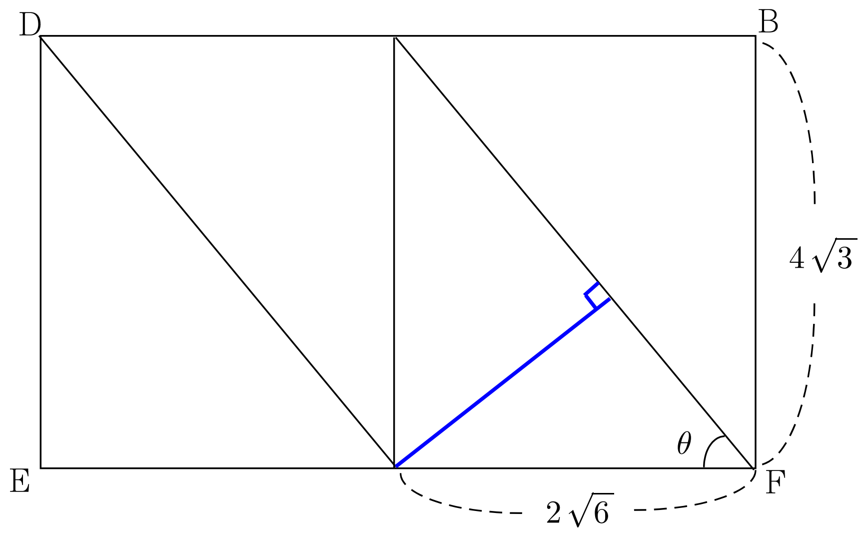
6번 해설: 다음 그림과 같이 단면화 합니다.



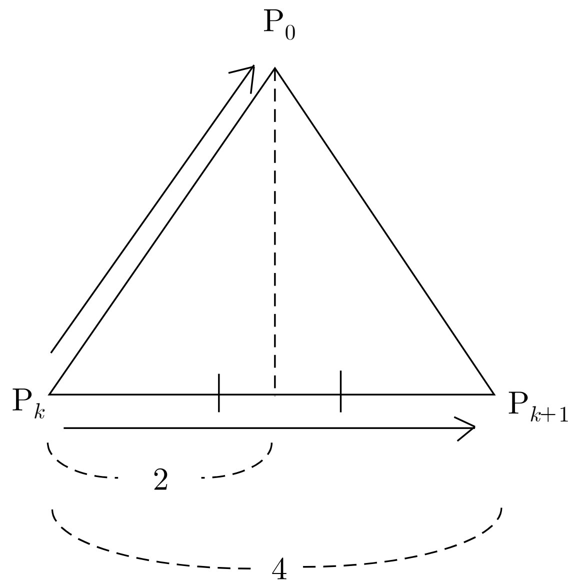
$\sin\theta 2\sqrt{6}$ = 파랑색 선분의 길이, $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$ 이므로

거리는 4가 됩니다. 정답은 4번이 됩니다.

10번 해설: $\overrightarrow{P_0P_k}\cdot\overrightarrow{P_{k+1}P_k}=\overrightarrow{P_kP_0}\cdot\overrightarrow{P_kP_{k+1}}$ 로 바꾸어 줄 수 있고,

벡터 내적의 기하적인 의미를 생각해보시면 쉽습니다.

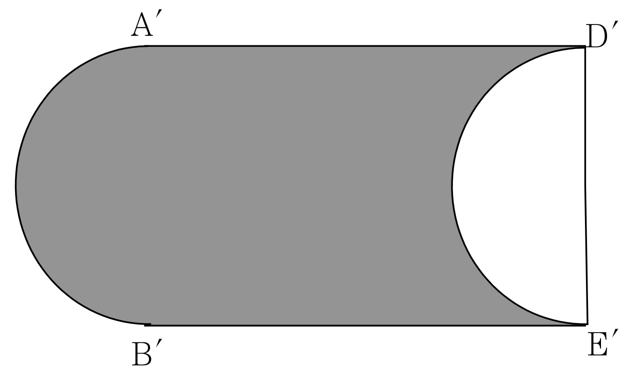
$\overrightarrow{P_0P_k}\cdot\overrightarrow{P_{k+1}P_k}=\overrightarrow{P_kP_0}\cdot\overrightarrow{P_kP_{k+1}}=4\times 2=8$이 됩니다. $8\times 5=40$



12번 해설

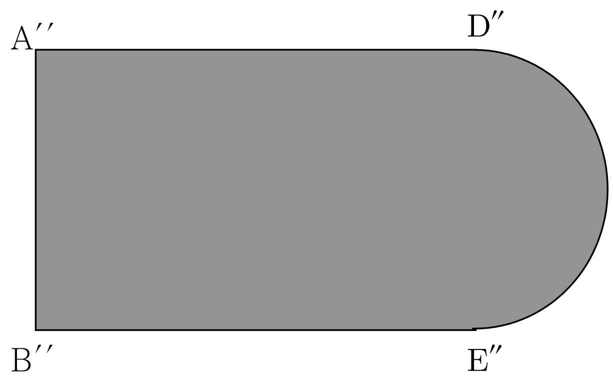
S_1의 경우 정사영의 정의를 생각하면 계산을 조금 덜 수 있습니다.

그림자만 생각해버리면 되는데 AB를 지름으로 하는 반원의 그림자가 직사각형그림자에서 튀어 나오게 되고, DE를 지름으로 하는 반원의 그림자만큼 들어가게 되니까 반원의 그림자를 계산할 필요없이 결국 직사각형의 그림자만 구하면 됩니다.



$S_1=10\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}=5\sqrt{3}$ 이 되고, S_2의 그림자는 다음과 같습니다.

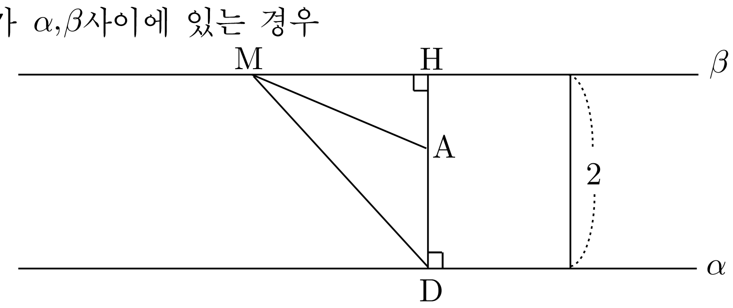
$S_2=10\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{\pi}{2}\times\dfrac{\sqrt{3}}{2}$이므로 답은 2번이 됩니다.



