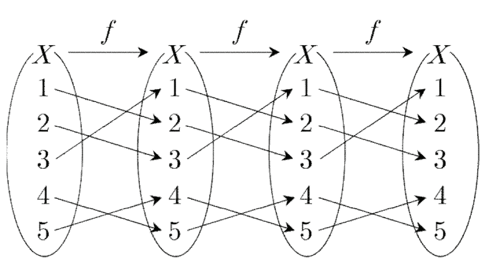
예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



(2): $f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$

(단, $a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$)

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



위의 경우처럼

$(f(f(f(1))) = 1$일 때,

$f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$,

$f(4) = 5$, $f(5) = 4$

이고, 이는 주어진 명제의 반례이다.

따라서 주어진 명제는 거짓이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

U025 | 답 28

[풀이]

역함수의 성질에 의하여

$f^{-1} \circ f$는 항등함수이므로

$(f^{-1} \circ f) \circ f^{-1} = f^{-1}$

이제 $f^{-1}(a) = 3$인 a의 값을 구하면 된다.

역함수의 성질에 의하여

$\therefore\ a = f(3) = 28$

답 28

U026 | 답 ①

[풀이]

$f(6) - f(4) = f(2)$에서

$f(6) > f(4)$, $f(6) > f(2)$이고,

$f(6) + f(4) = f(8)$에서

$f(8) > f(6)$, $f(8) > f(4)$이다.

요컨대

$f(8) > f(6) > f(4)$, $f(8) > f(6) > f(2)$

이므로 $f(8) = 8$, $f(6) = 6$일 수 밖에 없다.

이를 문제에서 주어진 두 등식에 대입하면

$6 - f(4) = f(2)$, $6 + f(4) = 8$

연립방정식을 풀면

$f(4) = 2$, $f(2) = 4$

정리하면

$f(8) = 8$, $f(6) = 6$, $f(4) = 2$, $f(2) = 4$

$\therefore\ (f \circ f)(6) + f^{-1}(4) = 6 + 2 = 8$

답 ①

U027 | 답 33

[풀이]

$f(4) = 3$이므로 $g(f(4)) = g(3) = 3$이다.

$g(a)=h(f(a))$, $f(a)=1$로 두자.

함수 f는 일대일대응이므로, 역함수 f^{-1}이 존재한다.

역함수의 성질에 의하여

$a=f^{-1}(1)=2$

이므로

$g(2)=h(f(2))$에서 $h(1)=3$

$\therefore\ g(f(4))+10h(1)=3+10\times3=33$

답 33

U028 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프에서

$f(1)=1$, $g(f(1))=g(1)=2$

$(f\circ g)^{-1}(3)=a$로 두자.

역함수의 성질에 의하여

$(f\circ g)(a)=3$ 즉, $f(g(a))=3$

역함수의 성질에 의하여

$g(a)=f^{-1}(3)=4$

역함수의 성질에 의하여

$a=g^{-1}(4)=4$

$\therefore\ (g\circ f)(1)+(f\circ g)^{-1}(3)$

$=2+4=6$

답 ③

U029 | 답 ⑤

[풀이]

함수 $f:A\to A$는 일대일대응이므로

역함수 $f^{-1}:A\to A$가 존재한다.

함수 $(g\circ f)^{-1}$는 $f^{-1}\circ g^{-1}$로 정의되므로

함수 $g:A\to A$는 역함수를 가져야 한다.

함수 $g:A\to A$는 일대일대응이므로

(g의 치역)$=A$

문제에서 주어진 두 함수

$f(x)$, $f(g(x))$

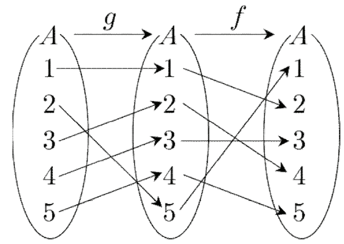
의 그래프의 개형에서

$f(g(1))=2$이면 $g(1)=1$

임을 알 수 있다.

마찬가지의 방법으로

다음의 대응관계를 얻는다.



$g(2)=5$

$(g\circ f)^{-1}(1)=a$로 두면

$a=f^{-1}(g^{-1}(1))=f^{-1}(1)=5$

$\therefore\ g(2)+(g\circ f)^{-1}(1)$

$=5+5=10$

답 ⑤

U030 | 답 ③

[풀이]

조건 (가)에 의하여

$f(1)\neq f(4)$

집합 X의 서로 다른 두 원소의 합의 최댓값은 $7(=3+4)$이므로

$f(1)=4$, $f(4)=3$이다.

($\because$ 조건 (나)에 의하여

$f(1)=3$, $f(4)=4$(←불가능)

인 경우는 가능하지 않다.)

조건 (나)에 의하여

$f(2)\neq 2$

이고, 조건 (가)에 의하여

$f(2)\neq 3$, $f(2)\neq 4$

이므로 $f(2)=1$이다.

조건 (가)에서 f는 일대일대응이므로 f^{-1}이 존재한다.

역함수의 성질에 의하여

$f^{-1}(1)=2$

$\therefore\ f(1)+f^{-1}(1)=4+2=6$

답 ③

U031 | 답 ③

[풀이]

조건 (나)에 의하여

함수 g는 일대일대응이다.

조건 (가)에 의하여

$g(3)\neq 3$, $g(3)\neq 5$,

$g(4)\neq 3$, $g(4)\neq 5$,

$g(5) \neq 3$, $g(5) \neq 5$

문제에서 주어진 함수 f의 대응관계에 의하여

$g(f(4)) = g(5)$ $\cdots㉠$

$g(4)$가 가질 수 있는 값은

1 또는 2 또는 4

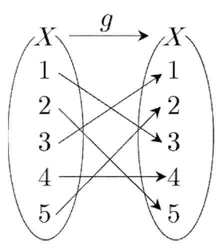
이다.

이제 아래와 같은 표를 만들 수 있다.

$g(4)$	$f(g(4))$	$g(5)$ $(=g(f(4)))$	$g(f(4))$ $+f(g(4))$
1	$2(=f(1))$	2 또는 4	4 또는 6
2	$1(=f(2))$	1 또는 4	2 또는 5
4	$5(=f(4))$	1 또는 2	6 또는 7

따라서 구하는 최댓값은 7이다.

이때, 함수 g는 다음과 같다.



답 ③

U032 | 답 ③

[풀이]

함수 $g \circ f$의 역함수는 두 역함수 f^{-1}, g^{-1}의 합성함수로 정의된다.

$(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$

문제에서 주어진 함수 $(g \circ f)^{-1}$의 대응관계에서

$f^{-1}(g^{-1}(7)) = 3$

$f^{-1}(g^{-1}(8)) = 1$

$f^{-1}(g^{-1}(9)) = 2$

역함수의 성질과 문제에서 주어진 조건에 의하여

$g(f(3)) = 7$

$g(f(1)) = 8 \rightarrow g(4) = 8$

$g(f(2)) = 9 \rightarrow f(2) = 6$($\because$ 함수 g는 일대일대응이다.)

함수 f는 일대일대응이므로

$f(3) = 5$

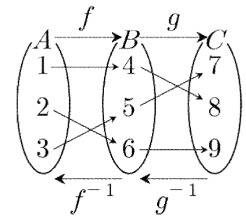
($\because f(1) = 4$, $f(2) = 6$)

함수 g는 일대일대응이므로

$g(5) = 7$

($\because g(4) = 8$, $g(6) = 9$)

이상에서 두 함수 f, g는 다음과 같다.



$\therefore$ $f(2) + g(5) = 6 + 7 = 13$

답 ③

U033 | 답 ⑤

[풀이]

다음의 필요충분조건을 생각하자.

$f^{-1}(a) = g(b) \Leftrightarrow a = f(g(b))$

$g(1) = \dfrac{11}{2}$, $g(2) = 5$, $g(3) = 3$,

$g(4) = 1$, $g(5) = \dfrac{1}{2}$, $g(6) = 0$

이므로

$f(g(1)) = 5$, $f(g(2)) = 4$, $f(g(3)) = 3$,

$f(g(4)) = 2$, $f(g(5)) = 1$, $f(g(6)) = 0$

순서쌍 (a, b)는

$(5, 1)$, $(4, 2)$, $(3, 3)$, $(2, 4)$, $(1, 5)$

따라서 순서쌍 (a, b)의 개수는 5이다.

답 ⑤

U034 | 답 ①

[풀이]

두 함수 f, g가 집합 X에서 X로의 일대일대응이므로 두 역함수

$f^{-1}: X \rightarrow X$, $g^{-1}: X \rightarrow X$

가 정의된다.

역함수의 성질에 의하여

$(f^{-1} \circ f)(x) = x\,(x \in X)$

이므로

$f^{-1}(f(g^{-1}(x^2))) = f^{-1}(x)$

$(f^{-1} \circ f)(g^{-1}(x^2)) = f^{-1}(x)$

($\because$ 함수의 합성에 대하여 결합법칙이 성립한다.)

$g^{-1}(x^2) = x^2$

($\because f^{-1}(x) = x^2$)

$x^2 = t(> 0)$로 두면

$g^{-1}(t) = t$

(단, t는 양의 실수)

함수 g^{-1}는 집합 X에서 X로의 항등함수이므로

$g(t)=t$

$(f\circ g)(20)=a(>0)$로 두자.

$(f\circ g)(20)=f(g(20))=f(20)=a$

역함수의 성질에 의하여

$f^{-1}(a)=20$ 즉, $a^2=20$

a는 양수이므로 $a=2\sqrt{5}$

$\therefore\ (f\circ g)(20)=2\sqrt{5}$

답 ①

U035 | 답 ②

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식을 변형하면

$f(x)=(x-k)^2+1$

이차함수 $f(x)$의 꼭짓점의 좌표는 $(k,\ 1)$이다.

함수 $f(x)$는 증가함수이므로 다음의 필요충분조건이 성립한다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수

$\Leftrightarrow$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수

다음의 필요충분조건도 성립한다. (단, R은 실수 전체의 집합)

방정식 $f(x)=g(x)$의 해집합$(\subset R)$

$\Leftrightarrow$

방정식 $f(x)=x$의 해집합$(\subset R)$

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 서로 접할 때의 k의 값을 구하자.

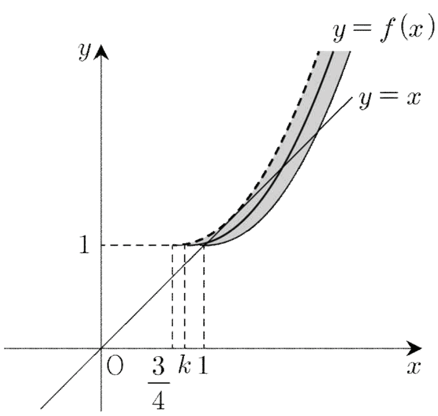
$f(x)=x \Leftrightarrow x^2-2kx+k^2+1=x$

$\Leftrightarrow x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(2k+1)^2-4(k^2+1)=4k-3=0$

에서 $k=\dfrac{3}{4}$이다.



위의 그림처럼 $\dfrac{3}{4}<k\le 1$일 때,

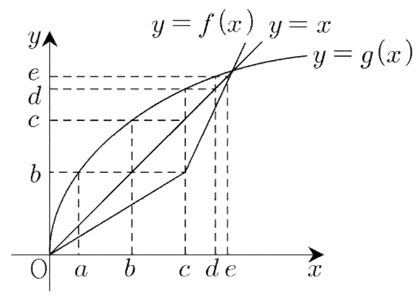
곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 교점의 개수는 2이다.

따라서 k의 최댓값은 1이다.

답 ②

U036 | 답 ①

[풀이]



$f(c)=b$이므로

$g^{-1}(f(c))=g^{-1}(b)$

$g^{-1}(b)=k$로 두자.

역함수의 성질에 의하여

$g(k)=b$이므로 $k=a$이다.

$\therefore\ g^{-1}(f(c))=a$

답 ①

U037 | 답 ②

[풀이] ★

문제에서 주어진 조건에 의하여

$f\circ h_1=h_2\circ f(=g)$

이므로 함수의 상등의 정의에 의하여

두 함수 h_1, f의 정의역은 같고,

두 함수 f, h_2의 공역은 같다.

함수 f의 정의역과 공역을 각각 X, Y라고 하면

$h_1: X\to X$, $f: X\to Y$, $h_2: Y\to Y$

다음의 세 함수는 모두 같다.

$f\circ h_1: X\to Y$, $h_2\circ f: X\to Y$, $g: X\to Y$

f, g가 일대일대응이므로

$n(X)=n(Y)$

▸ ㄱ. (참)

역함수의 성질에 의하여

$h_1=(f^{-1}\circ f)\circ h_1$

$=f^{-1}\circ(f\circ h_1)$

$=f^{-1}\circ g$

$\therefore\ h_1=f^{-1}\circ g$

$h_2 = h_2 \circ (f \circ f^{-1})$

$= (h_2 \circ f) \circ f^{-1}$

$= g \circ f^{-1}$

$\therefore\ h_2 = g \circ f^{-1}$

▸ ㄴ. (참)

$a \in X$, $b \in X$에 대하여

$h_1(a) = h_1(b)$

$f^{-1}(g(a)) = f^{-1}(g(b))$

함수 f^{-1}은 일대일대응이므로

$g(a) = g(b)$

함수 g는 일대일대응이므로

$a = b$

따라서 함수 h_1은 일대일대응이다.

마찬가지의 방법으로 함수 h_2도 일대일대응임을 보일 수 있다.

▸ ㄷ. (거짓)

(반례)

예를 들어 $X = Y$로 두고 h_1, h_2가 항등함수라고 하면

함수의 상등의 정의에 의하여 두 함수 h_1, h_2는 서로 같다.

세 함수 h_1, f, h_2는 다음과 같다.

$h_1 : X \to X$, $f : X \to X$, $h_2 : X \to X$

다음의 세 함수는 모두 같다.

$f \circ h_1 (= f) : X \to X$, $h_2 \circ f (= f) : X \to X$,

$g : X \to X$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ②

U038 | 답 ③

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식에서

$f(1) = 1^2 = 1$, $f(2) = 2^2 = 4$

$f(3) = 3 + a$, $f(4) = 4 + a$

함수 f의 역함수가 존재하므로

$f(3) \neq 1$, $f(3) \neq 4$,

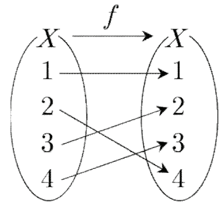
$f(4) \neq 1$, $f(4) \neq 4$

그런데 $f(3) < f(4)$이므로

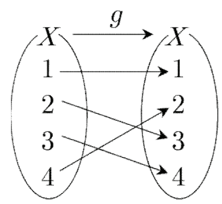
$f(3) = 2$, $f(4) = 3$이어야 한다.

따라서 $a = -1$이다.

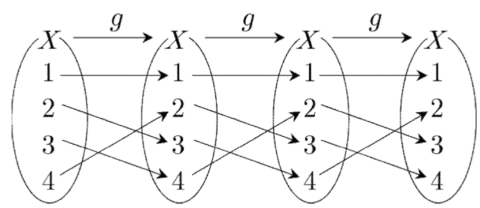
함수 f는

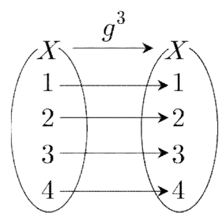


함수 $g(= f^{-1})$는



함수 g^3은





함수 g^3은 항등함수이다.

$g^{10} = g^{3 \times 3 + 1} = g$,

$g^{11} = g^{3 \times 3 + 2} = g^2$

이므로

$\therefore\ a + g^{10}(2) + g^{11}(2)$

$= -1 + g(2) + g^2(2)$

$= -1 + 3 + 4 = 6$

답 ③

U039 | 답 ⑤

[풀이]

우선 조건 (가)에 대하여 생각하자.

$a \in X$, $b \in X$(단, $a \neq b$)에 대하여

$f(a) = a$이면

$f(f(a)) = f(a) = a$

이므로 조건 (가)를 만족시킨다.

$f(a) = b$이면

$f(f(a)) = f(b) = a$이므로

$f(a) = b$이고 $f(b) = a$이면

조건 (가)를 만족시킨다.

정리하면

$f(a)=a$ $\cdots$㉠

또는

$f(a)=b,\ f(b)=a\,(a\neq b)$ $\cdots$㉡

조건 (나)에 대하여 생각하자.

$f(1)=2\times1=2\in X,$

$f(2)=2\times2=4\in X,$

$f(3)=2\times3=6\notin X,$

$f(4)=2\times4=8\notin X$이므로

$f(1)=2$ 또는 $f(2)=4$이다.

㉡에 의하여

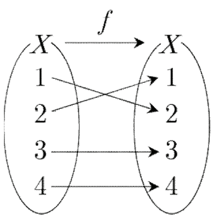
$f(1)=2$이면 $f(2)=1$(←경우1)

$f(2)=4$이면 $f(4)=2$(←경우2)

▸ (경우1)

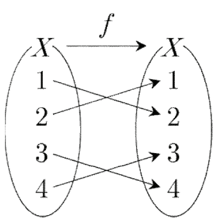
$f(3)=3,\ f(4)=4$일 때,

함수 f는 다음과 같다.



$f(3)=4,\ f(4)=3$일 때,

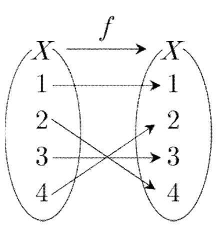
함수 f는 다음과 같다.



▸ (경우2)

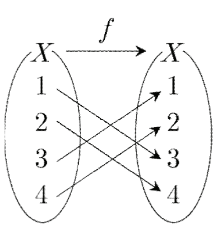
$f(1)=1,\ f(3)=3$일 때,

함수 f는 다음과 같다.



$f(1)=3,\ f(3)=1$일 때,

함수 f는 다음과 같다.



▸ ㄱ. (참)

$f:X\to X$는 일대일대응이므로

f는 역함수 f^{-1}을 갖는다.

조건 (가)에 의하여

$f(f(3))=3$

역함수의 성질에 의하여

$\therefore\ f(3)=f^{-1}(3)$

▸ ㄴ. (참)

(경우2)의 두 번째 경우이다.

▸ ㄷ. (참)

(경우1), (경우2)에서

함수 f의 개수는 4이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

답 ⑤

U040 | 답 12

[풀이]

조건 (다)에서 주어진 등식에 대해서 생각하자.

(좌변)$=\dfrac{1}{2}f(a)$의 a는 집합 X의 원소이다.

(우변)$=(f\circ f^{-1})(a)$의 a는 집합 Y의 원소이다.

따라서 a는 $X\cap Y=\{2,\ 4\}$의 원소이다.

조건 (다)에서 주어진 등식을 만족시키는 a의 개수는 2이므로

$a=2$와 $a=4$는 조건 (다)에서 주어진 등식을 만족시킨다.

항등식의 성질에 의하여

$\dfrac{1}{2}f(a)=a$ 즉, $f(a)=2a$

이므로

$f(2)=4,\ f(4)=8$

조건 (나)에 의하여

$f(1)=6$

조건 (가)에 의하여

$f(3)=2$

$\therefore\ f(2)\times f^{-1}(2)=4\times3=12$

답 12

U041 | 답 ②

[풀이]

유리함수 $f(x)$의 두 점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있으면 유리함수 $f(x)$의 그래프는 직선 $y=x$에 대하여 대칭이다.

유리함수 $f(x)$의 두 점근선은 각각

$x=-3,\ y=k$

두 점근선의 교점 $(-3,\ k)$가

직선 $y=x$ 위에 있으면

$\therefore\ k=-3$

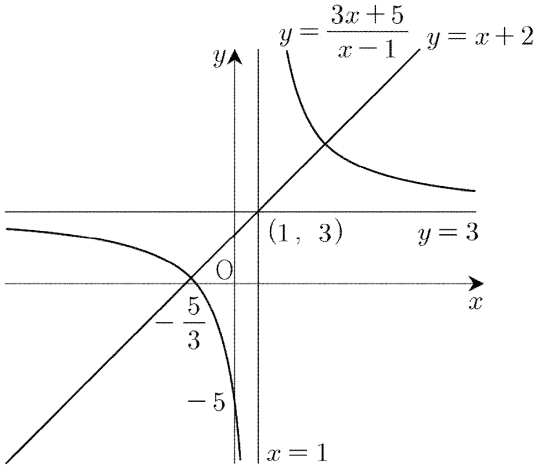
답 ②

U042 | 답 ③

[풀이]

$$\frac{3x+5}{x-1}=\frac{3(x-1)+8}{x-1}=3+\frac{8}{x-1}$$

이므로, 유리함수 $y=\frac{8}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 유리함수 $y=\frac{3x+5}{x-1}$의 그래프와 일치한다.



▸ ㄱ. (참)

문제에서 주어진 유리함수의 두 점근선의 방정식은 각각

$x=1,\ y=3$

▸ ㄴ. (참)

문제에서 주어진 유리함수의 x절편, y절편은 각각

$(x\text{절편})=-\frac{5}{3},\ (y\text{절편})=-5$

이므로, 이 유리함수의 그래프는 제3사분면을 지난다.

▸ ㄷ. (거짓)

문제에서 주어진 유리함수는 기울기가 1이고, 두 점근선의 교점 $(1,\ 3)$을 지나는 직선에 대하여 대칭이다. 이 직선의 방정식은 $y=x+2$이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

답 ③

U043 | 답 ①

[풀이]

$$\frac{-3x+7}{x-2}=\frac{-3(x-2)+1}{x-2}=-3+\frac{1}{x-2}$$

이므로 문제에서 주어진 유리함수의 두 점근선은 각각

$x=2,\ y=-3$

두 점근선의 교점 $(2,\ -3)$을 지나고 기울기가 ±1인 두 직선은

$y=x-5,\ y=-x-1$

문제에서 주어진 유리함수의 그래프는 위의 두 직선 각각에 대하여 대칭이다.

$a=1,\ b=-5,\ c=-1,\ d=-1$

(또는 $a=-1,\ b=-1,\ c=1,\ d=-5$)

$\therefore\ a+b+c+d=-6$

답 ①

U044 | 답 ①

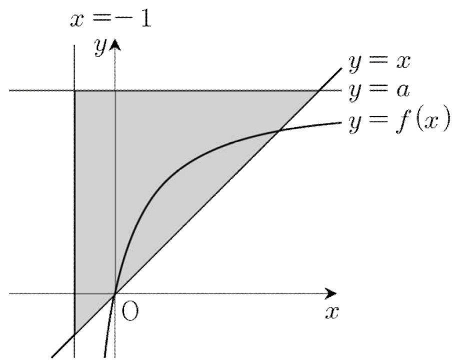
[풀이]

$$\frac{ax}{x+1}=\frac{a(x+1)-a}{x+1}=a-\frac{a}{x+1}$$

이므로, 유리함수 $y=-\frac{a}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 a만큼 평행이동하면 유리함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다.

유리함수 $f(x)$의 두 점근선은

$x=-1,\ y=a$



두 점근선과 직선 $y=x$가 만나서 생기는 직각이등변삼각형의 각 꼭짓점의 좌표는

$(-1,\ -1),\ (a,\ a),\ (-1,\ a)$

삼각형의 넓이는

$\frac{1}{2}(a+1)^2=18$

풀면

$\therefore\ a=5(\because a>0)$

답 ①

U045 | 답 ③

[풀이]

문제에서 주어진 유리함수의 그래프가 점 $(-2,\ c)$에 대칭이므로, 이 유리함수의 그래프의 두 점근선의 교점은 $(-2,\ c)$이어야 한다.

유리함수의 그래프의 두 점근선은 각각

$x=-a,\ y=3$

이므로

$-a=-2,\ 3=c$ 즉, $a=2,\ c=3$

유리함수의 방정식은

$y=\dfrac{3x+b}{x+2}$

이 곡선이 점 $(2,\ 1)$을 지나므로

$1=\dfrac{6+b}{4}$ 풀면 $b=-2$

$\therefore\ a+b+c=3$

답 ③

U046 | 답 ②

[풀이]

유리함수 $f(x)$의 두 점근선의 방정식은

$x=-\dfrac{d}{c},\ y=\dfrac{a}{c}$

조건 (나)에 의하여

$-\dfrac{d}{c}=1,\ \dfrac{a}{c}=-2$ 즉, $d=-c,\ a=-2c$

유리함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\dfrac{-2cx+b}{cx-c}$

조건 (가)에 의하여

$f(0)=-\dfrac{b}{c}=0$에서 $b=0$

유리함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=\dfrac{-2x}{x-1}$

$f^{-1}(-1)=a$로 두자.

역함수의 성질에 의하여

$f(a)=\dfrac{-2a}{a-1}=-1$

풀면 $a=-1$이므로

$\therefore\ f^{-1}(-1)=-1$

답 ②

U047 | 답 ⑤

[풀이]

$\dfrac{2x+5}{x+3}=\dfrac{2(x+3)-1}{x+3}=2-\dfrac{1}{x+3}$

이므로 유리함수 $f(x)$의 두 점근선은

$x=-3,\ y=2$

유리함수 $f^{-1}(x)$의 두 점근선은

$x=2,\ y=-3$

따라서 유리함수 $f^{-1}(x)$의 그래프는 점 $(2,\ -3)$에 대하여 대칭이다.

$\therefore\ p-q=5$

답 ⑤

U048 | 답 ③

[풀이]

유리함수 $y=\dfrac{2}{x+3}+1$의 그래프를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동하면 유리함수

$y=\dfrac{2}{x+3-m}+1+n$

의 그래프와 일치한다.

$\dfrac{-2x+6}{x-2}=\dfrac{-2(x-2)+2}{x-2}=-2+\dfrac{2}{x-2}$

이므로

$3-m=-2,\ 1+n=-2$

풀면

$m=5,\ n=-3$

$\therefore\ m+n=2$

답 ③

U049 | 답 ⑤

[풀이]

유리함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=\dfrac{3(x+2)+k}{x+2+4}+3$

$=\dfrac{3x+6+k}{x+6}+3=\dfrac{k-12}{x+6}+6$

유리함수 $g(x)$의 두 점근선의 방정식은

$x=-6,\ y=6$

두 점근선의 교점 $(-6,\ 6)$이 곡선 $y=f(x)$ 위에 있으므로

$f(-6)=\dfrac{-18+k}{-2}=6$

풀면

$\therefore\ k=6$

답 ⑤

U050 | 답 ②

[풀이]

곡선 $y=-\dfrac{2}{x}$를 x축의 방향으로 m만큼, y축의 방향으로 n만큼 평행이동한 곡선을 $y=f(x)$라고 하자.

$f(x)=-\dfrac{2}{x-m}+n$

유리함수 $f(x)$의 그래프가 직선 $y=x$에 대하여 대칭이므로 유리함수 $f(x)$의 두 점근선의 교점 $(m,\ n)$은 직선 $y=x$ 위에 있다. 즉, $m=n$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-\dfrac{2}{x-m}+m$

문제에서 주어진 함수 $f(x)$의 정의역에 의하여

$m=-2(=n)$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-\dfrac{2}{x+2}-2$

$\therefore\ f(4)=-\dfrac{7}{3}$

답 ②

U051 | 답 ②

[풀이]

문제에서 주어진 유리함수의 두 점근선의 방정식은

$x=a,\ y=2$

문제에서 주어진 유리함수의 역함수의 두 점근선의 방정식은

$x=2,\ y=a$

$a=2$이면 문제에서 주어진 유리함수의 그래프와 그 역함수의 그래프가 일치한다. 왜냐하면 $a=2$이면 x축에 평행한 두 점근선끼리 같고, y축에 평행한 두 점근선끼리 같아지기 때문이다.

$\therefore\ a=2$

답 ②

U052 | 답 ①

[풀이]

$g(f(x))=1$에서 $f(x)$는 정수이다.

$f(x)=\dfrac{3(2x-1)+15}{2x-1}=3+\dfrac{15}{2x-1}$

$f(x)$가 정수이기 위해서는 분수식 $\dfrac{15}{2x-1}$가 정수이어야 한다.

즉, $2x-1$이 15의 약수이어야 한다.

$2x-1$이 가질 수 있는 값은

$1,\ 3,\ 5,\ 15$

x가 가질 수 있는 값은

$1,\ 2,\ 3,\ 8$

따라서 모든 자연수 x의 개수는 4이다.

답 ①

U053 | 답 ⑤

[풀이]

직선 AB의 방정식은

$y=\dfrac{\dfrac{1}{a}+1}{a+1}(x+1)-1$

정리하면

$y=\dfrac{1}{a}(x+1)-1$

직선 AB의 방정식에 $y=0$을 대입하여 정리하면

$x=a-1$이므로 $\mathrm{P}(a-1,\ 0)$

직선 AB의 방정식에 $x=0$을 대입하여 정리하면

$y=\dfrac{1}{a}-1$이므로 $\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{1}{a}-1\right)$

점 B'의 좌표는 $\mathrm{B}'(a,\ 0)$이다.

삼각형의 넓이를 구하는 공식에 의하여

$S_1=(\triangle\mathrm{POQ}$의 넓이$)=\dfrac{1}{2}(a-1)\left(1-\dfrac{1}{a}\right)$

$S_2=(\triangle\mathrm{PBB'}$의 넓이$)=\dfrac{1}{2}\times1\times\dfrac{1}{a}$

$S_1+S_2=\dfrac{a}{2}+\dfrac{1}{a}-1\geq2\sqrt{\dfrac{a}{2}\times\dfrac{1}{a}}-1$

$=\sqrt{2}-1$

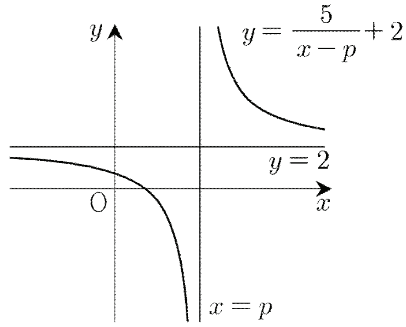
(단, 등호는 $\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{a}(a=\sqrt{2})$일 때 성립한다.)

답 ⑤

U054 | 답 ①

[풀이]

유리함수 $y=\dfrac{5}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 p만큼, y축의 방향으로 2만큼 평행이동하면 유리함수 $y=\dfrac{5}{x-p}+2$의 그래프와 일치한다.



위의 그림처럼

$(x\text{절편})=p-\dfrac{5}{2}\ge 0$,

$(y\text{절편})=2-\dfrac{5}{p}\ge 0$

이면 유리함수의 그래프는 제3사분면을 지나지 않는다.

따라서 p의 범위는

$p\ge\dfrac{5}{2}$

따라서 정수 p의 최솟값은 3이다.

답 ①

U055 | 답 ⑤

[풀이]

$\dfrac{2x+b}{x-a}=\dfrac{2(x-a)+2a+b}{x-a}$

$=2+\dfrac{2a+b}{x-a}$이므로

유리함수 $f(x)$의 두 점근선은

$x=a,\ y=2$

유리함수 $f(x-4)-4$의 두 점근선은

$x=a+4,\ y=-2$

유리함수 $f^{-1}(x)$의 두 점근선은

$x=2,\ y=a$

조건 (가)에 의하여

$a+4=2,\ -2=a$ 즉, $a=-2$

함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=2+\dfrac{-4+b}{x+2}$

조건 (나)에 의하여

$-4+b=3$ 즉, $b=7$

$\therefore\ a+b=5$

답 ⑤

U056 | 답 ③

[풀이]

유리함수 $f(x)$의 두 점근선은 각각

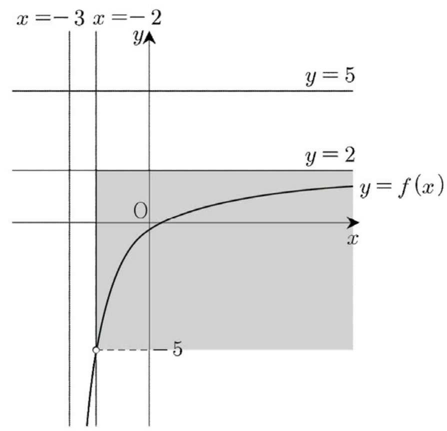
$x=-\dfrac{d}{c},\ y=\dfrac{a}{c}$

유리함수 $f(x)$의 두 점근선이 각각

$x=-2,\ y=5$

가 아니면 아래 그림처럼 함수 $f:X\to Y$는 일대일대응이 될 수 없다.

예를 들어 $a=2,\ b=c=1,\ d=3$이라고 하자.



위의 그림처럼

함수 $f(x)=\dfrac{2x-1}{x+3}$의 정의역이 X일 때,

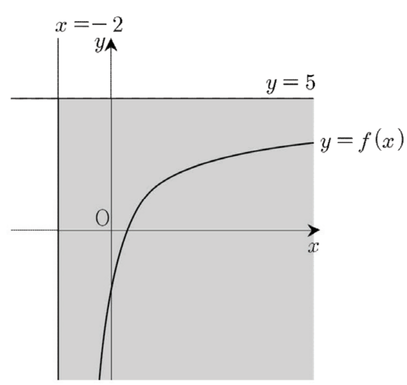
치역은 $\{y\mid -5<y<2\}(\ne Y)$이므로

함수 $f:X\to Y$는 일대일대응이 아니다.

아래 그림처럼 함수 $f(x)$의 두 점근선이 각각

$x=-2,\ y=5$

이어야 한다.



귀류법에 의하여

$-\dfrac{d}{c}=-2,\ \dfrac{a}{c}=5$ 즉, $d=2c,\ a=5c$

a, b, c, d는 19 이하의 자연수이므로

$1 \le d = 2c \le 19$, $1 \le a = 5c \le 19$

c의 범위는 $1 \le c \le 3$이고,

b의 범위는 $1 \le b \le 19$이다.

$a+b+c+d = 5c+b+c+2c$

$= 8c+b$

이므로

$9 \le a+b+c+d \le 43$

(단, 왼쪽 등호는 $b=c=1$일 때,

오른쪽 등호는 $c=3$, $b=19$일 때 성립한다.)

이때, 두 변수 b와 c는 서로 독립임을 명심해야 한다.

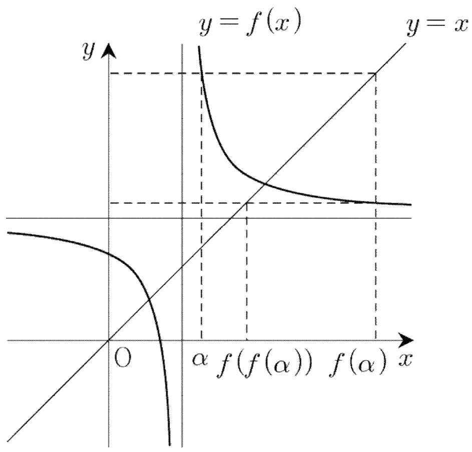
따라서 구하는 값은 52이다.

답 ③

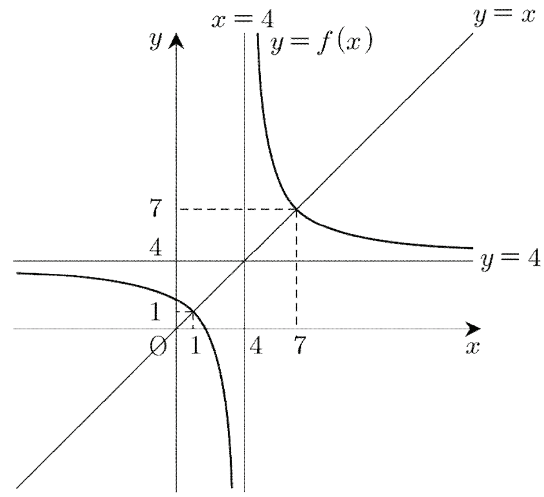
U057 | 답 ①

[풀이]

아래 그림처럼 유리함수 $f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점이 직선 $y=x$ 위에 있지 않으면 $f(f(\alpha)) \ne \alpha$, $\alpha \ne -\frac{d}{c}$인 α가 적어도 하나 이상 존재한다. 이때, 조건 (다)는 성립하지 않는다.