14번 해설

일단 점A가 어디로 가는지 살펴봅니다. $x+y+z=\sqrt{3}$ 을 평면β라 하고 모서리BC의 중점을 M이라고 하면 옆에서 바라본 단면을 생각합니다.

i)A가 α,β사이에 있는 경우



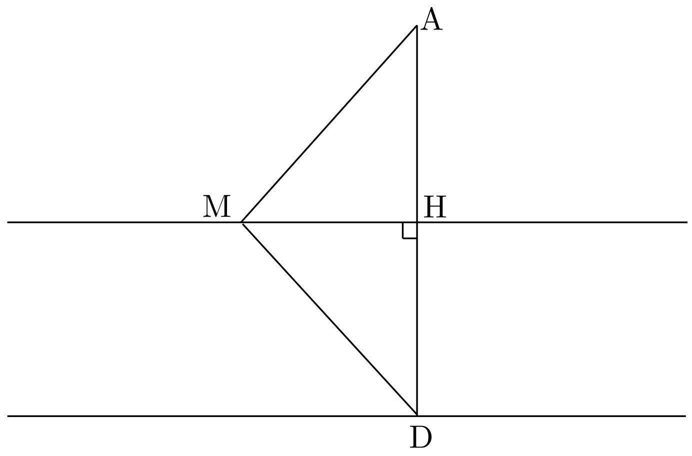
$\angle$DAM이 둔각이 되므로 점A는 i)의 경우에 해당될 수 없습니다.

※(참고) 그림없이 수식적인 방법으로 따져보기

한 모서리의 길이가 $\overline{AD}=a$라고 두고 생각해 봅니다.

α,β사이에 A가 있으니 $\overline{AD}<2$, $a<2$가 되는데, $\overline{DM}$이 삼각형의 빗변이므로 $\overline{DM}>2$가 됩니다. $\overline{DM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$이므로 $\dfrac{\sqrt{3}}{2}a>2$, $a>\dfrac{4}{\sqrt{3}}$가 되고 부등식을 연립하면 $2>a>\dfrac{4}{\sqrt{3}}$이라는 모순된 부등식이 도출되므로, 따라서 i)의 경우는 제외해도 됨을 알 수 있습니다.

ⅱ)직선AD가 평면β를 지나는 경우



위의 그림의 상황이 될 수 있다는 것을 알 수 있습니다.
$\overline{AD}\perp\alpha$이므로 $\overline{AH}\perp\beta$가 되고, 두 점B,C에서 모서리 AD에 내린 수선의 발이 H가 되므로 H는 모서리AD의 중점이 됩니다.($\because$정삼각형)
두 평면사이의 거리가 2이 이므로 모서리 길이는 4가 되고 삼각형ABC의 평면alpha 위로의 정사영의 넓이는 삼각형HBC와 같으므로 정답은 2번이 됩니다.

15번 해설

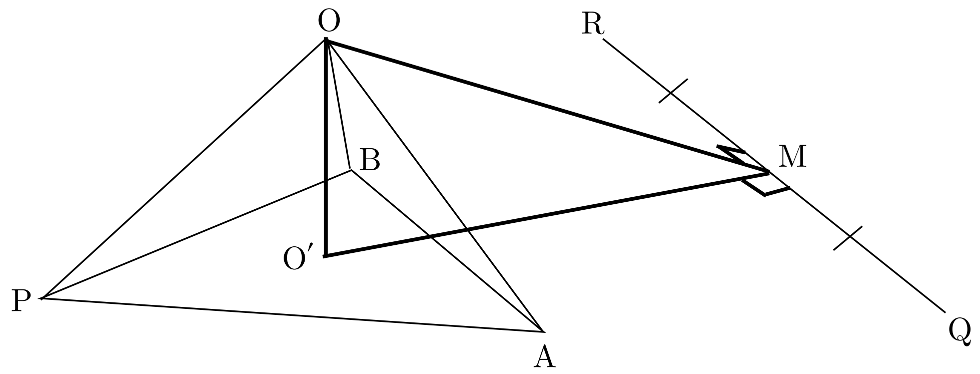
ㄱ.모서리BC의 중점을 P라고 하면, 점P를 지나면서 선분BC에 수직인 직선과 모서리CD의 교점이 M이 됩니다. 그런데 A의 평면BCD위로의 정사영이 선분CD위에 있다고 했으니, 점A의 평면BCD위로의 정사영은 점M과 일치하게 됩니다. 따라서 $\overline{AM}\perp$평면BCD 이므로 $\overline{AM}\perp\overline{BD}$
가 됩니다.

ㄴ. ㄱ에서 선분AM이 평면BCD와 수직인 것을 알아냈으므로 선분AM은 선분CD의 수직이등분선이 됩니다. 따라서 삼각형ACD는 이등변삼각형이 됩니다. 즉, $\overline{CA}=\overline{AD}=4$가 되고 $\overline{CM}=\overline{MB}$이므로 $2\overline{CD}=12$이면 $\overline{MB}=3$이므로 $\overline{MB}+\overline{AD}=3+4=7$이 됩니다.

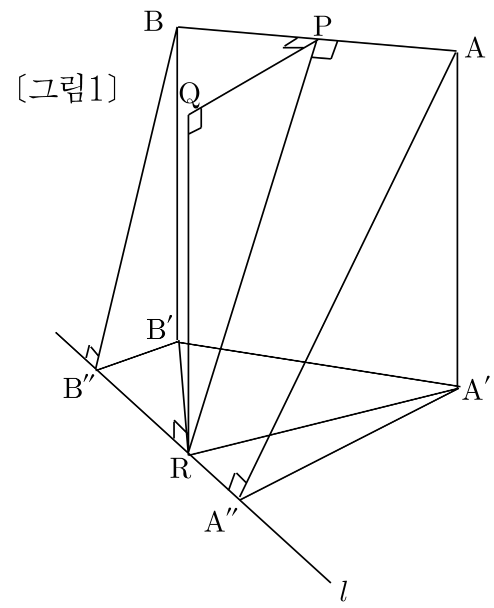
ㄷ. ㄱ에 의해 선분AM이 사면체의 높이가 되고, 모서리BC의 중점을 P라고 하면 $2\overline{PM}=4\sqrt{3}\cos\theta$가 됩니다. ㄴ에 의해 모서리AD의 길이가 4이므로 부피가 8일 때의 선분MB의 길이가 $\sqrt{10}$인지를 따져보면 됩니다. $\overline{AM}=2\sqrt{3}\sin\theta$이므로 $V(\theta)=\frac{1}{3}\times\overline{AM}\times\frac{1}{2}\times4\times2\overline{PM}=8\sin2\theta$가 되므로 $\theta=\frac{\pi}{4}$일 때, 부피가 8이 되고, $\overline{PM}=\sqrt{6}$이 되므로 선분MB의 길이가 $\sqrt{10}$이 됩니다. 따라서 정답은 5번이 됩니다.

16번 해설

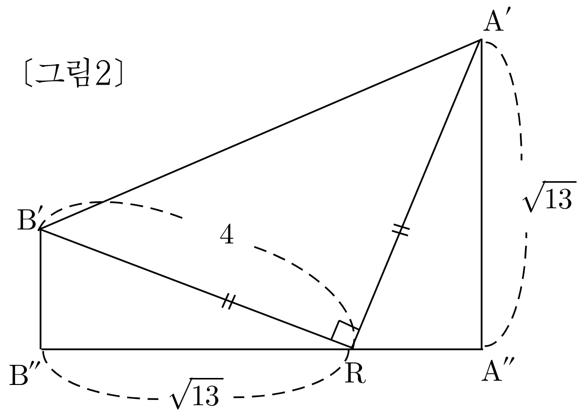
점O의 평면 PAB위로의 정사영을 O′라 하면, 세 삼각형 OO′P, OO′A, OO′B 는 서로 합동이므로 O′는 정삼각형의 외심이자 무게중심이 됩니다. $\overline{OO'}=2\sqrt{2}$, $\overline{O'M}=4\sqrt{2}$이므로,
$\cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$이 됩니다. 정답은 $18\sqrt{3}\times\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{36\sqrt{15}}{5}$



17번 해설



직선l을 포함하고 평면ABQ와 평행한 평면을 β라 합시다.
그렇다면 위의 〔그림1〕과 같이 평면β위로의 정사영을 생각합니다.
$\angle AQB=90^\circ$이므로 $\angle A'RB'=90^\circ$가 됩니다. 점A의 직선l과의 거리가 7이므로 선분A′A′′의 길이는 $\sqrt{13}$이 되고, 〔그림2〕와 같이 볼 수 있습니다.



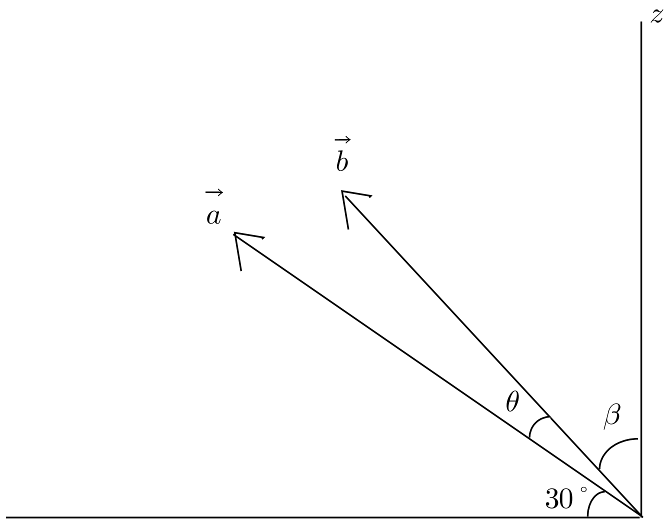
선분B′B′′의 길이는 $\sqrt{3}$이고, $\cos\theta=\frac{B'B''}{BB''}=\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{39}}=\frac{1}{\sqrt{13}}$이므로
$78\times\frac{1}{13}=6$이 정답이 됩니다.

18번 해설

풀이(1)

단면의 넓이를 S라 하면 원기둥의 밑면의 넓이가 5π이므로

$S\cos\theta = 5\pi$, $S = \dfrac{5\pi}{\cos\theta}$가 되고 S의 넓이가 최소가 되려면 $\cos\theta$값이 최대가 되면 됩니다. 평면α의 법선 벡터는 항상 z축과 60도를 이루며, 원기둥의 밑면의 법선 벡터는 (1,-1,1)이 됩니다. 두 법선 벡터를 각각 $\vec{a}, \vec{b}$ 라 하고 두 벡터의 크기를 모두 고정시킨다면 $\cos\theta = \dfrac{|\vec{a} \cdot \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$임을 이용하여 $\vec{a} \cdot \vec{b}$의 최댓값만 살펴보면 됩니다. 두 벡터의 크기가 일정하게끔 고정시켰으므로, 방향만 같게되면 최대가 됩니다.



$\cos\left(\dfrac{\pi}{3} - \beta\right) = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{3}}{3} + \dfrac{\sqrt{3}}{2} \times \dfrac{\sqrt{6}}{3} = \dfrac{\sqrt{3} + 3\sqrt{2}}{6} = \dfrac{1+\sqrt{6}}{2\sqrt{3}}$이 됩니다.

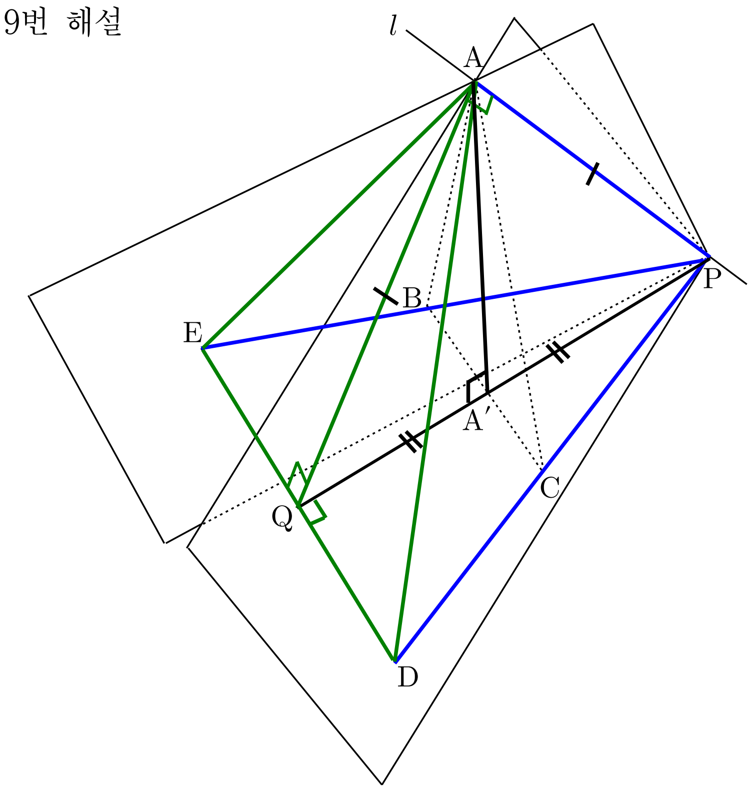
따라서 $5\pi \times \dfrac{2\sqrt{3}}{\sqrt{6}+1} = (6\sqrt{2} - 2\sqrt{3})\pi$가 정답이 됩니다.