따라서 유리함수 $f(x)$의 그래프의 두 점근선의 교점은 직선 $y=x$ 위에 있어야 한다.(←귀류법) 그리고 조건 (나)에 의하여 유리함수 $f(x)$의 그래프와 직선 $y=x$의 두 교점은 각각 $(1,\ 1)$, $(7,\ 7)$이다. (아래 그림)



$-\frac{d}{c} = 4$, $\frac{a}{c} = 4$

즉, $d = -4c$, $a = 4c$에서

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x) = \frac{4cx+b}{cx-4c} \qquad \cdots ㉠$$

조건 (가), (나)에 의하여

$f(1) = \frac{4c+b}{-3c} = 1$, $f(7) = \frac{28c+b}{3c} = 7$

정리하면

$b = -7c$

이를 ㉠에 대입하여 정리하면

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x) = \frac{4x-7}{x-4}$$

$\therefore\ f(5) = 13$

답 ①

U058 | 답 ②

[풀이]

함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x) = \frac{k}{x-m} + 5$$

조건 (가)에 의하여

$g(a) = \frac{k}{a-m} + 5 = b$

에서 $k = (a-m)(b-5)$

$g(b) = \frac{k}{b-m} + 5 = a$

에서 $k = (b-m)(a-5)$

$(a-m)(b-5) = (b-m)(a-5)$

정리하면

$(b-a)(m-5) = 0$

$a \neq b$이므로 $m=5$이다.

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=\dfrac{k}{x-5}+5$

함수 $\dfrac{1}{f(x)-g(x)}$의 방정식은

$\dfrac{1}{f(x)-g(x)}=-\dfrac{1}{5k}(x^2-5x)$

$=-\dfrac{1}{5k}\left(x-\dfrac{5}{2}\right)^2+\dfrac{5}{4k}$

조건 (나)에 의하여

$\dfrac{5}{4k}=\dfrac{5}{24}$에서 $k=6$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=\dfrac{6}{x-5}+5$

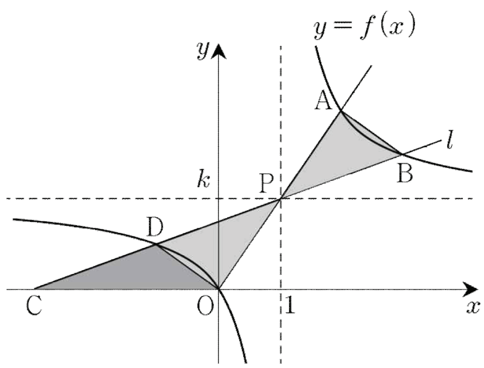
$\therefore\ g(9)=\dfrac{13}{2}$

답 ②

U059 | 답 20

[풀이]

직선 l이 곡선 $y=f(x)$와 만나는 두 점 중에서 점 B가 아닌 점을 D라고 하자.



곡선 $y=f(x)$는 점 P에 대하여 대칭이므로

두 점 A, O는 점 P에 대하여 서로 대칭이고,

두 점 B, D는 점 P에 대하여 서로 대칭이다.

두 삼각형 APB, OPD는 합동이므로

두 삼각형 APB, OPD의 넓이는 같다.

문제에서 주어진 조건에서 $S_2=2S_1$이므로

세 삼각형

APB, OPD, DCO

의 넓이는 모두 같다.

($\triangle$OPD의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\overline{\text{PD}}$

$\times$(점 O에서 직선 l까지의 거리),

($\triangle$DCO의 넓이)$=\dfrac{1}{2}\overline{\text{DC}}$

$\times$(점 O에서 직선 l까지의 거리)

이므로 $\overline{\text{PD}}=\overline{\text{DC}}$이다.

점 D는 선분 PC의 중점이므로

점 D의 y좌표는 $\dfrac{k}{2}$이다.

이를 함수 $f(x)$의 방정식에 대입하면

$\dfrac{k}{2}=\dfrac{k}{x-1}+k$ 풀면 $x=-1$

따라서 점 D의 좌표는 $\text{D}\left(-1,\ \dfrac{k}{2}\right)$이다.

점 C는 선분 DP의 $1:2$ 외분점이므로

(점 C의 x좌표)$=\dfrac{1\times1-2\times(-1)}{1-2}=-3$

즉, 점 C의 좌표는 $\text{C}(-3,\ 0)$이다.

직선 l의 방정식은

$l:\ y=\dfrac{k}{4}(x+3)$ 즉, $kx-4y+3k=0$

점과 직선 사이의 거리 공식에 의하여

$\dfrac{3k}{\sqrt{k^2+16}}=1$ 즉, $\sqrt{k^2+16}=3k$

양변을 제곱하여 정리하면

$k^2=2$

$\therefore\ 10k^2=20$

답 20

U060 | 답 320

[풀이]

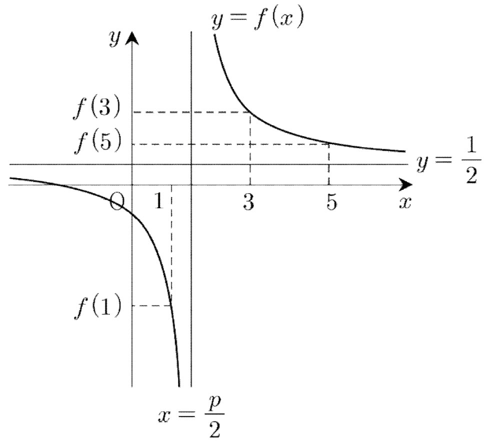
유리함수 $f(x)$의 두 점근선의 방정식은 각각

$x=\dfrac{p}{2},\ y=\dfrac{1}{2}$

문제에서 주어진 조건

$f(1)<f(5)<f(3)$

에 의하여 함수 $f(x)$의 그래프는 다음과 같아야 한다.



$1<\frac{p}{2}<3$에서 $2<p<6$

자연수 p의 최솟값은 3이므로 $m=3$이다.

$p=3$일 때,

$f(1)=-2n-1(<0)$, $f(3)=\frac{2n+3}{3}(>0)$,

$f(5)=\frac{2n+5}{7}(>0)$

유리함수 $g(x)$의 두 점근선은 각각

$x=-q$, $y=2$

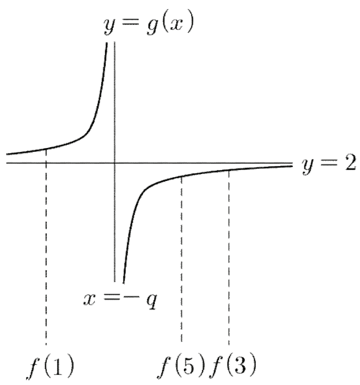
문제에서 주어진 조건

$g(f(5))<g(f(3))<g(f(1))$

에 의하여 함수

$g(x)=\frac{n-2q}{x+q}+2$

의 그래프는 다음과 같아야 한다.



위의 그림에서 다음의 두 부등식이 성립해야 한다.

$f(1)<-q<f(5)$, $n-2q<0$

즉, $-2n-1<-q<\frac{2n+5}{7}$, $n-2q<0$

정리하면

$\frac{n}{2}<q<2n+1$

n이 홀수일 때,

$\frac{n}{2}<\frac{n+1}{2}\leq q\leq 2n<2n+1$이므로

$a_n=2n-\frac{n+1}{2}+1=\frac{3n+1}{2}$

n이 짝수일 때,

$\frac{n}{2}<\frac{n}{2}+1\leq q\leq 2n<2n+1$

$a_n=2n-\frac{n}{2}-1+1=\frac{3n}{2}$

$\therefore \sum_{k=1}^{20} a_k$

$=(2+5+8+\cdots+29)$

$+(3+6+9+\cdots+30)$

$=\frac{2+29}{2}\times 10+\frac{3+30}{2}\times 10$

$=320$

답 320

U061 | 답 ④

[풀이]

문제에서 주어진 이차함수의 그래프는 위로 볼록이므로

$a<0$ ⋯ ㉠

문제에서 주어진 이차함수의 그래프의 y절편은 양수이므로

$c>0$ ⋯ ㉡

문제에서 주어진 이차함수의 방정식을 정리하면

$y=a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2+\frac{4ac-b^2}{4a}$

꼭짓점의 x좌표는 양수이므로

$-\frac{b}{2a}>0$ ⋯ ㉢

㉠, ㉡, ㉢에서

$a<0$, $b>0$, $c>0$

이제 $a=-1$, $b=1$, $c=1$로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

무리함수 $f(x)$의 방정식은

$f(x)=-\sqrt{-x+1}-1$

무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 원점에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 따라서 무리함수 $y=f(x)$의 그래프는 ④와 같다.

답 ④

U062 | 답 ①

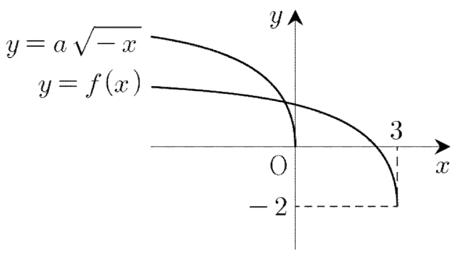
[풀이]

$f(x)$가 무리함수이므로 $a\neq 0$이다.

함수 $f(x)$의 방정식을 정리하면

$f(x)-c=a\sqrt{-(x-b)}$

함수 $y=f(x)$의 그래프는 함수 $y=a\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 b만큼, y축의 방향으로 c만큼 평행이동한 것이다. 따라서 $a>0$이고, $b=3$, $c=-2$이다. (아래 그림)



문제에서 주어진 이차함수의 방정식을 정리하면

$y=a\left(x+\dfrac{3}{2a}\right)^2-\dfrac{9+8a}{4a}$이므로

꼭짓점의 좌표는 $\left(-\dfrac{3}{2a},\ -\dfrac{9+8a}{4a}\right)$이다.

그런데 $a>0$이므로 이차함수는 아래로 볼록이고, 꼭짓점의 x좌표는 음수이다.

그리고

$a\times 0^2+b\times 0+c=c<0$

이므로 이차함수의 y절편은 음수이다.

따라서 이차함수의 그래프는 ①과 같이 그려진다.

답 ①

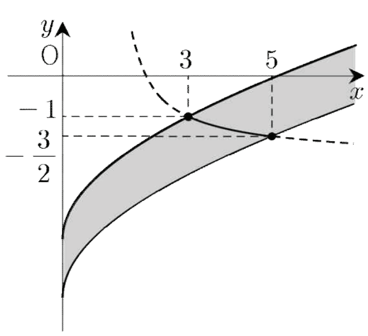
U063 | 답 16

[풀이]

$\dfrac{-2x+4}{x-1}=\dfrac{-2(x-1)+2}{x-1}=-2+\dfrac{2}{x-1}$

이므로 유리함수 $y=\dfrac{2}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 -2만큼 평행이동하면 유리함수 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}$의 그래프와 일치한다.

$3\le x\le 5$일 때, 곡선 $y=\dfrac{-2x+4}{x-1}$는 아래 그림과 같다.



곡선 $y=\sqrt{3x}+k$가 점 $(3,\ -1)$을 지나면 k는 최댓값을 갖는다.

$-1=\sqrt{3^2}+k$에서 $k=-4$

$\therefore\ M^2=16$

답 16

U064 | 답 ②

[풀이]

함수 $f(x)$는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=\dfrac{1}{5}x^2+\dfrac{1}{5}k(x\ge 0)$을 x에 대하여 풀면

$x=\sqrt{5y-k}$

x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

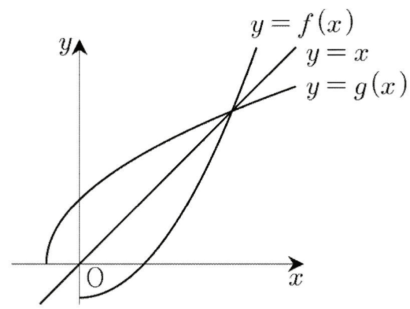
$y=\sqrt{5x-k}\left(x\ge\dfrac{k}{5}\right)$

따라서 $g(x)=f^{-1}(x)$이다.

(1) $k<0$인 경우

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와

직선 $y=x$의 위치관계는 다음과 같다.

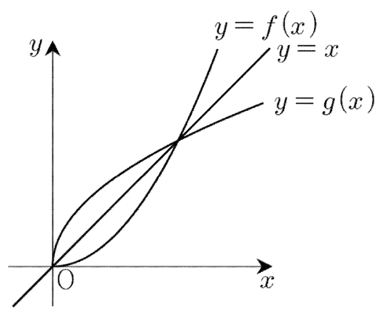


두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수는 1이다.

(2) $k=0$인 경우

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와

직선 $y=x$의 위치관계는 다음과 같다.

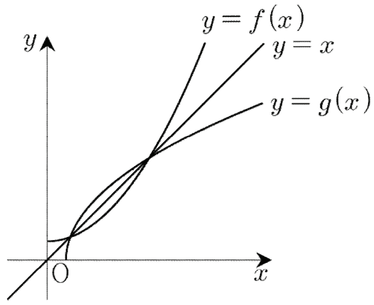


두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수는 2이다.

(3) $0<k<\dfrac{25}{4}$인 경우

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와

직선 $y=x$의 위치관계는 다음과 같다.

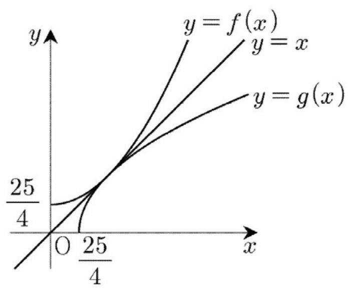


두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수는 2이다.

(4) $k=\dfrac{25}{4}$인 경우

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와

직선 $y=x$의 위치관계는 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수는 1이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$가 접할 때의 k의 값은 다음과 같이 구한다.

$$f(x)=x \Leftrightarrow \frac{1}{5}x^2+\frac{k}{5}=x$$

$\Leftrightarrow x^2-5x+k=0$

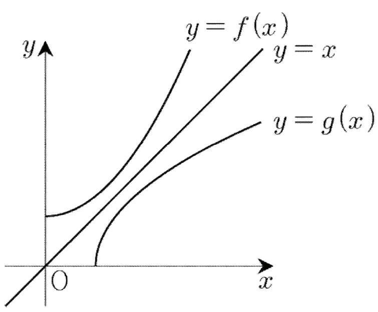
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(-5)^2-4k=0$에서 $k=\dfrac{25}{4}$

(5) $k>\dfrac{25}{4}$인 경우

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$와

직선 $y=x$의 위치관계는 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$의 교점의 개수는 0이다.

(1)~(5)에서 k의 값의 범위는

$0 \le k < \dfrac{25}{4}(=6.25)$

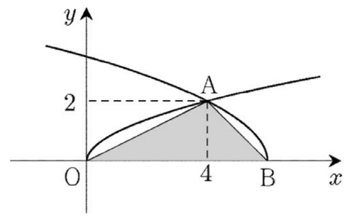
정수 k의 개수는 7이다.

답 ②

U065 | 답 ②

[풀이]

함수 $y=\sqrt{ax}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후에 x축의 방향으로 6만큼 평행이동하면 함수 $y=\sqrt{a(6-x)}$ $(a>0)$의 그래프와 일치한다.



($\triangle$AOB의 넓이)

$=\dfrac{1}{2}\overline{\mathrm{OB}}\times$(점 A의 y좌표)

$=3\times$(점 A의 y좌표)$=6$

이므로

(점 A의 y좌표)$=2$

점 A는 곡선 $y=\sqrt{x}$ 위에 있으므로

$2=\sqrt{x}$에서 (점 A의 x좌표)$=4$

점 A의 좌표는 $(4,\ 2)$이다.

점 A는 곡선 $y=\sqrt{a(6-x)}$ 위에 있으므로

$2=\sqrt{a\times 2}$에서 $\therefore\ a=2$

답 ②

U066 | 답 ④

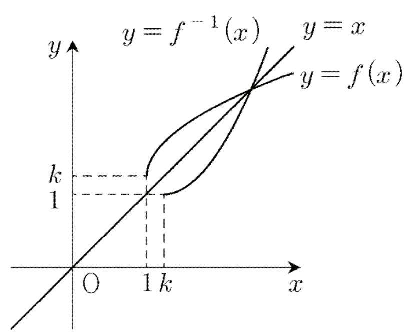
[풀이] ★

무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 무리함수 $y=f(x)$의 그래프를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 함수 $y=f^{-1}(x)$의 그래프와 일치한다.

(1) $k>1$인 경우

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$와

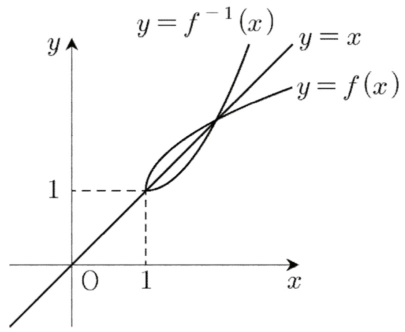
직선 $y=x$를 한 평면 위에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점의 개수는 1이다.

(2) $k=1$인 경우

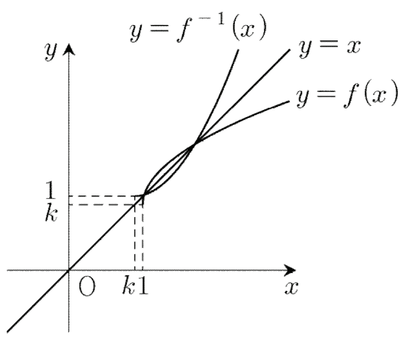
두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$와
직선 $y=x$를 한 평면 위에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점의 개수는 2이다.

(3) $\frac{3}{4}<k<1$인 경우

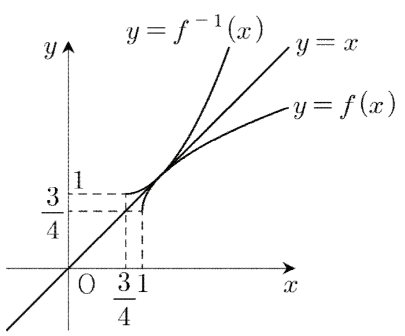
두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$와
직선 $y=x$를 한 평면 위에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점의 개수는 2이다.

(4) $k=\frac{3}{4}$인 경우

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$와
직선 $y=x$를 한 평면 위에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점의 개수는 1이다. (접한다.)

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$가 접할 때의 k의 값은 다음과 같이 구한다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=x$의 방정식을 연립하면

$\sqrt{x-1}+k=x$ 즉, $\sqrt{x-1}=x-k$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-(2k+1)x+k^2+1=0$

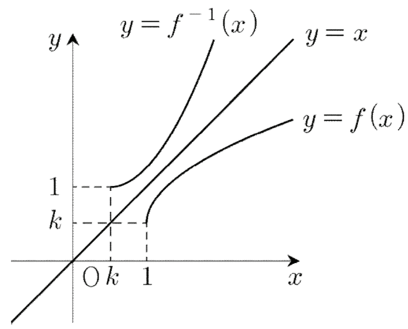
이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D=(2k+1)^2-4(k^2+1)$

$=4k-3=0$에서 $k=\frac{3}{4}$

(5) $k<\frac{3}{4}$인 경우

두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$와
직선 $y=x$를 한 평면 위에 나타내면 다음과 같다.