풀이(2)

(1)과 사실상 같은 방법입니다.

평면α의 법선벡터를 $a^2 + b^2 = 3$을 만족시키는 $(a,b,1)$로 놓을 수 있으므로, $\cos\theta = \dfrac{|(1,-1,1) \cdot (a,b,1)|}{2\sqrt{3}} = \dfrac{|a-b+1|}{2\sqrt{3}}$으로 되고, 쉽게 $\cos\theta$의 최댓값을 구할 수 있습니다.

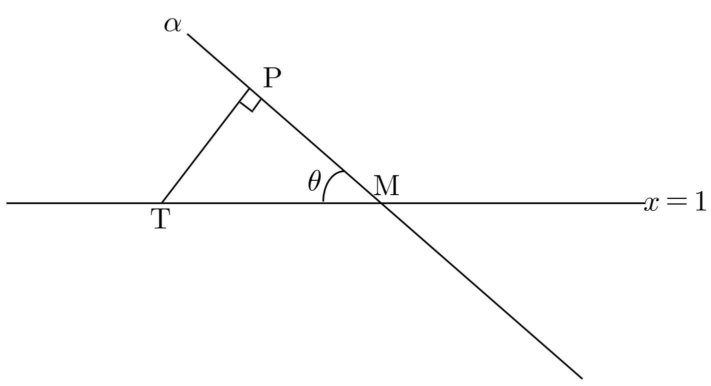
19번 해설



d의 값을 구하면, 덩달아 두 평면ABE, ACD의 이면각까지 알아낼 수 있습니다. 삼각형APQ가 직각이등변 삼각형이므로 d의 값을 구할 수 있고, 덩달아 평면APQ$\perp\overline{\mathrm{DE}}$임을 알 수 있기 때문에 삼수선의 정리에 의해 $\overline{\mathrm{DA}}\perp\overline{\mathrm{AP}}$임을 알아낼 수 있습니다. 따라서 $\angle DAE$ 가 두 평면의 이면각이 됩니다. $d = \overline{\mathrm{AQ}} = \overline{\mathrm{AP}} = 6$, $\cos\theta = \dfrac{1}{5}$이므로 정답은 2번이 됩니다.

20번 해설

풀이(1) 원뿔의 밑면을 포함하는 평면을 α라고 하면 평면α의 법선벡터는 $\overrightarrow{\mathrm{PA}} = (2,-1,-1)$ 가 됩니다. 즉, 두 평면$x=2$, α가 이루는 각의 크기를 θ라 하면 $\cos\theta = \dfrac{2}{\sqrt{6}}$, $\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$이 됩니다. 즉 단면화하면 다음과 같습니다. (점M: 선분QR의 중점)

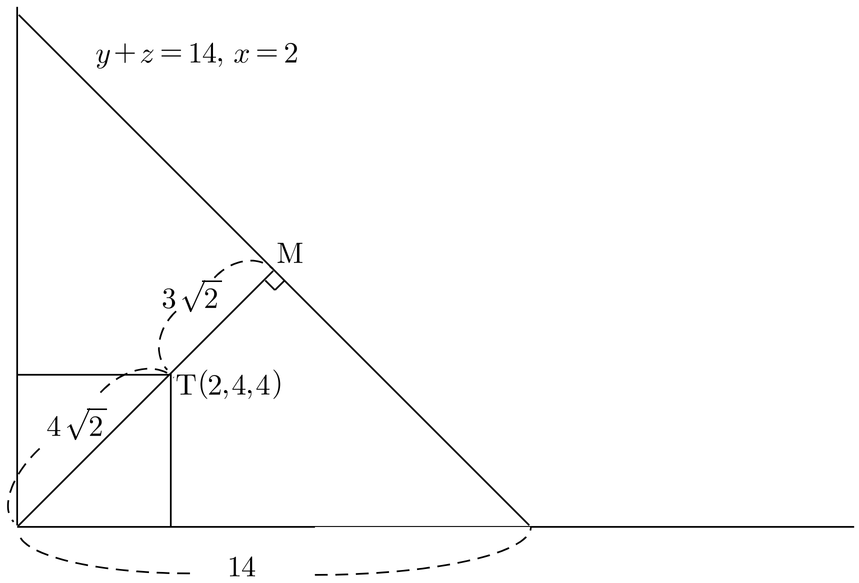


점T는 평면x=2위에 있으므로 점T의 좌표는 선분AP를 4:1로 내분하는 점의 좌표가 됩니다. 즉, T(2,4,4)이므로 $\overline{\mathrm{PT}} = \sqrt{6}$가 되고, $\overline{\mathrm{MT}}\sin\theta = \sqrt{6}$, $\overline{\mathrm{MT}} = \sqrt{6} \times \sqrt{3} = 3\sqrt{2}$가 되고 $\overline{\mathrm{MP}} = 2\sqrt{3}$이 됩니다. $\overline{\mathrm{QR}} = 2\sqrt{15}$가 되므로, 삼각형 QRT의 넓이는 $\sqrt{15} \times 3\sqrt{2} = \sqrt{270}$이 가 됩니다. 정답은 5번

풀이(2)

다른 접근도 가능합니다. 평면α의 평면의 방정식이 $2x - y - z + 10 = 0$이므로 평면$x=2$와 연립하면 $y+z=14, x=2$가 두 평면의 교선이 됨을 알 수 있습니다. 즉, 교선이 직선QR과 같습니다.

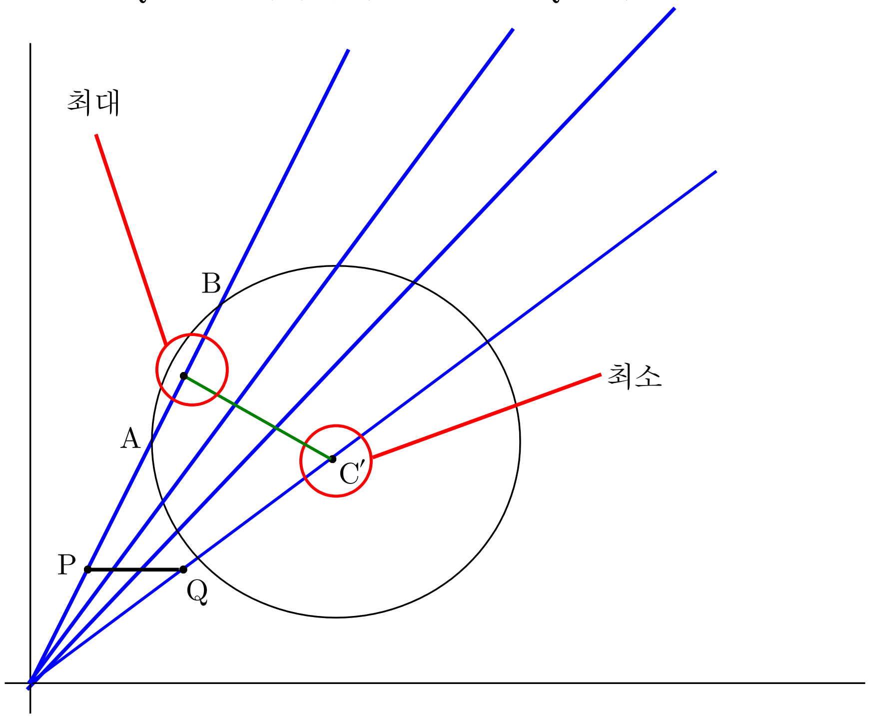
직선QR과 점T(2,4,4)와의 거리를 구하면 점T와 직선QR이 모두 평면$x=2$위에 있으므로 점과 직선사이의 거리 공식 또는 삼각비로 거리를 구할 수 있습니다. 여기에서도 마찬가지로 선분MT의 길이가 나오므로 선분PM의 길이를 구할 수 있고, 쉽게 해결할 수 있습니다



21번 해설

$|\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CM}|=|3\overrightarrow{CM}|$이므로

평면OPQ로 평면화하여 구를 평면OPQ로 자른 단면을 생각합니다.



평면OPQ와 구가 만나는 원의 반지름의 길이는 $2\sqrt{6}$이 되며 이 원의 중심C′$(-3,8,3\sqrt{3})$이 됩니다.

평면OPQ을 다시 좌표평면으로 놓고 생각해보면 최대가 될 때의 직선의 방정식은 $y=2x$이고, 점C′의 좌표는 (8,6)이 됩니다.

직선$y=2x$와의 거리를 구해주시면 $\overline{C'M}=2\sqrt{5}$가 됩니다.

최대가 될 때, $\overline{CM}=4\sqrt{2}$이고, 최소일때는 구의 중심과 평면OPQ 사이의 거리가 되므로 $\overline{CM}=2\sqrt{3}$이 됩니다.

따라서 정답은 $288-108=180$

25번 해설

점A의 원점대칭인 점을 A′ 라 합시다. 그렇다면

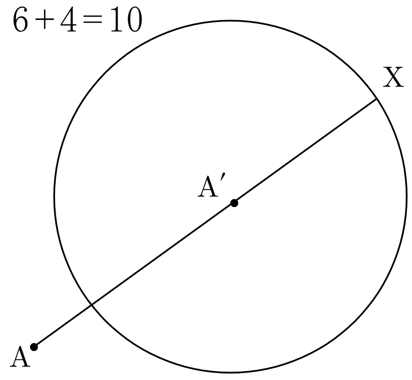
$|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OX}|=|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA'}|=|\overrightarrow{A'X}|=4$로 볼 수 있습니다.

즉, X의 자취는 A′를 중심으로 하고 반지름의 길이가 4인 구가 됩니다. 따라서 다음 그림과 같이 볼 수 있습니다.

점A의 원점대칭점이 A′이므로 $\overline{AA'}=3\times2=6$이 되고

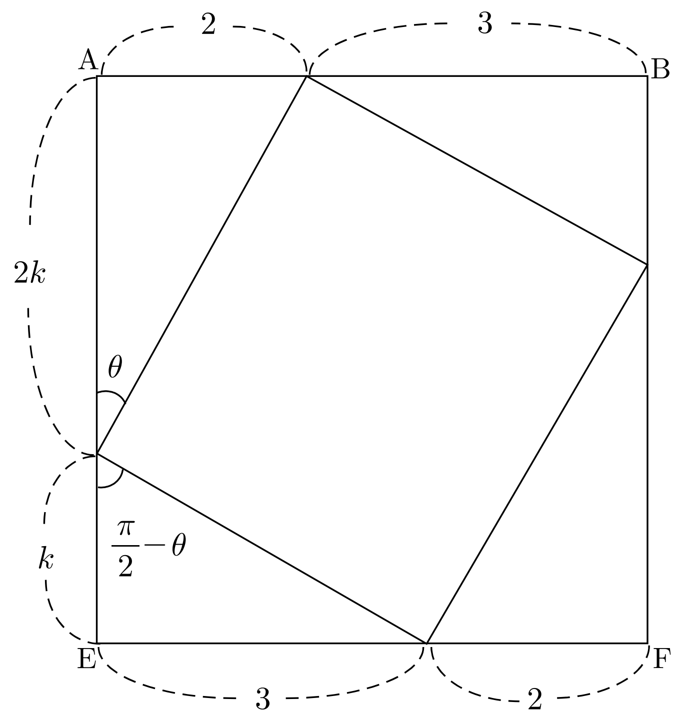
$|\overrightarrow{OX}-\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{AX}|$이므로 선분AX의 길이의 최댓값을 구하면 됩니다.

따라서 정답은 6+4=10



26번 해설

입체도형은 평면으로 해석하는 것이 좋습니다.



$\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\frac{1}{\tan\theta}$이므로 $\frac{3}{k}=k$가 되므로 $k=\sqrt{3}$이 됩니다.