두 곡선 $y=f(x)$, $y=f^{-1}(x)$의 교점의 개수는 0이다.

(1)~(5)에서 k의 범위는

$\frac{3}{4}<k\leq 1$

따라서 k의 최댓값은 1이다.

답 ④

U067 | 답 ②

[풀이]

무리함수 $y=\sqrt{ax}$는 직선 $y=x$ 위의 점 $(2,\ 2)$를 지나므로

$2=\sqrt{2a}$

양변을 제곱하여 a의 값을 구하면

$a=2$

곡선 $y=\sqrt{2x+b}$의 방정식과 직선 $y=x$의 방정식을 연립하면

$\sqrt{2x+b}=x$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-2x-b=0$

이 이차방정식의 판별식을 D라고 하면

$D/4=(-1)^2-(-b)=0$

$b=-1$

$\therefore\ ab=2\times(-1)=-2$

답 ②

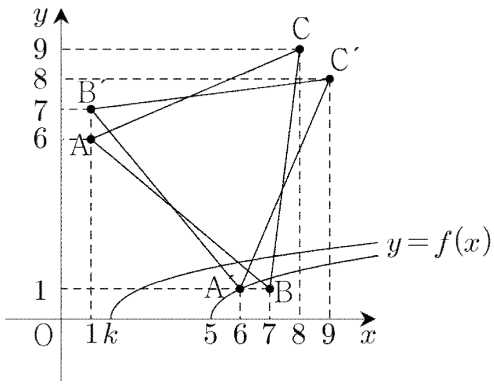
U068 | 답 ②

[풀이]

아래 그림처럼 삼각형 ABC를 직선 $y=x$에 대하여 대칭이동하면 삼각형 A′B′C′와 일치한다고 하자. 이때, 세 점 A′, B′, C′의 좌표는 각각

A′$(6,\ 1)$, B′$(1,\ 7)$, C′$(9,\ 8)$

이다.



곡선 $y=f(x)$가 두 삼각형 ABC, A′B′C′와 각각 만나면 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시킨다.

위의 그림처럼 $k\le 5$이면 곡선 $y=f(x)$는 두 삼각형 ABC, A′B′C′와 각각 만난다.

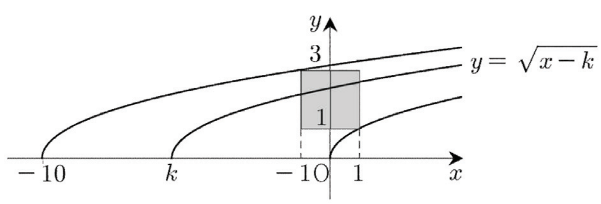
따라서 k의 최댓값은 5이다.

답 ②

U069 | 답 ①

[풀이]

집합 A에서 주어진 연립부등식을 좌표평면 위에 나타내면 아래 그림과 같다.



무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 무리함수 $y=\sqrt{x-k}$의 그래프와 일치한다.

다음의 필요충분조건을 생각하자.

$A\cap B\neq\varnothing$

$\Leftrightarrow$

곡선 $y=\sqrt{x-k}$가 집합 A에서 주어진 부등식의 영역을 지난다. (경계포함)

곡선 $y=\sqrt{x-k}$이 $(-1,\ 3)$을 지나면 k의 값이 최소가 된다.

$3=\sqrt{-1-k}$

양변을 제곱하여 정리하면

$k=-10$

따라서 k의 최솟값은 -10이다. (참고로 k의 최댓값은 0이다.)

답 ①

U070 | 답 ③

[풀이]

직선 $y=f(x)$의 기울기의 부호가 음이고, y절편의 부호가 양이므로

$a<0,\ b>0$

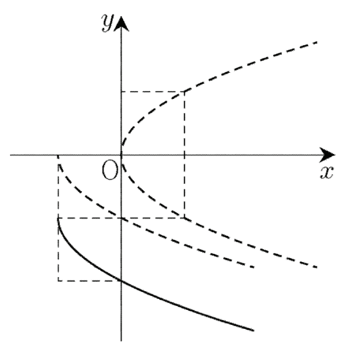
직선 $y=g(x)$의 기울기의 부호가 양이고, y절편의 부호가 음이므로

$c>0,\ d<0$

$a=d=-1,\ b=c=1$로 두어도 풀이의 일반성을 잃지 않는다.

이제 무리함수 $y=-\sqrt{x+1}-1$의 그래프의 개형을 그리면 된다.

무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후에 x축의 방향으로 -1만큼, y축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 함수 $y=-\sqrt{x+1}-1$의 그래프와 일치한다.



답 ③

U071 | 답 ①

[풀이]

함수 $g(x)$의 방정식은

$$g(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{2}x^2 & (x\ge 0)\\[2mm] \dfrac{1}{4}x & (x<0)\end{cases}$$

$x\ge 0$일 때, 두 함수

$y=g(x),\ y=-\dfrac{1}{4}x^2+3$

의 방정식을 연립하면

$\frac{1}{2}x^2=-\frac{1}{4}x^2+3,\ \frac{3}{4}x^2=3$

풀면

$x=2$

$x<0$일 때, 두 함수

$y=g(x),\ y=-\frac{1}{4}x^2+3$

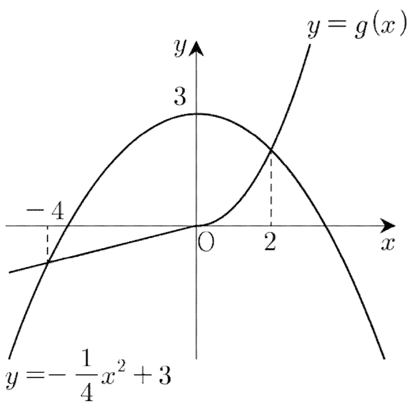
의 방정식을 연립하면

$\frac{1}{4}x=-\frac{1}{4}x^2+3,\ (x+4)(x-3)=0$

풀면

$x=-4$

두 함수 $g(x),\ y=-\frac{1}{4}x^2+3$의 그래프는



문제에서 주어진 부등식을 만족시키는

해집합은 $-4\le x\le 2$이다.

$a=-4,\ b=2$

$\therefore\ a+b=-2$

답 ①

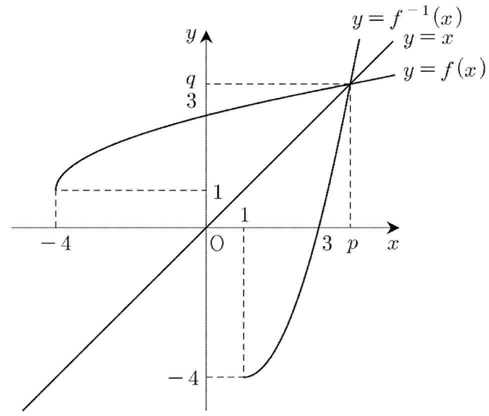
U072 | 답 ③

[풀이]

무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -4만큼, y축의 방향으로 1만큼 평행이동하면 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 따라서

$a=4,\ b=1$ 즉, $f(x)=\sqrt{x+4}+1$

아래 그림처럼 두 함수 $f(x),\ f^{-1}(x)$의 그래프는 오직 한 개의 교점을 가지며, 이 교점은 직선 $y=x$ 위에 있다.



곡선 $y=f(x)$과 직선 $y=x$의 방정식을 연립하자.

$\sqrt{x+4}+1=x$에서 $\sqrt{x+4}=x-1$

양변을 제곱하여 정리하면

$x^2-3x-3=0$

이차방정식의 근의 공식에 의하여

$p=\frac{3+\sqrt{21}}{2}(=q)$

$\therefore\ p+q=3+\sqrt{21}$

답 ③

U073 | 답 ②

[풀이]

함수 $g(x)$는 일대일대응이므로 역함수가 존재한다.

$y=x^2-4x+6=(x-2)^2+2$

(단, $x\ge 2,\ y\ge 2$)

x에 대하여 풀면

$x=\sqrt{y-2}+2$

(단, $x\ge 2,\ y\ge 2$)

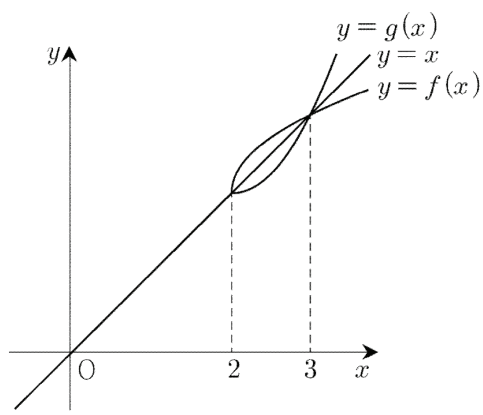
x와 y를 서로 바꾸면 구하는 역함수는

$y=\sqrt{x-2}+2$ 즉, $g^{-1}(x)=\sqrt{x-2}+2$

(단, $x\ge 2,\ y\ge 2$)

따라서 함수 $g(x)$의 역함수는 함수 $f(x)$이다.

두 함수 $f(x),\ g(x)$의 그래프는 다음과 같다.



다음과 같은 필요충분조건을 생각하자.

$f(x)=g(x)$(단, $x \geq 2$)

$\Leftrightarrow$

$g(x)=x$(단, $x \geq 2$)

$\Leftrightarrow$

$x^2-5x+6=0$(단, $x \geq 2$)

좌변을 인수분해하면

$(x-2)(x-3)=0$(단, $x \geq 2$)

$\Leftrightarrow$

$x=2$ 또는 $x=3$

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 두 교점은

$(2,\ 2)$, $(3,\ 3)$

구하는 값을 d라고 하자.

두 점 사이의 거리 공식에 의하여

$d=\sqrt{(3-2)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$

답 ②

U074 | 답 ③

[풀이]

함수 $f(x)$의 방정식을 변형하면

$f(x)=a\left(x+\dfrac{b}{2a}\right)^2+\dfrac{4ac-b^2}{4a}$

문제에서 주어진 꼭짓점의 좌표에 의하여

$-\dfrac{b}{2a}=\dfrac{1}{2}$ 즉, $b=-a$ $\cdots$ ㉠

$\dfrac{4ac-b^2}{4a}=\dfrac{9}{2}$ 즉, $4ac-b^2=18a$ $\cdots$ ㉡

곡선 $y=f(x)$가 점 $(0,\ 4)$를 지나므로

$f(0)=c=4$ $\cdots$ ㉢

㉢을 ㉡에 대입하여 정리하면

$2a=-b^2$ $\cdots$ ㉣

㉠을 ㉣에 대입하여 정리하면

$a(a+2)=0$

풀면

$a=-2$ ($\because a \neq 0$)

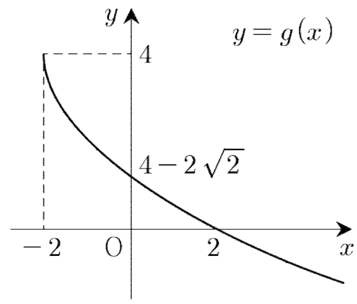
이를 ㉠에 대입하면

$b=2$

함수 $g(x)$의 방정식은

$g(x)=-2\sqrt{x+2}+4$

무리함수 $y=2\sqrt{x}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동한 후에 x축의 방향으로 -2만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동하면 무리함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다.



▸ ㄱ. (참)

함수 $g(x)$의 정의역은

$x \geq -2$

함수 $g(x)$의 치역은

$y \leq 4$

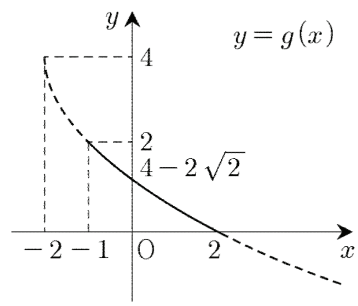
▸ ㄴ. (거짓)

곡선 $y=g(x)$는 제3사분면을 지나지 않는다.

▸ ㄷ. (참)

$f(x)=0 \Leftrightarrow -2(x-2)(x+1)=0$

풀면 $x=-1(=\alpha)$ 또는 $x=2(=\beta)$



$-1 \leq x \leq 2$에서

$0=g(2) \leq g(x) \leq g(-1)=2$

이므로 이 구간에서 함수 $g(x)$의 최댓값은 2이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ③

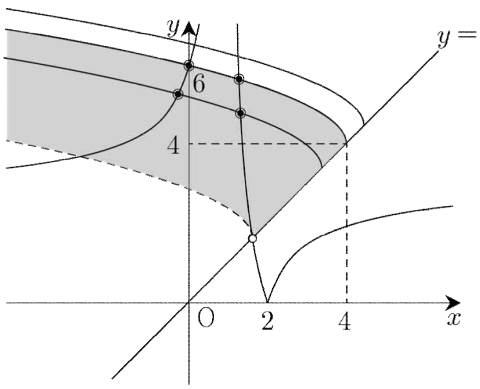
U075 | 답 ④

[풀이]

$\dfrac{3x-6}{x-1}=3-\dfrac{3}{x-1}$

이므로 유리함수 $y=-\dfrac{3}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 3만큼 평행이동하면 유리함수 $y=\dfrac{3x-6}{x-1}$의 그래프와 일치한다.

함수 $y=\left|\dfrac{3x-6}{x-1}\right|$의 그래프는 다음과 같다.



무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동한 후, x축의 방향으로 k만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 무리함수 $y=k+\sqrt{k-x}$의 그래프와 일치한다. 이때, 이 무리함수의 그래프는 직선 $y=x$ 위의 점 $(k,\ k)$를 항상 지난다. (위의 그림)

곡선 $y=k+\sqrt{k-x}$가 점 $(0,\ 6)$을 지날 때의 k의 값을 구하자.

$6=k+\sqrt{k}$에서 $6-k=\sqrt{k}$

양변을 제곱하여 정리하면

$k^2-13k+36=0$, $(k-4)(k-9)=0$

풀면

$k=4$

이때, $k\neq 9$이다. 왜냐하면 $6\neq 9+\sqrt{9}$이기 때문이다.

두 곡선

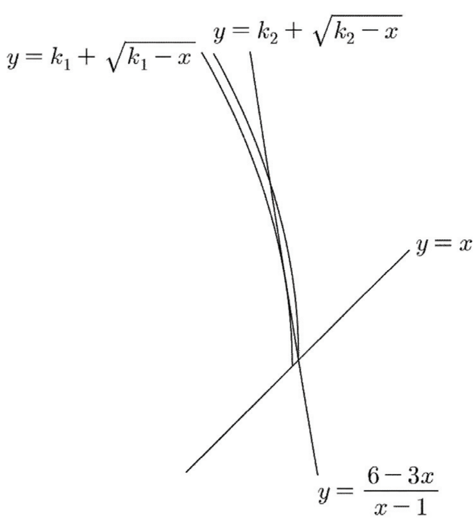
$$y=k+\sqrt{k-x},\ y=\frac{6-3x}{x-1}$$

가 접할 때의 k의 값을 k_1,

곡선 $y=k+\sqrt{k-x}$가

곡선 $y=\dfrac{6-3x}{x-1}$와 직선 $y=x$의 교점을 지날 때의 k의 값을 k_2라고 하자.

아래는 k가 k_1, k_2의 값을 가질 때의 상황을 확대하여 그린 것이다.



문제에서 주어진 방정식은

$k>4$일 때, 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

$k=4$일 때, 0과 한 음의 실근을 갖는다. (◯)

$k_2<k<4$일 때, 한 음의 실근과 한 양의 실근을 갖는다. (◯)

$k_1<k\leq k_2$일 때, 한 음의 실근과 서로 다른 두 양의 실근을 갖는다.

$k=k_1$일 때, 한 음의 실근과 양의 중근을 갖는다. (◯)

$k<k_1$일 때, 한 음의 실근을 갖는다.

(단, ◯는 문제에서 주어진 조건을 모두 만족시키는 경우)

따라서 k의 최댓값은 4이다.

답 ④

U076 | 답 ④

[풀이]

함수 $y=-\sqrt{k(x+2)}+4$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{kx}$의 그래프를 x축에 대하여 대칭이동, x축의 방향으로 -2만큼 평행이동, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 것이다.

함수 $y=\sqrt{-k(x-2)}-4$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{kx}$의 그래프를 y축에 대하여 대칭이동, x축의 방향으로 2만큼 평행이동, y축의 방향으로 -4만큼 평행이동한 것이다.

▸ ㄱ. (참)

함수 $y=-\sqrt{k(x+2)}+4$의 방정식에

x 대신에 $-x$, y 대신에 $-y$를 대입하면

$-y=-\sqrt{k(-x+2)}+4$

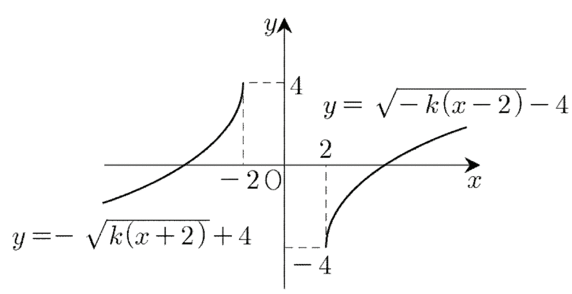
정리하면

$y=\sqrt{-k(x-2)}-4$

따라서 문제에서 주어진 두 곡선은 원점에 대하여 서로 대칭이다.

▸ ㄴ. (거짓)

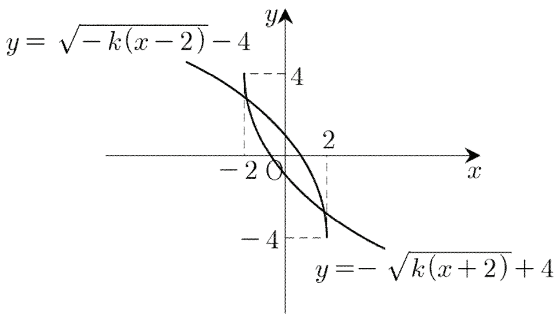
$k<0$일 때 문제에서 주어진 두 곡선을 그리면 다음과 같다.