반지름길이는 $(\sqrt{3}+1)r=2,\ r=\sqrt{3}-1$이 되므로

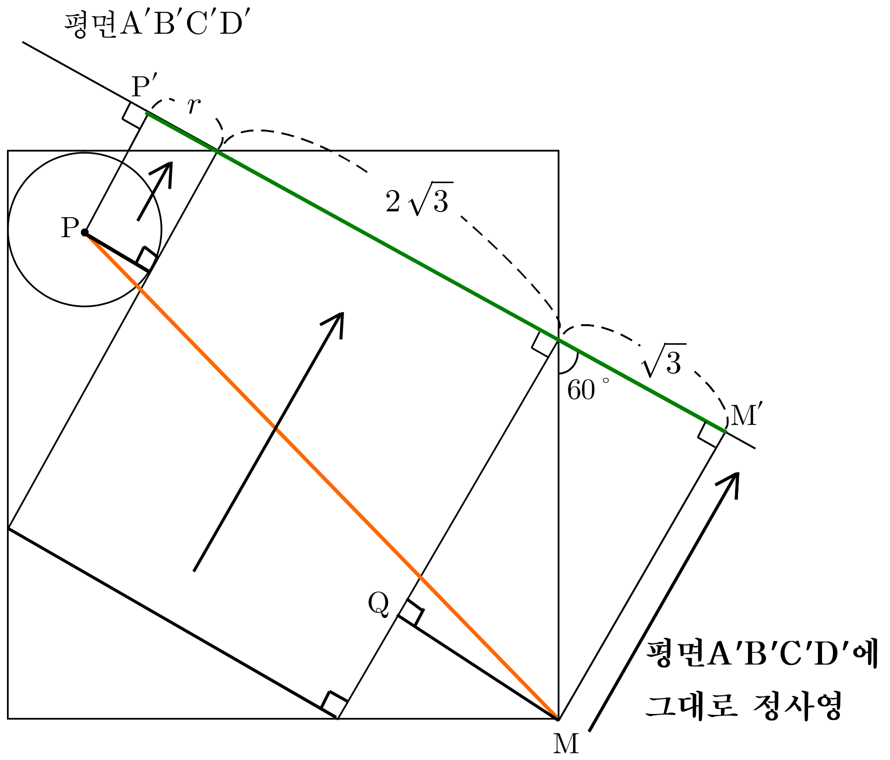
따라서 $\overline{FG}=2r=2(\sqrt{3}-1)$이 됩니다.

정사영문제를 해결할 때, 반드시 이면각의 크기를 이용해야만 하는 것은 절대 아닙니다. 정사영의 정의을 이용하여도 해결할 수 있습니다.

삼각형PGF의 세 꼭짓점이 어떤 위치로 가는지 생각해봅니다.

FG의 중점을 M이라고 하고 P,M을 포함하면서 단면화하면 다음 장에 나오는 그림과 같습니다.

P,G,F의 정사영을 각각 P′,G′′,F′′ 라고 하면 선분G′′F′′의 중점은 M′이 됩니다. 삼각형PGF의 넓이를 구할 필요없이 정사영의 넓이만 구하면 되므로 아래그림의 검은색 선분을 모두 평면A′B′C′D′로 정사영시키면 초록색 선분과 같이 되고, 초록색선분의 길이가 삼각형P′G′′F′′의 높이가 됩니다.



따라서 삼각형의 정사영의 높이가 초록색 선분의 길이이므로

정사영의 넓이는 $\frac{1}{2}\times\overline{FG}\times(r+2\sqrt{3}+\sqrt{3})=r(r+3\sqrt{3})$이 됩니다.

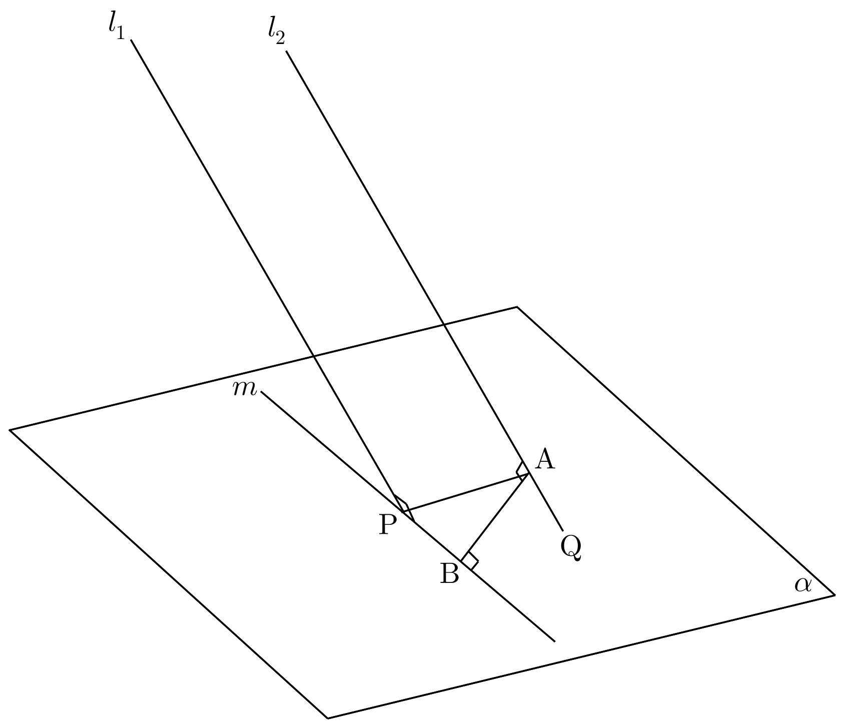
$r=\sqrt{3}-1$이므로 $13-5\sqrt{3}$이 정사영의 넓이가 됩니다.