위의 그림처럼 두 곡선은 만나지 않는다.

▸ ㄷ. (참)

• $0<k<16$인 경우



문제에서 주어진 두 곡선은 두 점에서 만난다.

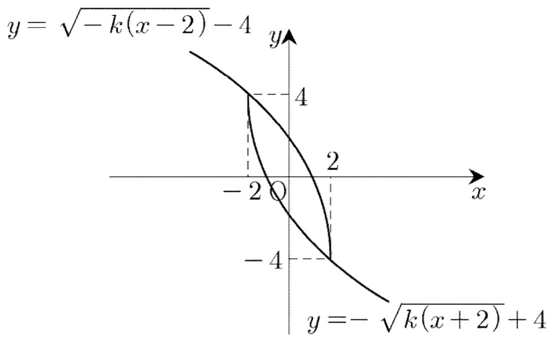
• $k=16$인 경우

곡선 $y=-\sqrt{k(x+2)}+4$이 점 $(2,\ -4)$를 지날 때의 k의 값을 구하자.

$-4=-\sqrt{4k}+4$

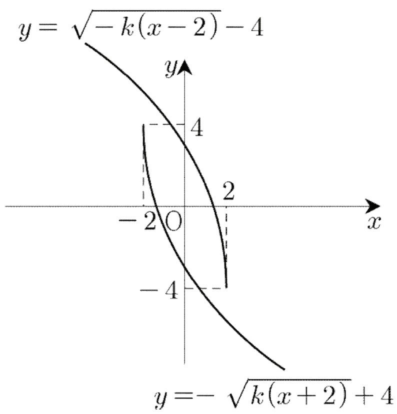
정리하면

$\sqrt{4k}=8,\ \sqrt{k}=4,\ k=16$



문제에서 주어진 두 곡선은 두 점에서 만난다.

• $k>16$인 경우



문제에서 주어진 두 곡선은 만나지 않는다.

이상에서 문제에서 주어진 두 곡선이 서로 다른 두 점에서 만나도록 하는 k의 범위는

$0<k\le 16$

따라서 k의 최댓값은 16이다.

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄷ이다.

답 ④

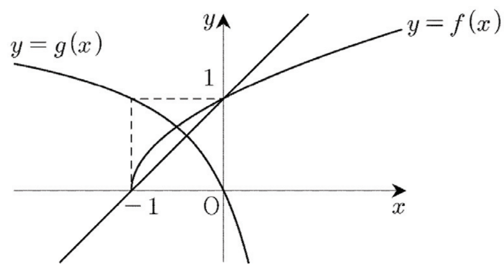
U077 | 답 ④

[풀이]

무리함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -1만큼 평행이동하면 무리함수 $y=f(x)$의 그래프와 일치한다. 이때, 무리함수 $y=f(x)$의 y절편은 1이다.

유리함수 $y=\dfrac{p}{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 q만큼 평행이동하면 유리함수 $y=g(x)$의 그래프와 일치한다. ($p>0$이므로 유리함수 $y=\dfrac{p}{x}$의 그래프는 제1사분면과 제3사분면에만 그려진다.) 이때, 유리함수 $y=g(x)$의 x절편과 y절편은 각각 $1-\dfrac{p}{q}$, $q-p$이다.

두 함수 $f(x)$, $g(x)$의 그래프는



정의역이 $-1\le x\le 0$인 함수 $f(x)$의 치역은

$0\le y\le 1$

위의 그림처럼

$(x\text{절편})=1-\dfrac{p}{q}=0$이고,

$g(-1)=-\dfrac{p}{2}+q=1$이면

정의역이 $-1\le x\le 0$인 함수 $g(x)$의 치역은

$0\le y\le 1$

이다.

p, q에 대한 연립방정식을 풀면

$p=q=2$

$\therefore\ p+q=4$

답 ④

U078 | 답 ④

[풀이]

무리함수 $y=g(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 $-k$만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동하면 무리함수

$y=\sqrt{4(x+k)}-4+k \qquad \cdots(*)$

의 그래프와 일치한다. 이때, 무리함수는 직선 $y=-x+1$ 위의 점 $(1-k,\ k)$를 항상 지난다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x+1$의 방정식을 연립하면

$\frac{1}{4}x^2+1=-x+1$

정리하면

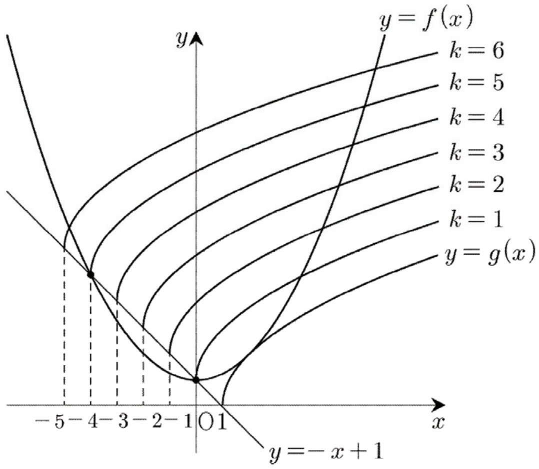
$x^2+4x=0$

좌변을 인수분해하면

$x(x+4)=0$

풀면

$x=0$ 또는 $x=-4$



위의 그림에서

$k=1$ 또는 $k\geq 5$일 때,

함수 (*)의 그래프와 함수 $f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 2이다.

$2\leq k\leq 4$일 때,

함수 (*)의 그래프와 함수 $f(x)$의 그래프의 교점의 개수는 1이다.

따라서 구하는 값은 $2+3+4=9$이다.

답 ④

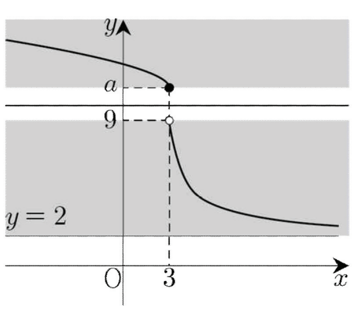
U079 | 답 ⑤

[풀이] ★

a의 값에 따른 함수 $f(x)$의 그래프의 개형을 생각하자.

(1) $a>9$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



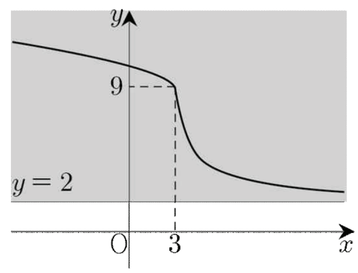
함수 $f(x)$의 치역은

$2<y<9$, $y\geq a$

이므로 조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(2) $a=9$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



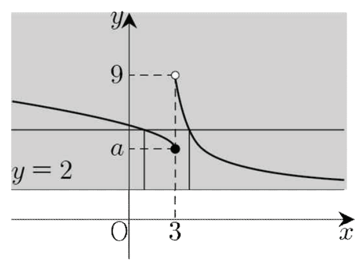
함수 $f(x)$는 실수 전체의 집합에서

집합 $\{y|y>2\}$으로의 일대일대응이므로

조건 (가), (나)를 모두 만족시킨다.

(3) $2<a<9$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는

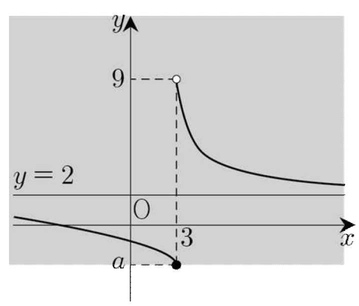


위의 그림처럼 함수 $f(x)$는 일대일함수가 아니므로

조건 (나)를 만족시키지 않는다.

(4) $a\leq 2$인 경우

함수 $f(x)$의 그래프는



함수 $f(x)$의 치역은 $\{y|y\geq a\}$이므로

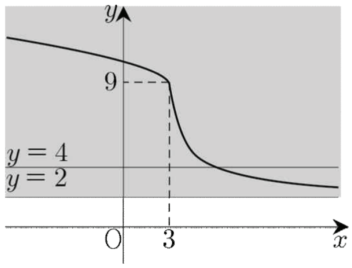
조건 (가)를 만족시키지 않는다.

(1)~(4)에서 $a=9$이다.

함수 $f(x)$의 방정식은

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{2x+3}{x-2} & (x>3)\\ \sqrt{3-x}+9 & (x\leq 3)\end{cases}$$

함수 $f(x)$의 그래프의 개형은



$f(2)=\sqrt{3-2}+9=10$이므로

$f(2)f(k)=40$에서 $f(k)=4$이다.

방정식 $f(k)=4$는 $\dfrac{2k+3}{k-2}=4$

풀면

$\therefore\ k=\dfrac{11}{2}$

답 ⑤

V 경우의 수 (교사경)

1	⑤	2	①	3	64	4	④	5	③
6	36	7	④	8	380	9	336	10	132
11	228	12	576	13	⑤	14	432	15	①
16	82	17	60	18	②	19	108	20	126
21	④	22	④	23	288	24	64	25	450
26	①	27	72	28	②	29	④	30	81
31	18	32	528	33	①	34	③		

V001 | 답 ⑤

[풀이1]

세 자리 자연수를 $100a+10b+c$라고 하자.

(단, $1\le a\le 9$, $0\le b\le 9$, $0\le c\le 9$)

• (1) $b=0(c\ne 0)$ 또는 $c=0(b\ne 0)$인 경우

$b=0$이면 $a=c$이어야 한다.

101, 202, $\cdots$, 909

이므로 경우의 수는 9이다.

마찬가지 방법으로 $c=0$인 경우의 수는 9이다.

• (2) $b\ne 0$, $c\ne 0$인 경우

우선 $a=b+c$인 경우를 생각하자.

$2=1+1$,

$3=2+1=1+2$,

$4=3+1=2+2=1+3$,

$5=4+1=3+2=2+3=1+4$,

$6=5+1=4+2=3+3=2+4=1+5$,

$\vdots$

$9=8+1=7+2=\cdots=1+8$

이므로 경우의 수는 $36(=1+2+\cdots+8)$이다.

마찬가지의 방법으로

$b=a+c$, $c=a+b$

인 경우의 수도 각각 36, 36이다.

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는

$2\times 9+3\times 36=126$

답 ⑤

[풀이2]

세 자리 자연수를 $100a+10b+c$라고 하자.

(단, $1\le a\le 9$, $0\le b\le 9$, $0\le c\le 9$)

• (1) $b=0(c\ne 0)$ 또는 $c=0(b\ne 0)$인 경우

$b=0$이면 $a=c$이어야 한다.

101, 202, $\cdots$, 909

이므로 경우의 수는 9이다.

마찬가지 방법으로 $c=0$인 경우의 수는 9이다.

• (2) $b\ne 0$, $c\ne 0$이고 a, b, c 중에서 어느 두 수만 같고, 나머지 한 수는 다른 경우

$2=1+1$, (→211, 121, 112)

$4=2+2$, (→422, 242, 224)

$6=3+3$, (→633, 363, 336)

$8=4+4$ (→844, 484, 448)

이므로 경우의 수는 $12(=4\times 3)$이다.

• (3) $b\ne 0$, $c\ne 0$이고 a, b, c 중에서 어느 두 수도 같지 않은 경우

$3=2+1$,

$4=3+1$,

$5=4+1=3+2$,

$6=5+1=4+2$,

$7=6+1=5+2=4+3$,

$8=7+1=6+2=5+3$,

$9=8+1=7+2=6+3=5+4$,

이므로 경우의 수는 $96(=16\times {}_3\mathrm{P}_3)$이다.

(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는

$18+12+96=126$

답 ⑤

V002 | 답 ①

[풀이]

빨간 공, 파란 공, 노란 공을 각각 ●, ○, ◎, 빨간 상자, 파란 상자, 노란 상자를 각각 R, B, Y라고 하자.

$5=5+0$

$=4+1$

$=3+2$

$=2+3$

$=1+4$

$=0+5$

아래와 같이 빨간 공 5개를 상자에 담는 경우의 수는 6이다.

R	B	Y
	●●●●●	
	●●●●	●
	●●●	●●
	●●	●●●
	●	●●●●
		●●●●●

이제 아래와 같이 노란 공을 상자에 담으면 된다.

R	B	Y
◎◎◎◎◎	●●●●●	
◎◎◎◎	●●●●◎	●
◎◎◎	●●●◎◎	●●
◎◎	●●◎◎◎	●●●
◎	●◎◎◎◎	●●●●
	◎◎◎◎◎	●●●●●

이제 아래와 같이 파란 공을 상자에 담으면 된다.

R	B	Y
◎◎◎◎◎	●●●●●	○○○○○
◎◎◎◎○	●●●●◎	●○○○○
◎◎◎○○	●●●◎◎	●●○○○
◎◎○○○	●●◎◎◎	●●●○○
◎○○○○	●◎◎◎◎	●●●●○
○○○○○	◎◎◎◎◎	●●●●●

따라서 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$6\times1\times1=6$이다.

답 ①

V003 | 답 64

[풀이]

집합 X의 두 원소의 합의 절댓값이 1이 되는 경우를 모두 쓰자. (조건(가))

$|3+(-2)|=1$

$|2+(-1)|=1$

$|1+(-2)|=1$

$|2+(-3)|=1$

순서쌍 $(f(3),\ f(-3))$을 모두 쓰면 다음과 같다. (조건(나))

$(1,\ -2),\ (2,\ -1),\ (2,\ -3),\ (3,\ -2)$

순서쌍 $(f(3),\ f(-3))$의 개수는 4이다.

마찬가지의 방법으로

순서쌍 $(f(2),\ f(-2))$, $(f(1),\ f(-1))$의 개수는 각각 4, 4이다.

곱의 법칙에서 구하는 경우의 수는

$4^3=64$

답 64

V004 | 답 ④

[풀이]

A ◎◯◯◯◯

B는 ◎에 올 수 없고, ◯에 와야 한다.

예를 들어

A ◎◯◯B◯

와 같이 B가 올 수 있다. 이때, C, D, E, F가 오는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_4P_4=4!$이다.

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙과 순열의 수에 의하여

$4\times4!=96$

답 ④

V005 | 답 ③

[풀이]

남자와 여자를 각각 ●, ○로 표시하자.

남자끼리 좌우에 이웃하여 앉지 않고, 여자끼리 좌우에 이웃하여 앉지 않는 경우를 다음과 같이 구분하자. (3가지의 경우로 구분)

○	●	○
●	○	●
●	○	●

●	○	●
○	●	○
●	○	●

●	○	●
●	○	●
○	●	○

구하는 경우의 수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

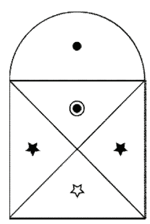
$3\times4!\times5!$

이때, 4!, 5!은 각각 여자와 남자를 앉히는 경우의 수이다.

답 ③

V006 | 답 36

[풀이1]



두 영역 ●, ⦿에 색칠하는 방법의 수는

${}_3P_2=6$

이다. 세 영역 ★, ★, ☆에 색칠하는 방법의 수는

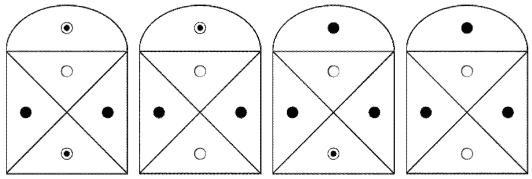
$\underbrace{2\times2}_{\text{★, ★에 같은 색}}+\underbrace{2!\times1}_{\text{★, ★에 다른 색}}=6$

따라서 구하는 방법의 수는

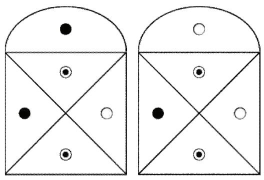
$6\times6=36$

답 36

[풀이2]



●, ◉, ○에 오는 색을 결정하는 경우의 수는 각각 3, 2, 1 이다.
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $4 \times 3! = 24$이다.



●, ◉, ○에 오는 색을 결정하는 경우의 수는 각각 3, 2, 1 이다.
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 $2 \times 3! = 12$이다.
구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$24 + 12 = 36$
답 36

V007 | 답 ④

[풀이]
세 가지 색 빨강, 파랑, 노랑 보자기를 각각 R, B, Y라고 하자.
첫 번째 행에 보자기를 덮을 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_3P_3 = 3!$이다. 예를 들어 다음과 같은 경우를 생각하자.

R	B	Y

2행 1열, 3행 1열에 보자기를 덮는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_2P_2 = 2!$이다. 예를 들어 다음과 같은 경우를 생각하자.

R	B	Y
Y		
B		

이제 남은 보자기를 덮으면 다음과 같다.

R	B	Y
Y	R	B
B	Y	R

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$3! \times 2! = 12$
답 ④

V008 | 답 380

[풀이]
7을 4번 이상 사용하면 7끼리 이웃하지 않도록 다섯 자리의 자연수를 만들 수 없다. 따라서 사용되는 7의 개수는 2 또는 3이다.
(1) 7을 2번 사용하는 경우
전체를 다음과 같은 3가지의 경우로 구분하자.
7○7○○ 또는 ○7○7○ 또는 ○○7○7
또는 ○7○○7 또는 7○○7○ 또는 7○○○7
각 경우에 대하여 3개의 ○에 1, 2, 3, 5, 9를 배열하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_5P_3(=60)$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$6 \times 60 = 360$
(2) 7을 3번 사용하는 경우
7○7○7
위의 경우에 대하여 2개의 ○에 1, 2, 3, 5, 9를 배열하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_5P_2(=20)$이다.
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$360 + 20 = 380$
답 380

V009 | 답 336

[풀이1]
우선 각 자리의 수 중 어떤 두 수의 합이 9가 되는 경우를 생각하자.
$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$
예를 들어 183, 217, 693, 457, …등이다.
$9 = 8 + 1$에 대하여
18○, 1○8, ○18, 81○, 8○1, ○81
: ○에 1, 8이 아닌 수가 들어가는 경우 (6×7가지)
합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$4 \times 42 = 168$
따라서 구하는 경우의 수는
${}_9P_3 - 168 = 504 - 168 = 336$
답 336

[풀이2]
우선 각 자리의 수 중 어떤 두 수의 합이 9가 되는 경우를 생각하자.
$9 = 1 + 8 = 2 + 7 = 3 + 6 = 4 + 5$
예를 들어 183, 217, 693, 457, …등이다.

• (1) 9가 포함되는 경우

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, ⑨

9◉◎, ◉9◎, ◉◎9 (3가지)

예를 들어 ◉에 5가 온다고 하면(8가지), ◎에 4가 올 수 없다.

1, 2, 3, $\cancel{4}$, ⑤, 6, 7, 8, ⑨

◎에 올 수 있는 수의 개수는 6이다.

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$3\times8\times6=144$

• (2) 9가 포함되지 않는 경우

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, $\cancel{9}$

예를 들어 백의 자리에 3이 온다고 하자. (8가지)

3◉◎

이때, ◉에 6이 올 수 없다.

1, 2, ③, 4, 5, $\cancel{6}$, 7, 8, $\cancel{9}$

예를 들어 ◉에 7이 온다고 하면(6가지), ◎에 2가 올 수 없다.

1, $\cancel{2}$, ③, 4, 5, $\cancel{6}$, ⑦, 8, $\cancel{9}$

◎에 올 수 있는 수의 개수는 4이다.

곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$8\times6\times4=192$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$144+192=336$

답 336

V010 | 답 132

▶ 실전풀이: [풀이2]

[풀이1]

세 자리의 자연수를 ◎◉◍라고 하자. (단, ◎는 백의 자리 수, ◉는 십의 자리 수, ◍는 일의 자리 수이다.)

자연수 ◎×◉×◍는 10의 배수이므로 세 수 ◎, ◉, ◍ 중에서 어떤 한 수는 5이고, 나머지 두 수 중에서 적어도 한 수는 2의 배수이어야 한다.

예를 들어 ◎가 5라고 하자.

5◉◍

◉와 ◍가 모두 2의 배수인 경우:

경우의 수는 ${}_4\mathrm{P}_2=12$

◉가 2의 배수이고, ◍가 홀수인 경우:

경우의 수는 $4\times4=16$

◉가 홀수이고, ◍가 2의 배수인 경우:

경우의 수는 $4\times4=16$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times(12+16+16)=132$

이때, 3은 5를 배열할 경우의 수이다.

답 132

[참고]

여집합을 이용하여 경우의 수를 구할 수도 있다.

◉와 ◍가 5가 아닌 자연수일 경우:

${}_8\mathrm{P}_2=56$

◉와 ◍가 모두 홀수인 경우:

${}_4\mathrm{P}_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$3\times(56-12)=132$

[풀이2]

세 자리의 자연수의 '백의 자리의 수', '십의 자리의 수', '일의 자리의 수' 중에서 오직 한 수는 5이어야 한다. 그리고 나머지 자리의 두 수 중에서 적어도 하나는 2의 배수이어야 한다.

5가 아닌 9 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 수를 선택할 경우의 수는

${}_8\mathrm{C}_2=28$

5가 아닌 9 이하의 자연수 중에서 서로 다른 두 홀수를 선택할 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2=6$

따라서 구하는 경우의 수는

$3!\times(28-6)=132$

이때, 3!은 선택된 세 개의 수를 나열하는 순열의 수이다.

답 132

V011 | 답 228

[풀이1] ★

네 수 a, b, c, d 중에서 적어도 하나 이상의 수가 짝수이면 네 수의 곱 $abcd$는 짝수이다.

따라서 전체 경우의 수에서 네 수 a, b, c, d가 모두 홀수인 경우를 제외하면 된다.

순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_5\mathrm{P}_2\times{}_4\mathrm{P}_2=240$

네 수 a, b, c, d가 모두 홀수인 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 순열의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_3\mathrm{P}_2\times{}_2\mathrm{P}_2=12$

따라서 구하는 경우의 수는

$240-12=228$

답 228

[풀이2]

(1) ab가 짝수, cd가 짝수인 경우
순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
$({}_5P_2 - {}_3P_2) \times ({}_4P_2 - {}_2P_2) = 140$

(2) ab가 짝수, cd가 홀수인 경우
순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
$({}_5P_2 - {}_3P_2) \times {}_2P_2 = 28$

(3) ab가 홀수, cd가 짝수인 경우
순열의 수와 곱의 법칙에 의하여
${}_3P_2 \times ({}_4P_2 - {}_2P_2) = 60$

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$140 + 28 + 60 = 228$

답 228

V012 | 답 576

[풀이]

1행의 모자걸이에 모자를 거는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 4!이다.

예를 들어 다음과 같이 1행의 모자걸이에 4개의 모자가 걸렸다고 하자.

	1열	2열	3열	4열
1행	A	B	C	D
2행				
3행				

2행1열의 모자걸이에 모자 B가 걸렸을 때, 2행의 나머지 모자걸이에 3개의 모자를 거는 방법의 수는 3이다. (아래의 경우1, 경우2, 경우3)

• (경우1)

	1열	2열	3열	4열
1행	A	B	C	D
2행	B	A	D	C
3행	C	D	A	B
	C	D	B	A
	D	C	A	B
	D	C	B	A

3행의 모자걸이에 4개의 모자를 거는 방법의 수는 4이다.

• (경우2)

	1열	2열	3열	4열
1행	A	B	C	D
2행	B	C	D	A
3행	C	D	A	B
	D	A	B	C

3행의 모자걸이에 4개의 모자를 거는 방법의 수는 2이다.

• (경우3)

	1열	2열	3열	4열
1행	A	B	C	D
2행	B	D	A	C
3행	C	A	D	B
	D	C	B	A

3행의 모자걸이에 4개의 모자를 거는 방법의 수는 2이다.

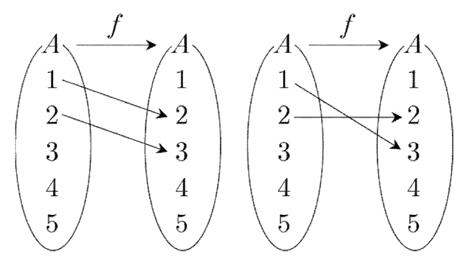
따라서 구하는 방법의 수는 곱의 법칙과 합의 법칙에 의하여
$4! \times 3 \times (4+2+2) = 576$

답 576

V013 | 답 ⑤

[풀이]

(1) $|f(1) - f(2)| = 1$인 경우
집합 $\{f(1), f(2)\}$로 가능한 집합을 모두 쓰면
$\{1, 2\}, \{2, 3\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}$
예를 들어
$\{f(1), f(2)\} = \{2, 3\}$
일 때, 다음의 두 경우가 가능하다.

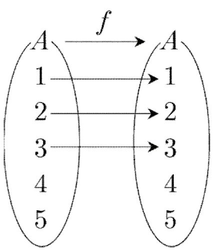


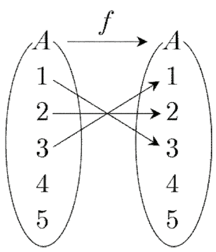
위의 각 경우에 대하여
$f(3), f(4), f(5)$
의 값을 정하는 방법의 수는
순열의 수에 의하여 $3!(=6)$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$4 \times 2 \times 3! = 48$

(2) $|f(2) - f(3)| = 1$인 경우
(1)과 마찬가지의 방법으로
경우의 수는 48이다.

(3) $|f(1) - f(2)| = 1$이고
$|f(2) - f(3)| = 1$인 경우

집합 $\{f(1),\ f(2),\ f(3)\}$으로 가능한 집합을 모두 쓰면
$\{1,\ 2,\ 3\}$, $\{2,\ 3,\ 4\}$, $\{3,\ 4,\ 5\}$
예를 들어
$\{f(1),\ f(2),\ f(3)\}=\{1,\ 2,\ 3\}$
일 때, 다음의 두 경우가 가능하다.





위의 각 경우에 대하여
$f(4),\ f(5)$
의 값을 정하는 방법의 수는
순열의 수에 의하여 $2!(=2)$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$3\times2\times2!=12$
(1), (2), (3)에서 구하는 경우의 수는
$48+48-12=84$
답 ⑤

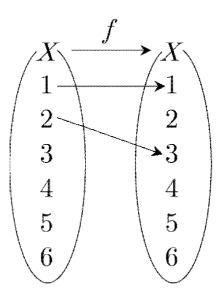
V014 | 답 432

[풀이]
조건 (나)에서 주어진 등식에서
$f(1)-f(2)=f(2)-f(3)$
(즉, $f(1)+f(3)=2f(2)$)
또는
$f(1)-f(2)=f(3)-f(2)$
(즉, $f(1)=f(3)$)
조건 (가)에서 f는 일대일대응이므로
$f(1)\neq f(3)$
따라서 $f(1)+f(3)=2f(2)$이다.
세 수 $f(1),\ f(2),\ f(3)$은 이 순서대로 등차수열을 이룬다.
이 수열의 공차를 d라고 하자.
(1) $|d|=1$인 경우
순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은
$(1,\ 2,\ 3)$, $(3,\ 2,\ 1)$,
$(2,\ 3,\ 4)$, $(4,\ 3,\ 2)$,
⋮
$(5,\ 6,\ 7)$, $(7,\ 6,\ 5)$
$f(4),\ f(5),\ f(6),\ f(7)$의 값을 정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $4!(=24)$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$5\times2\times4!=240$
(2) $|d|=2$인 경우
순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은
$(1,\ 3,\ 5)$, $(5,\ 3,\ 1)$,
$(2,\ 4,\ 6)$, $(6,\ 4,\ 2)$,
$(3,\ 5,\ 7)$, $(7,\ 5,\ 3)$
$f(4),\ f(5),\ f(6),\ f(7)$의 값을 정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $4!(=24)$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$3\times2\times4!=144$
(3) $|d|=3$인 경우
순서쌍 $(f(1),\ f(2),\ f(3))$은
$(1,\ 4,\ 7)$, $(7,\ 4,\ 1)$
$f(4),\ f(5),\ f(6),\ f(7)$의 값을 정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $4!(=24)$이다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$2\times4!=48$
(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$240+144+48=432$
답 432

[참고]
두 실수 a, b에 대하여 다음의 필요충분조건이 성립한다.
$|a|=|b| \Leftrightarrow a=b$ 또는 $a=-b$
시험에 자주 출제되는 필요충분조건이므로 반드시 기억해두어야 한다.

V015 | 답 ①

[풀이]
(1) $f(1)=1$인 경우
$f(f(1))=f(1)=1$이므로
조건 (나)는 성립한다.
조건 (다)에 의하여
$f(2)=f(1)+2=3$



조건 (가)에 의하여
$f(3),\ f(4),\ f(5),\ f(6)$의 값을 결정하는 방법의 수는 순열

의 수에 의하여 $4!(=24)$이다.

(2) $f(1) \neq 1$인 경우

$f(1)=2$라고 하자.

조건 (다)에 의하여

$f(2)=f(1)+2=4$

그런데

$f(f(1))=f(2)=4 \neq 1$

이므로 조건 (나)는 성립하지 않는다.

이는 가정에 모순이다.

따라서 $f(1) \neq 2$이다.

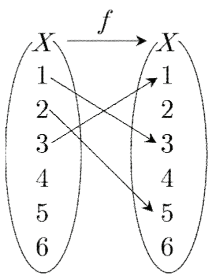
$f(1)=3$이라고 하자.

조건 (다)에 의하여

$f(2)=f(1)+2=5$

조건 (나)에 의하여

$f(f(1))=f(3)=1$



$f(4)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 결정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $3!(=6)$이다.

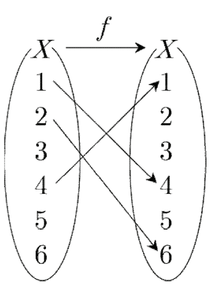
$f(1)=4$라고 하자.

조건 (다)에 의하여

$f(2)=f(1)+2=6$

조건 (나)에 의하여

$f(f(1))=f(4)=1$



$f(3)$, $f(5)$, $f(6)$의 값을 결정하는 방법의 수는 순열의 수에 의하여 $3!(=6)$이다.

$f(1) \geq 5$라고 하자.

조건 (다)에서

$f(2)=f(1)+2 \geq 7$

이므로, 이는 가정에 모순이다.

(1), (2)에서 함수 f의 개수는 합의 법칙에 의하여

$24+6+6=36$

답 ①

V016 | 답 82

[풀이]

- (1) 2명의 여학생이 A 구역에 배정받을 경우

A 구역에 배정받는 남학생의 수는 1 또는 2 또는 3이다. 각각의 경우에 대하여 B 구역에 배정받는 남학생의 수는 5 또는 4 또는 3이다.

경우의 수는 조합의 수와 합의 법칙에 의하여

${}_6C_1+{}_6C_2+{}_6C_3=6+15+20=41$

- (2) 2명의 여학생이 B 구역에 배정받을 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는 41이다.

따라서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$41+41=82$

답 82

V017 | 답 60

[풀이1]

문제에서 주어진 9개의 점 중에서 3개의 점을 택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

${}_9C_3=84$

그런데 택한 3개의 점이 한 직선 위에 있으면 삼각형이 결정되지 않으므로, 이에 해당하는 경우의 수를 제외해야 한다.

선분 AF 위의 6개의 점 중에서 3개의 점을 택할 경우의 수는

${}_6C_3=20$

선분 CI 위의 4개의 점 중에서 3개의 점을 택할 경우의 수는

${}_4C_3=4$

따라서 구하는 경우의 수는

$84-(20+4)=60$

답 60

[풀이2]

한 직선 위에 있는 세 점은 삼각형을 결정하지 않는다.

- (1) 삼각형의 한 변이 선분 AF 위에 있고, 꼭짓점이 선분 GI 위에 있는 경우

선분 AF 위의 6개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여

${}_6C_2=15$

선분 GI 위의 3개의 점 중에서 1개의 점을 택하는 경우의 수는 3이다.

경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$15 \times 3=45$

- (2) 삼각형의 한 변이 선분 CI 위에 있고, 꼭짓점이 선분

AB 또는 DF 위에 있는 경우
선분 CI 위의 4개의 점 중에서 2개의 점을 택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여
$_4C_2 = 6$
선분 AB 또는 선분 DF 위의 5개의 점 중에서 1개의 점을 택하는 경우의 수는 5이다.
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$6 \times 5 = 30$
이제 (1), (2)에 모두 해당하는 경우의 수를 구하자.
예를 들어 삼각형 DCG는 (1), (2)에 모두 해당한다.
점 C를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 개수는 곱의 법칙에 의하여
$5 \times 3 = 15$
이때, 5는 선분 AF에서 점 C를 제외한 점들의 개수이고, 3은 선분 CI에서 점 C를 제외한 점들의 개수이다.
구하는 경우의 수는
$45 + 30 - 15 = 60$
답 60

V018 | 답 ②

[풀이]
5개의 자연수의 합이 짝수인 경우를 다음과 같이 두 경우로 구분하여 생각하자.
(경우1) 짝+짝+짝+홀+홀
경우의 수는 $_4C_3 \times {}_4C_2 = 24$
(경우2) 짝+홀+홀+홀+홀
경우의 수는 $_4C_1 \times {}_4C_4 = 4$
합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는
$24 + 4 = 28$
답 ②

V019 | 답 108

[풀이1]
사자, 토끼, 호랑이를 각각 ◉◎◍로 두자. 문제에서 주어진 9개의 카드를 각각
1◉, 2◉, 3◉
1◎, 2◎, 3◎
1◍, 2◍, 3◍
로 두자.
$5 = 3 + 1 + 1 = 2 + 2 + 1$
• (1) 특정 번호가 적힌 카드를 모두 택하는 경우
즉, $5 = 3 + 1 + 1$인 경우이다.
예를 들어 다음과 같이 카드를 택하면 된다.
1◉, 1◎, 1◍, 2◉, 3◎
경우의 수는 $3 \times {}_3C_1 \times {}_3C_1 = 27$이다.
이때, 3은 특정 번호가 적힌 카드를 모두 택하는 경우의 수이다. 예를 들어 1이 적힌 카드를 모두 택했다고 하자. 가운데 $_3C_1$은 2가 적힌 세 개의 카드 중에서 하나를 택하는 경우의 수, 마지막 $_3C_1$은 3이 적힌 세 개의 카드 중에서 하나를 택하는 경우의 수이다.
• (2) 특정 번호가 적힌 카드를 모두 택하지는 않는 경우
즉, $5 = 2 + 2 + 1$인 경우이다.
예를 들어 다음과 같이 카드를 택하면 된다.
1◉, 1◎, 2◎, 2◍, 3◉
경우의 수는 $3 \times {}_3C_1 \times {}_3C_2 \times {}_3C_2 = 81$이다.
이때, $3 \times {}_3C_1$은 특정 번호가 적힌 카드를 한 장만 택하는 경우의 수이다. 예를 들어 3이 적힌 카드 중에서 3◉을 택했다고 하자. $_3C_2 \times {}_3C_2$는 1, 2가 적힌 카드 중에서 각각 두 장 씩을 택하는 경우의 수이다.
(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로
구하는 경우의 수는 $27 + 81 = 108$이다.
답 108

[풀이2]
9장의 카드 중에서 서로 다른 5장의 카드를 선택하는 경우의 수는 $_9C_5$, 이 중에서 특정 숫자가 적힌 카드가 아예 선택되지 않는 경우의 수는
$3 \times 2 \times {}_3C_2$ $\cdots (*)$
이다. 이때, (*)의 3은 제외되는 숫자를 결정하는 경우의 수이다. 예를 들어 1이 적힌 3장의 카드는 선택하지 않는다고 하자. 그러면
2(사자), 2(토끼), 2(호랑이)
3(사자), 3(토끼)
또는
2(사자), 2(토끼)
3(사자), 3(토끼), 3(호랑이)
⋮
등이 가능하다. 이때, (*)의 2는 같은 숫자가 적힌 3장의 카드를 선택하는 경우의 수이다.
마지막으로 (*)의 $_3C_2$는 남은 3개의 카드(모두 같은 숫자가 적힘)에서 2장을 선택하는 경우의 수이다.
따라서 구하는 경우의 수는
$_9C_5 - 3 \times 2 \times {}_3C_2 = 126 - 18 = 108$
답 108

V020 | 답 126

[풀이]

문제에서 a, b, c, d의 대소 관계가 주어졌으므로
집합 S의 개수와 순서쌍 $(a,\ b,\ c,\ d)$의 개수는 같다.
따라서 구하는 경우의 수는 11 이상 19 이하의 자연수 중에서 서로 다른 4개를 택하는 조합의 수 ${}_9\mathrm{C}_4 = 126$이다.