따라서 정답은 13-5=8

27번 해설

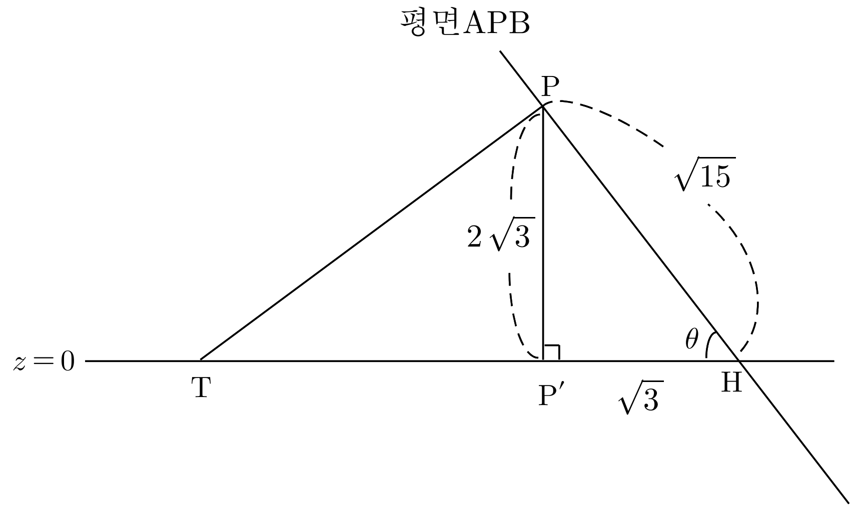
이 문제도 d와 $\cos\theta$가 서로 연관이 있습니다. 평면PAB는 직선l_2와 수직이므로 $\overline{PA}\perp l_2$가 되고, $l_1//l_2$이므로 $\overline{PA}\perp l_1$이므로 , 따라서 $\overline{PA}=d$가 됩니다. 직선m이 평면PAB에 포함되고, 두 직선l_1,l_2를 포함하는 평면과 평면PAB가 서로 수직이므로, $\angle APB=\theta$가 됩니다.

$\cos\theta=\frac{3}{d}$이므로 $\frac{d}{\cos\theta}=\frac{d^2}{3}=\frac{21}{3}=7$이 됩니다.



28번 해설

직선PT가 평면APB와 수직인 법선이 됨을 숙지하고 평면$z=0$과의 관계를 생각해봅니다.



일단 선분AB가 지름이 되므로 $\angle BPA=90^\circ$이 됩니다.

따라서 선분PA의 길이는 $2\sqrt{10}$임을 알 수 있습니다.

점P에서 지름AB에 내린 수선의 발을 H라 하면

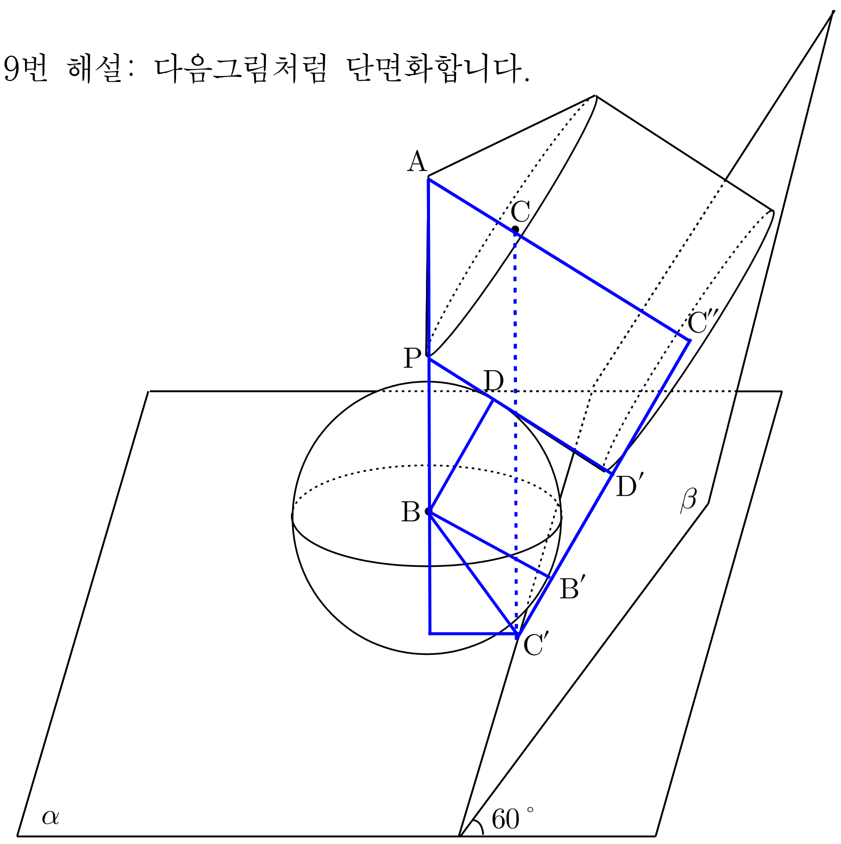
$\overline{PH}\times\overline{AB}=8\sqrt{15}$, $\overline{PH}=\sqrt{15}$가 됩니다.

점P는 평면$z=2\sqrt{3}$위에 있고, 따라서 $\overline{PP'}=2\sqrt{3}$이므로,

$\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{5}}$가 됩니다. 삼각형APB의 넓이가 $4\sqrt{15}$이므로

$s=4\sqrt{15}\times\frac{1}{\cos\theta}=20\sqrt{3}$이 됩니다. 따라서 정답은 240

29번 해설: 다음그림처럼 단면화합니다.



반지름의 길이를 r이라고 하고, 원기둥의 높이를 h라고 하면,

(가)조건에서 $(\overline{C'B'}+\overline{B'D'}+2\sqrt{3})\tan30^\circ=\overline{CC''}=h$이므로

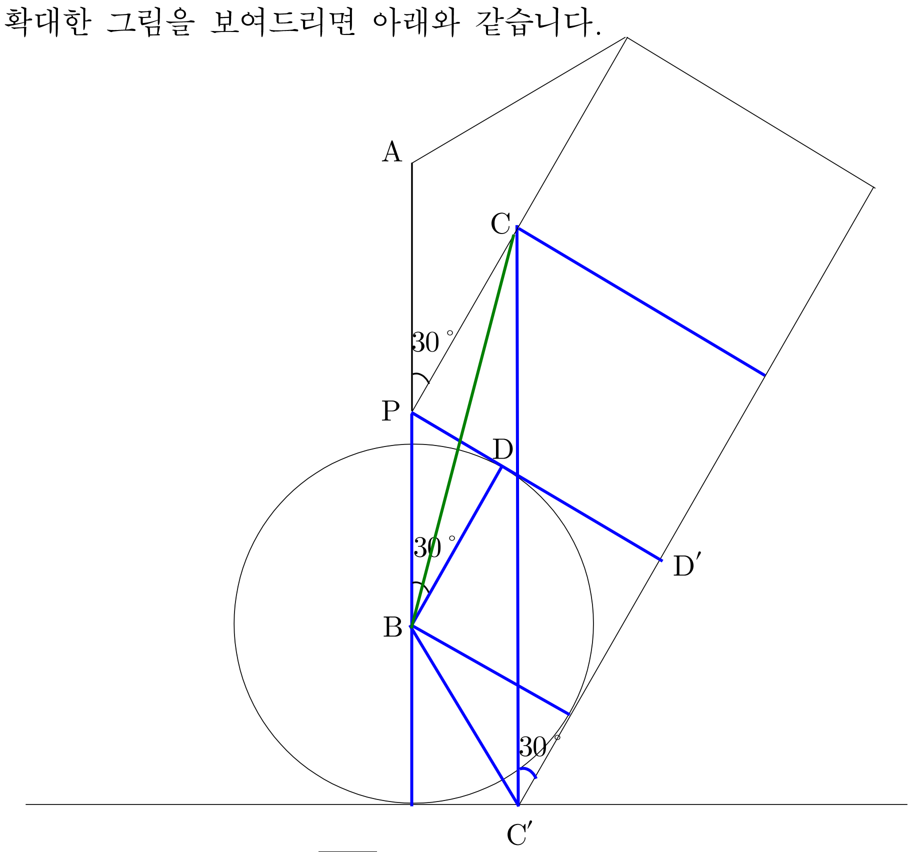
$(\frac{1}{\sqrt{3}}+1)r+2\sqrt{3}=\sqrt{3}h\cdots$(ㄱ)의 식을 뽑아낼수 있습니다.