답 126

V021 | 답 ④

[풀이]

3명의 경위가 서로 다른 세 순찰차에 탑승할 경우의 수는 $3!$이다.
8명의 순경이 3명, 3명, 2명의 세 조로 나뉘어 서로 다른 세 순찰차에 탑승할 경우의 수는

$$\left({}_8\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_3 \times {}_2\mathrm{C}_2 \times \frac{1}{2!}\right) \times 3!$$

따라서 곱의 법칙에 의하여 탑승하는 방법의 수는

$$3! \times \left({}_8\mathrm{C}_3 \times {}_5\mathrm{C}_3 \times {}_2\mathrm{C}_2 \times \frac{1}{2!}\right) \times 3!$$

$= 6 \times 1680 = 10080$

답 ④

V022 | 답 ④

[풀이] ★

서로 다른 n개를 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\cdots$, $\boxed{n}$이라 하자.

(1)

$\boxed{1}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}$이다.

$$\left(\because \underbrace{\underbrace{1}_{\text{선택}} \quad \underbrace{2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n}_{n-1\text{개 중에서 } r-1\text{개를 선택}}}_{n\text{개 중에서 } r\text{개를 선택}}\right)$$

$\boxed{2}$를 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}$이다.

$$\left(\because \underbrace{\underbrace{2}_{\text{선택}} \quad \underbrace{1,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ n}_{n-1\text{개 중에서 } r-1\text{개를 선택}}}_{n\text{개 중에서 } r\text{개를 선택}}\right)$$

$\boxed{3}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}$이다.

$$\left(\because \underbrace{\underbrace{3}_{\text{선택}} \quad \underbrace{1,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ n}_{n-1\text{개 중에서 } r-1\text{개를 선택}}}_{n\text{개 중에서 } r\text{개를 선택}}\right)$$

⋮

$\boxed{n}$을 포함하여 r개를 선택하는 조합의 수는 $\boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}$이다.

$$\left(\because \underbrace{\underbrace{n}_{\text{선택}} \quad \underbrace{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n-1}_{n-1\text{개 중에서 } r-1\text{개를 선택}}}_{n\text{개 중에서 } r\text{개를 선택}}\right)$$

이상을 모두 합하면 $n \times \boxed{{}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}}$이다. $\cdots$㉠

(2) 그런데 위의 ㉠에 있는 조합의 수 중에는 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\cdots$, $\boxed{r}$의 r개로 구성된 하나의 조합이 $\boxed{r}$번 반복되어 계산되었다.
왜냐하면 다음과 같이 r번 중복되기 때문이다.

$\boxed{1}$을 포함하여 r개를 선택하는 경우

$$: \underbrace{\underbrace{1}_{1\text{개}} \quad \underbrace{2,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ r}_{r-1\text{개}}}_{r\text{개}}$$

$\boxed{2}$를 포함하여 r개를 선택하는 경우

$$: \underbrace{\underbrace{2}_{1\text{개}} \quad \underbrace{1,\ 3,\ 4,\ \cdots,\ r}_{r-1\text{개}}}_{r\text{개}}$$

$\boxed{3}$을 포함하여 r개를 선택하는 경우

$$: \underbrace{\underbrace{3}_{1\text{개}} \quad \underbrace{1,\ 2,\ 4,\ \cdots,\ r}_{r-1\text{개}}}_{r\text{개}}$$

⋮

$\boxed{r}$을 포함하여 r개를 선택하는 경우

$$: \underbrace{\underbrace{r}_{1\text{개}} \quad \underbrace{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ r-1}_{r-1\text{개}}}_{r\text{개}}$$

(중략)

(1), (2)로부터 서로 다른 n개에서 r개를 선택하는 조합의 수 ${}_n\mathrm{C}_r$는

$${}_n\mathrm{C}_r = \boxed{\frac{n}{r}} \times {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$$

(=(1)에서 구한 경우의 수를 r로 나눈다.)

이상에서

(가): ${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}$

(나): r

(다): $\dfrac{n}{r}$

답 ④

V023 | 답 288

[풀이]

행과 열이 다음과 같다고 하자.

	1열	2열	3열
1행	1	2	3
2행	4	5	6
3행	7	8	9
4행	*	0	#

조건 (나)에 의하여 0은 반드시 누르게 된다.

- (1) 1열에서 2개의 숫자를 누르는 경우

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.

	1열	2열	3열
1행	1	2	3
2행	4	5	6
3행	7	8	9
4행	*	0	#

조합의 수, 순열의 수, 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$_3C_2 \times 4! = 72$

이때, $_3C_2$는 1열에서 2개의 숫자를 선택하는 경우의 수이고, 4!은 선택된 4개의 수를 나열하는 경우의 수이다.

- (2) 2열에서 2개의 숫자를 누르는 경우

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.

	1열	2열	3열
1행	1	2	3
2행	4	5	6
3행	7	8	9
4행	*	0	#

조합의 수, 순열의 수, 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$_3C_1 \times {}_2C_1 \times 4! = 144$

이때, $_3C_1$은 2열에서 0이 아닌 숫자 1개를 선택하는 경우의 수이고, $_2C_1$은 1열에서 숫자 1개를 선택하는 경우의 수이고, 4!은 선택된 4개의 수를 나열하는 경우의 수이다.

- (3) 3열에서 2개의 숫자를 누르는 경우

(1)과 마찬가지의 방법으로 경우의 수는 72이다.

(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로

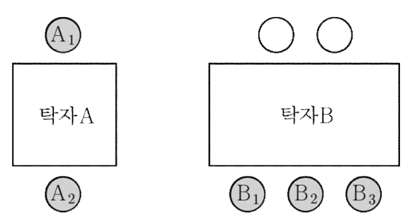
$72 + 144 + 72 = 288$

답 288

V024 | 답 64

[풀이]

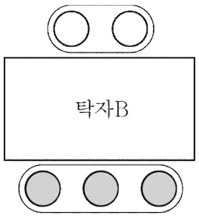
탁자 A에 앉은 2명을 A_1, A_2, 탁자 B에 앉은 3명을 B_1, B_2, B_3이라고 하자. 분임토의를 할 때, 아래 그림과 같이 앉았다고 하자.



탁자B에서 위의 두 자리를 (○○), 아래의 세 자리를 (○○○)라고 하자.

(1) (○○○)에 세 사람 B_1, B_2, B_3가 모두 앉을 경우

아래 그림처럼 두 사람 A_1, A_2는 ○에 앉고, 세 사람 B_1, B_2, B_3는 ●에 앉는다.



두 사람 A_1, A_2가 (○○)에 앉을 경우의 수는 순열의 수에 의하여 $_2P_2$, 세 사람 B_1, B_2, B_3가 (○○○)에 앉을 경우의 수는 2이다. (아래 표)

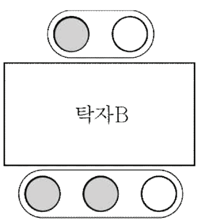
B_1	B_2	B_3
B_2	B_3	B_1
B_3	B_1	B_2

따라서 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$_2P_2 \times 2 = 4$

(2) (○○○)에 세 사람 B_1, B_2, B_3 중에서 두 사람만이 앉을 경우

예를 들어 아래 그림처럼 두 사람 A_1, A_2는 ○에 앉고, 세 사람 B_1, B_2, B_3는 ●에 앉는다.



두 사람 A_1, A_2가 (○○)와 (○○○)에 앉을 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 $2 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1$, 세 사람 B_1, B_2, B_3가 남은 자리에 앉을 경우의 수는 3이다. (아래 표)

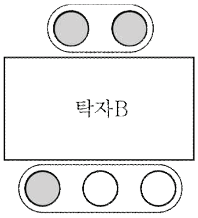
B_1	B_2	B_3
B_2	B_3	
B_2	B_1	
B_3	B_1	

따라서 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

$2 \times {}_2C_1 \times {}_3C_1 \times 3 = 36$

(3) (○○○)에 세 사람 B_1, B_2, B_3 중에서 한 사람만이 앉을 경우

예를 들어 아래 그림처럼 두 사람 A_1, A_2는 ○에 앉고, 세 사람 B_1, B_2, B_3는 ●에 앉는다.



두 사람 A_1, A_2가 (◯◯◯)에 앉을 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_3P_2$, 세 사람 B_1, B_2, B_3가 남은 자리에 앉을 경우의 수는 $2 \times {}_2P_2$이다. (아래 표)

B_1	B_2	B_3
B_2		
B_3		

따라서 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_3P_2 \times 2 \times {}_2P_2 = 24$

(1), (2), (3)이 동시에 발생하지 않으므로

구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여

$4 + 36 + 24 = 64$

답 64

V025 | 답 450

[풀이]

서로 다른 5개의 바구니를 각각 A, B, C, D, E, 빨간색 공을 ●, 파란색 공을 ○라고 하자.

조건 (나)에 의하여 빨간색 공을 넣은 바구니의 빨간색 공의 개수는 1이다. 따라서 빨간색 공을 넣는 바구니를 선택하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_3(= {}_5C_2 = 10)$이다.

예를 들어 세 바구니 A, B, C에 빨간색 공을 넣었다고 하자.

A	B	C	D	E
●	●	●		

조건 (가)에 의하여 공을 넣지 않는 바구니는 없어야 하므로, 두 바구니 D, E 각각에 파란색 공을 각각 1개씩 넣자. 이제 남은 파란색 공의 개수는 4이다.

A	B	C	D	E
●	●	●	○	○

$4 = 3 + 1$ (×)

$= 2 + 2$ (◯)

$= 2 + 1 + 1$ (◯)

$= 1 + 1 + 1 + 1$ (◯)

조건 (가)에 의하여 남은 4개의 파란색 공을 한 바구니에 모두 넣는 것은 불가능하다. 그리고 남은 4개의 파란색 공을 3개, 1개로 나누어 두 바구니에 각각 넣는 것도 불가능하다.

남은 4개의 파란색 공을 2개, 2개로 나누어 두 바구니에 각각 넣는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_2(= 10)$이다. 예를 들어 아래와 같은 경우를 생각할 수 있다.

A	B	C	D	E
●	●○○	●	○○○	○

남은 4개의 파란색 공을 2개, 1개, 1개로 나누어 세 바구니에 각각 넣는 경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 ${}_5C_3 \times 3(= 30)$이다. 예를 들어 아래와 같은 경우를 생각할 수 있다.

A	B	C	D	E
●○○	●	●○	○	○○

남은 4개의 파란색 공을 1개, 1개, 1개, 1개로 나누어 네 바구니에 각각 넣는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_1(= 5)$이다. 예를 들어 아래와 같은 경우를 생각할 수 있다.

A	B	C	D	E
●	●○	●○	○○	○○

합의 법칙과 곱의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$10 \times (10 + 30 + 5) = 450$

답 450

V026 | 답 ①

[풀이]

두 조건 (가), (나)에 의하여

$1 \le f(1) < f(2) < f(3) \le 4$

이고

$6 \le f(5) \le 7$

이다.

$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$의 값을 정하는 방법의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_3(= 4)$이다. 이때, ${}_4C_3$은 1, 2, 3, 4 중에서 서로 다른 세 수를 택하는 조합의 수이다. 예를 들어 1, 2, 4가 선택되었을 때, $f(1) = 1$, $f(2) = 2$, $f(3) = 4$이다.

$f(5)$의 값을 정하는 방법의 수는 2이다.

곱의 법칙에 의하여 구하는 방법의 수는

$4 \times 2 = 8$이다.

답 ①

V027 | 답 72

[풀이]

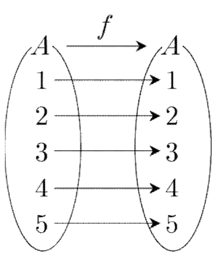
조건 (가)에 의하여 f는 일대일대응이다.

조건 (나)에 의하여 $f(1) \neq 1$이다.

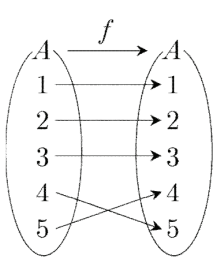
$f(1)=2$라고 가정하면
$f(f(1))=f(2)$이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.
이는 가정에 모순이다. 따라서 $f(1)\neq 2$이다.
$f(1)=k(3\leq k\leq 5)$라고 하면
$f(f(1))=f(k)\neq f(2)$이므로
조건 (나), (다)를 모두 만족시킨다.
$f(1)$의 값을 결정하는 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_3\mathrm{C}_1$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$의 값을 결정하는 경우의 수는 순열의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{P}_4$이다.
함수 f의 개수는 곱의 법칙에 의하여
${}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{P}_4=72$
답 72

V028 | 답 ②

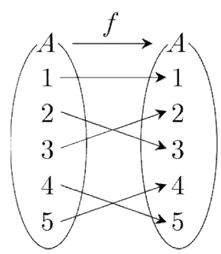
[풀이]
5 이하의 두 자연수 a, b에 대하여
$f(a)=b$라고 하면
$f(f(a))=f(b)=a$이다.
즉, $f(a)=b$이면 $f(b)=a$이다.
이때, 두 수 a, b가 서로 같을 수도 있고,
a와 b가 서로 다를 수도 있다.
(1) $f(x)=x$인 x의 개수가 5인 경우



함수 f는 항등함수이다. 경우의 수는 1이다.
(2) $f(x)=x$인 x의 개수가 3인 경우
$f(x)=x$인 x의 개수가 3일 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5\mathrm{C}_3(=10)$이다.
예를 들어
$f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$
이라고 하자.



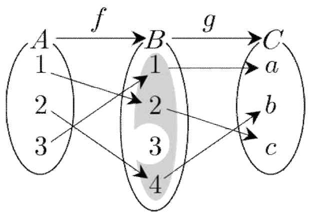
$f(4)=5$, $f(5)=4$이면
$f(f(4))=f(5)=4$, $f(f(5))=f(4)=5$
이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.
곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$10\times 1=10$
(3) $f(x)=x$인 x의 개수가 1인 경우
$f(x)=x$인 x의 개수가 1일 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5\mathrm{C}_1(=5)$이다.
예를 들어
$f(1)=1$
이라고 하자.
$a\neq b$, $f(a)=b$, $f(b)=a$이면
$f(f(a))=f(b)=a$, $f(f(b))=f(a)=b$
이므로 문제에서 주어진 조건을 만족시킨다.
예를 들어 다음과 같이
$f(2)=3$, $f(3)=2$,
$f(4)=5$, $f(5)=4$
인 경우를 생각할 수 있다.

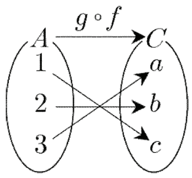


조합의 수와 곱의 법칙에 의하여 경우의 수는
$5\times{}_4\mathrm{C}_2\times{}_2\mathrm{C}_2\times\dfrac{1}{2!}=15$
(1), (2), (3)에서 합의 법칙에 의하여
구하는 경우의 수는
$1+10+15=26$
답 ②

V029 | 답 ④

[풀이] ★
함수 $f:A\to B$의 치역을 $f(A)$라고 하자.
합성함수 $g\circ f$의 역함수가 존재하기 위해서는
두 함수
$f:A\to f(A)$, $g:f(A)\to C$
의 역함수가 각각 존재해야 한다.
즉, 위의 두 함수가 일대일대응이어야 한다.
예를 들어 다음과 같은 경우를 생각할 수 있다.





집합 $f(A)$의 개수는 조합의 수에 의하여

${}_4C_3$

일대일대응 $f: A \to f(A)$의 개수는 순열의 수에 의하여

${}_3P_3$

일대일대응 $g: f(A) \to C$의 개수는 순열의 수에 의하여

${}_3P_3$

그런데

$g(3) = a$ 또는 $g(3) = b$ 또는 $g(3) = c$

의 3가지의 경우까지 생각해 주어야 한다.

구하는 순서쌍의 개수는 곱의 법칙에 의하여

${}_4C_3 \times {}_3P_3 \times {}_3P_3 \times 3 = 432$

답 ④

V030 | 답 81

[풀이] ★

집합 X의 세 원소 a, b, c에 대하여

$f(a) = b$, $f(b) = c$, $f(c) = a$로 두면

$f(f(f(a))) = f(f(b)) = f(c) = a$

즉, $f(f(f(a))) = a$이다.

$b = a$이면 $f(b) = f(a) = c$이므로 $b = c$이다.

왜냐하면 함수의 정의에 의하여

$f(a) = b$, $f(a) = c$일 때, $b = c$일 수 밖에 없다.

$c = a$이면 $f(c) = f(a) = a$이므로 $b = a$이다.

왜냐하면 함수의 정의에 의하여

$f(a) = b$, $f(a) = a$일 때, $b = a$일 수 밖에 없다.

다음의 필요충분조건이 성립한다.

$a = b \Leftrightarrow a = c$

명제의 대우명제는 항상 참이므로 다음의 필요충분조건이 성립한다.

$a \neq c \Leftrightarrow a \neq b$

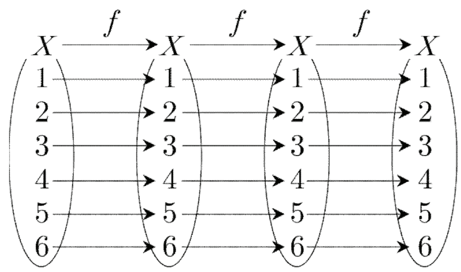
따라서 다음의 두 경우를 생각할 수 있다.

$a = b = c$ … (경우1)

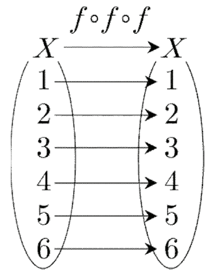
$a \neq b$, $b \neq c$, $c \neq a$ … (경우2)

• (1) (경우1)만 발생하는 경우

다음의 경우만이 가능하다.



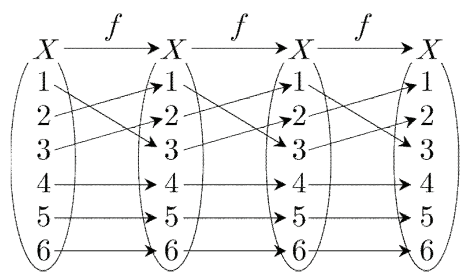
이때, 함수 $f \circ f \circ f: X \to X$는 다음과 같다.



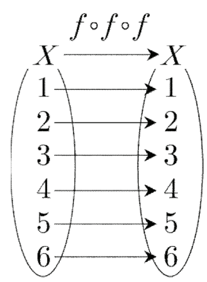
경우의 수는 1이다.

• (2) (경우1), (경우2)가 모두 발생하는 경우

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



이때, 함수 $f \circ f \circ f: X \to X$는 다음과 같다.



경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

${}_6C_3 \times 2 = 40$

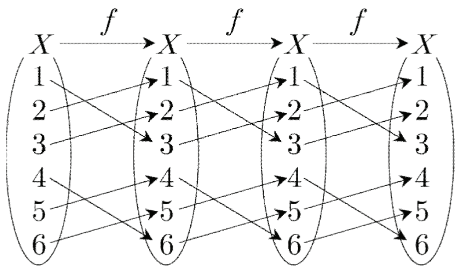
이때, ${}_6C_3$은 집합 X에서 (경우2)를 만족시키는 서로 다른 세 수를 택할 조합의 수이고, 2는 다음의 두 경우이다.

$f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$

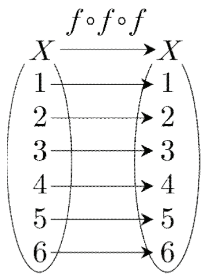
$f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f(2) = 1$

• (3) (경우2)만 발생하는 경우

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



이때, 함수 $f \circ f \circ f : X \to X$는 다음과 같다.



경우의 수는 조합의 수와 곱의 법칙에 의하여

$$\left({}_6\mathrm{C}_3 \times \frac{1}{2!}\right) \times 2 \times 2 = 40$$

이때, ${}_6\mathrm{C}_3 \times \frac{1}{2!}$은 집합 X를 원소의 개수가 각각 3개, 3개인 두 부분집합으로 분할하는 경우의 수이고, 전자의 2는 다음의 두 경우이다.

$f(1) = 2$, $f(2) = 3$, $f(3) = 1$

$f(1) = 3$, $f(3) = 2$, $f(2) = 1$

그리고 후자의 2는 다음의 두 경우이다.

$f(4) = 5$, $f(5) = 6$, $f(6) = 4$

$f(4) = 6$, $f(6) = 5$, $f(5) = 4$

(1), (2), (3)은 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$1 + 40 + 40 = 81$

답 81

V031 | 답 18

[풀이] ★

조건 (나)에서

$f(2) < f(1) < f(3)$, $f(4) < f(2) < f(6)$

정리하면

$f(4) < f(2) < f(1) < f(3)$, $f(2) < f(6)$

$f(2) = 1$라고 가정하자.

$f(4) < 1 = f(2)$이므로 가정에 모순이다.

따라서 $f(2) \neq 1$이다.

$f(2) = 4$라고 가정하자.

$f(2) = 4 < f(1) < f(3)$, $f(2) = 4 < f(6)$

이므로 $f(1)$, $f(3)$, $f(6)$은 5 또는 6을 값으로 가져야 한다.

이는 조건 (가)를 만족시키지 않으므로 모순이다.

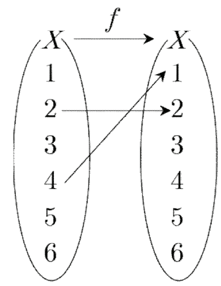
따라서 $f(2) \neq 4$이다.

마찬가지의 방법으로 $f(2) \neq 5$, $f(2) \neq 6$임을 보일 수 있다.

$f(2)$가 가질 수 있는 값은 2 또는 3이다.

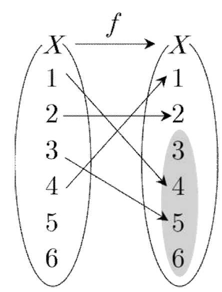
(1) $f(2) = 2$인 경우

$f(4) < 2 = f(2)$이므로 $f(4) = 1$이어야 한다.

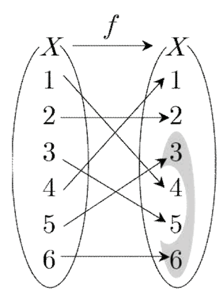


$f(2) = 2 < f(1) < f(3)$, $f(2) = 2 < f(6)$

이므로 순서쌍 $(f(1), f(3))$의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_4\mathrm{C}_2$이다. 예를 들어 아래와 같은 경우가 가능하다.



$f(6)$가 가질 수 있는 값의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_2\mathrm{C}_1$이다. 예를 들어 아래와 같이 경우가 가능하다. ($f(5)$의 값은 자동적으로 결정된다.)

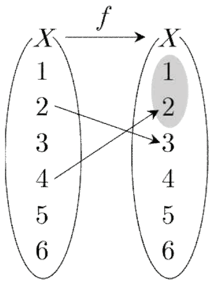


곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_4\mathrm{C}_2 \times {}_2\mathrm{C}_1 \times 1 = 12$

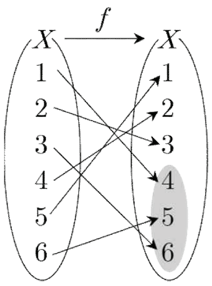
(2) $f(2) = 3$인 경우

$f(4) < 3 = f(2)$이므로 $f(4) = 1$ 또는 $f(4) = 2$이다. 예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



$f(2)=3<f(1)<f(3)$, $f(2)=3<f(6)$

이므로 순서쌍 $(f(1),\ f(3))$의 개수는 조합의 수에 의하여 ${}_3C_2$이다. 예를 들어 아래와 같은 경우가 가능하다. ($f(5)$, $f(6)$의 값은 자동적으로 결정된다.)



곱의 법칙에 의하여 경우의 수는

${}_2C_1\times{}_3C_2=6$

(1), (2)는 동시에 발생하지 않으므로

합의 법칙에 의하여 구하는 경우의 수는

$12+6=18$

답 18

V032

| 답 528

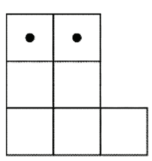
[풀이]

남학생을 ○, 여학생을 ●으로 두자.

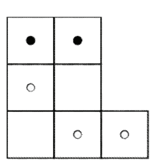
(1) 여학생 2명이 같은 층의 사물함을 사용하는 경우 (2층 또는 3층)

2층과 3층중에서 하나의 층을 선택할 경우의 수는 2이다.

예를 들어 여학생 2명이 3층의 사물함을 사용한다고 하자.



남학생 3명은 남은 5개의 사물함 중에서 3개의 사물함을 사용하면 된다. 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_5C_3$이다. 예를 들어 남학생 3명은 아래 그림처럼 사물함을 사용할 수 있다.



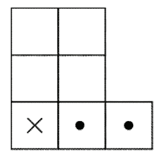
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times{}_5C_3\times3!\times2!=240$

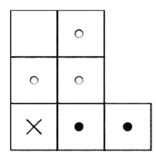
이때, $3!$은 3명의 남학생에게 사물함을 배정하는 경우의 수, $2!$은 여학생 2명에게 사물함을 배정하는 경우의 수이다.

(2) 여학생 2명이 같은 층의 사물함을 사용하는 경우 (1층)

여학생 2명이 사용할 사물함을 정할 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_3C_2$이다. 예를 들어 아래 그림처럼 사용한다고 하자. 이때, 남학생은 1층의 사물함을 사용할 수 없다.



남학생 3명은 남은 4개의 사물함 중에서 3개의 사물함을 사용하면 된다. 경우의 수는 조합의 수에 의하여 ${}_4C_3$이다. 예를 들어 남학생 3명은 아래 그림처럼 사물함을 사용할 수 있다.



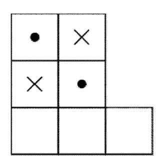
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

${}_3C_2\times{}_4C_3\times3!\times2!=144$

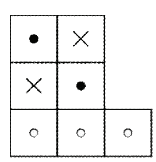
이때, $3!$은 3명의 남학생에게 사물함을 배정하는 경우의 수, $2!$은 여학생 2명에게 사물함을 배정하는 경우의 수이다.

(3) 여학생 2명이 다른 층의 사물함을 사용하는 경우 (3층 제외)

여학생 2명 중 한 명은 2층의 사물함을, 나머지 한 명은 3층의 사물함을 사용해야 한다. 경우의 수는 곱의 법칙에 의하여 2×2이다. 예를 들어 여학생 2명이 아래 그림과 같이 사물함을 사용한다고 하자. 이때, 남학생 3명은 2층 또는 3층의 사물함을 사용할 수 없다.



남학생 3명은 남은 3개의 사물함을 사용하면 된다. 경우의 수는 1이다.



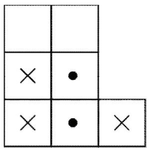
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여

$2\times2\times3!\times2!=48$

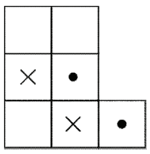
이때, $3!$은 3명의 남학생에게 사물함을 배정하는 경우의 수, $2!$은 여학생 2명에게 사물함을 배정하는 경우의 수이다.

(4) 여학생 2명이 다른 층의 사물함을 사용하는 경우 (3층 반

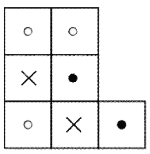
드시 포함)
여학생은 1층의 가운데에 있는 사물함을 사용할 수 없다. 왜냐하면 여학생이 1층의 가운데에 있는 사물함을 사용하면 남학생 3명 중 한 명이 사물함을 사용할 수 없기 때문이다.



따라서 여학생 2명 중 한 명은 1층의 사물함 중에서 가장 왼쪽 또는 가장 오른쪽 사물함을 사용해야 한다. 경우의 수는 2이다. 그리고 남은 한 명은 2층과 3층의 네 개의 사물함 중에서 하나를 사용하면 된다. 경우의 수는 4이다. 예를 들어 다음과 같다고 하자.



남학생 3명은 남은 3개의 사물함을 사용하면 된다. 경우의 수는 1이다.



경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$2\times4\times3!\times2!=96$
이때, $3!$은 3명의 남학생에게 사물함을 배정하는 경우의 수, $2!$은 여학생 2명에게 사물함을 배정하는 경우의 수이다.
(1)~(4)에서 구하는 경우의 수는 합의 법칙에 의하여
$240+144+48+96=528$
답 528

V033

| 답 ①

[풀이] ★
주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우는
'(ⅰ) 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우' 에서
'(ⅱ) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우' 와
'(ⅲ) 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우' 를 제외하면 된다.
(ⅰ)의 경우:
n개의 공이 들어 있는 주머니에서 세 개의 공을 꺼내는 경우의 수는 ${}_nC_3$이다.
(ⅱ)의 경우:
주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수가 모두 연속되는 경우의 수는 $(n-2)$이다.
($\because$ 다음의 경우들이 가능하다.
$(1,\ 2,\ 3)$, $(2,\ 3,\ 4)$, $(3,\ 4,\ 5)$, $\cdots$,
$(n-2,\ n-1,\ n)$←총 $n-2$개다.)
(ⅲ)의 경우:
연속되는 두 수 중 하나가 1인 경우의 수는 $\boxed{n-3}$
($\because$ $(1,\ 2,\ 4)$, $(1,\ 2,\ 5)$, $\cdots$, $(1,\ 2,\ n)$
←총 $n-3$개다.)
이고, 마찬가지로 연속되는 두 수 중 하나가 n인 경우의 수도 $\boxed{n-3}$이다.
($\because$ $(n-3,\ n-1,\ n)$, $(n-4,\ n-1,\ n)$,
$\cdots$, $(1,\ n-1,\ n)$←총 $n-3$개다.)
또한 연속되는 두 수 중 어느 하나도 1과 n이 아닌 경우의 수는
$\boxed{(n-3)(n-4)}$이다.
($\because$ 2와 3이 연속되는 경우: 5, 6, $\cdots$, n 중에서 나머지 한 수를 선택해야 한다.($n-4$개)
3과 4가 연속되는 경우: 1, 6, 7, $\cdots$, n 중에서 나머지 한 수를 선택해야 한다.($n-4$개)
⋮
$n-2$와 $n-1$이 연속되는 경우: 1, 2, 3, $\cdots$, $n-4$ 중에서 나머지 한 수를 선택해야 한다.($n-4$개)
경우의 수는 곱의 법칙에 의하여
$(n-3)(n-4)$이다.)
따라서 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 두 수만 연속되는 경우의 수는
$2\times(\boxed{n-3})+\boxed{(n-3)(n-4)}$이다.
(ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 n개의 공이 들어 있는 주머니에서 꺼낸 세 개의 공에 적혀 있는 세 수 중 어느 두 수도 연속되지 않는 경우의 수는
${}_nC_3-(n-2)-2\times(n-3)-(n-3)(n-4)$
$=\boxed{\dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}}$이다.
(가): $p(n)=n-3$, (나): $q(n)=(n-3)(n-4)$
(다): $r(n)=\dfrac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6}$
$\therefore\ \dfrac{p(18)\times q(17)}{r(16)}=\dfrac{15\times14\times13}{\dfrac{14\times13\times12}{6}}=\dfrac{15}{2}$
답 ①

V034 ㅣ답 ③

[풀이] ★

문제에서 주어진 조건에 의하여 집합

$\{(f\circ f)(x)\,|\,x\in X\}$

는 1, 2, 3을 반드시 원소로 가져야 한다. 따라서 이 집합의 원소의 개수는 3 또는 4 또는 5이다.

만약 함수 $f:X\to X$의 치역의 원소의 개수가 1이면 함수 $f\circ f:X\to X$의 치역의 원소의 개수는 1이다. 이는 가정에 모순이다. 따라서 함수 $f:X\to X$의 치역의 원소의 개수는 2 이상이다.

만약 함수 $f:X\to X$의 치역의 원소의 개수가 2이면 함수 $f\circ f:X\to X$의 치역의 원소의 개수는 1 또는 2이다. 이는 가정에 모순이다. 따라서 함수 $f:X\to X$의 치역의 원소의 개수는 3 이상이다. 왜냐하면 다음이 성립하기 때문이다.

$\{(f\circ f)(x)\,|\,x\in X\}\subset\{f(x)\,|\,x\in X\}$

이제 전체의 경우를 다음과 같이 세 가지의 경우로 구분하여 생각하자.

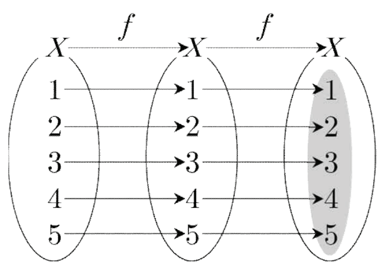
- (경우1)

함수 $f:X\to X$의 치역의 원소의 개수가 5인 경우

함수 $f:X\to X$의 치역은 집합 X이다.

이때, 함수 $f:X\to X$는 일대일대응이다.

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



경우의 수는 순열의 수에 의하여 $5!=120$이다.

- (경우2)

함수 $f:X\to X$의 치역의 원소의 개수가 4인 경우

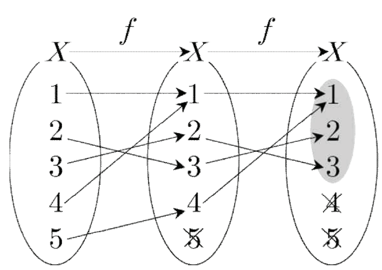
함수 $f\circ f:X\to X$의 치역이

집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$을 부분집합으로 가져야 하므로

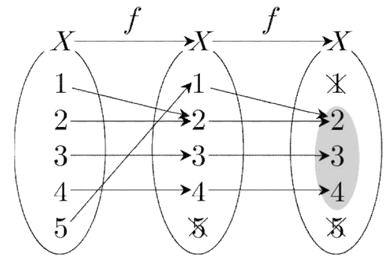
함수 $f:X\to X$의 치역은

집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$ 또는 $\{1,\ 2,\ 3,\ 5\}$이다.

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



하지만 다음과 같은 경우는 가능하지 않다.



경우의 수는 $2\times({}_5C_2\times4!-3\times{}_4C_2\times3!)=264$이다.

이때, 2는 4 또는 5 중에서 하나를 택하는 경우의 수이다.

예를 들어 $4\in$(함수 $f:X\to X$의 치역)이라고 하자.

${}_5C_2\times4!$은 함수 $f:X\to X$를 만드는 경우의 수이다.

예를 들어 함수 $f:X\to X$가 다음과 같다고 하자.

$f(1)=f(4)=1$(←즉, 집합 X의 어떤 두 원소가 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 하나의 원소에 대응된다.),

$f(2)=3,\ f(3)=2,\ f(5)=4$

함수 $f\circ f:X\to X$의 치역은 $\{1,\ 2,\ 3\}$이다.

3은 $f(5)=1,\ f(5)=2,\ f(5)=3$ 중에서 하나를 택하는 경우의 수이다.

예를 들어 $f(5)=1$이라고 하자.

${}_4C_2\times3!$은 함수 $f:X\to X$를 만드는 경우의 수이다.

예를 들어 함수 $f:X\to X$가 다음과 같다고 하자.

$f(1)=f(2)=2$(←즉, 집합 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4\}$의 어떤 두 원소가 집합 $\{2,\ 3,\ 4\}$의 하나의 원소에 대응된다.),

$f(3)=3,\ f(4)=4$

함수 $f\circ f:X\to X$의 치역은 $\{2,\ 3,\ 4\}$이다.

- (경우3)

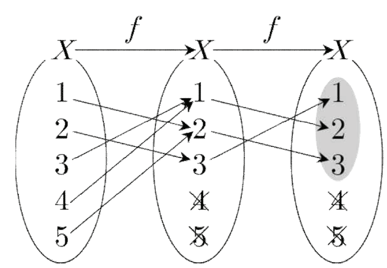
함수 $f:X\to X$의 치역의 원소의 개수가 3인 경우

함수 $f\circ f:X\to X$의 치역이

집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$을 부분집합으로 가져야 하므로

함수 $f:X\to X$의 치역은 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$이다.

예를 들어 다음과 같은 경우가 가능하다.



경우의 수는 $3!\times3\times3=54$이다.

이때, $3!$은 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$에서 집합 $\{1,\ 2,\ 3\}$으로의 일대일대응을 만드는 경우의 수이다.

그리고 가운데 3은 $f(4)=1,\ f(4)=2,\ f(4)=3$ 중에서 하나를 택할 경우의 수이고,

마지막 3은 $f(5)=1,\ f(5)=2,\ f(5)=3$ 중에서 하나를 택할 경우의 수이다.

따라서 함수 $f:X\to X$의 개수는

합의 법칙에 의하여

$120+264+54=438$

답 ③