마찬가지로 (나)조건을 이용하여 $\overline{PD}+\overline{DD'}=h$임을 알 수 있습니다.

$(1+\frac{\sqrt{3}}{3})r=h\cdots$(ㄴ)의 식을 (나)조건에 뽑아낼 수 있습니다.

(ㄱ),(ㄴ)의 식을 연립하면, $(\frac{\sqrt{3}+3}{3})r+2\sqrt{3}=\frac{(3\sqrt{3}+3)}{3}r$이 됩니다.

정리하면 $2\sqrt{3}=(\frac{2\sqrt{3}}{3})r$, $r=3$이 됩니다. 혹시 이해가 안 가시는 분들 위해 확대한 그림을 보여드리면 아래와 같습니다.



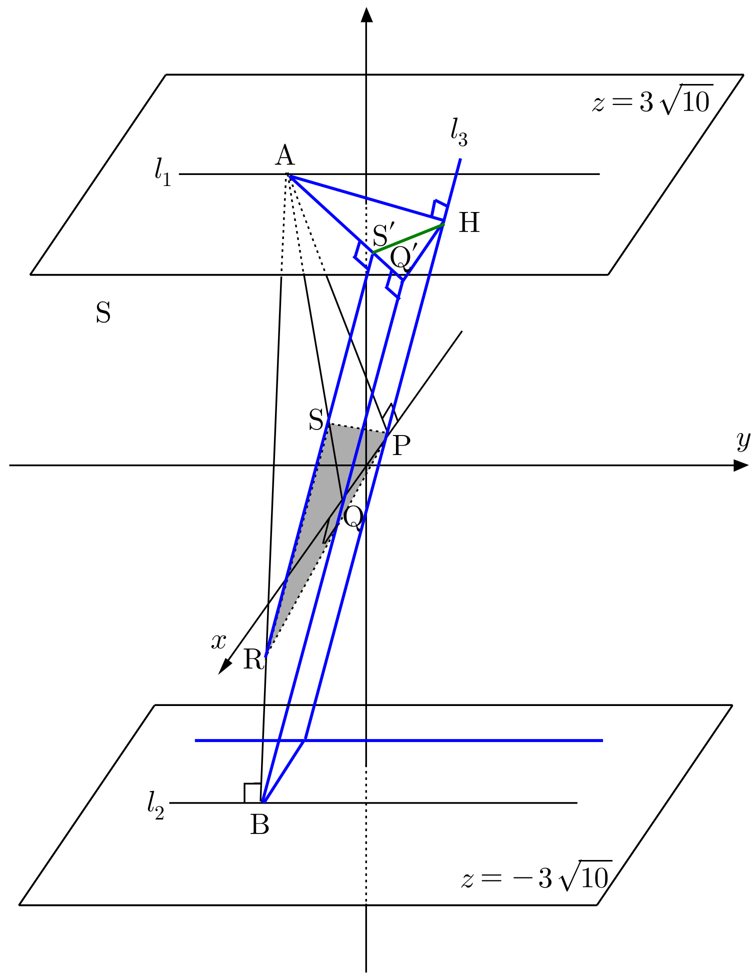
$\overline{\mathrm{CC'}}\sin 30^\circ=h$, $\tan\theta=\frac{\overline{\mathrm{CC'}}-3}{\sqrt{3}}=\frac{3+2\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$이 되므로

$\frac{k^2}{\tan\theta}=\frac{9(12+6\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=\frac{9\times6(2+\sqrt{3})}{2+\sqrt{3}}=54$ 가 됩니다.

30번 해설

풀이(1) $\overline{\mathrm{BQ}}//\overline{\mathrm{RS}}$, $\overline{\mathrm{RS}}=\frac{3}{4}\times\overline{\mathrm{BQ}}=\frac{15}{2}$가 됩니다.

삼각형의 밑변의 길이를 알았으니 점P와 직선RS사이의 거리를 구하면 됩니다. 그런데 문제는 곧바로 직선RS를 다루기는 힘들어보입니다. 직선RS와 평행한 직선 QB는 직선RS보다 비교적 다루기 쉬우므로 직선QB를 이용해봅니다. 점A의 직선BQ위로의 수선의 발을 Q′, 점P를 지나고 직선QB와 평행한 직선을 l_3라 합시다.

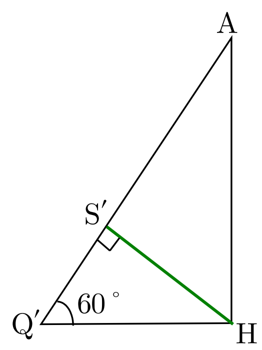


점A에서 직선l_3에 내린 수선의 발을 H라 합시다.

점A에서 직선RS위로의 수선의발을 S′라 하면 $\overline{\mathrm{HS'}}$가 삼각형의 높이가 됩니다. $\overline{\mathrm{AH}}=6$, $\overline{\mathrm{Q'H}}=\overline{\mathrm{PQ}}=2\sqrt{3}$이 되므로 제2코사인 법칙을 이용하여 선분HS′의 길이를 구해주시면 됩니다.

이 경우에는 $\angle \mathrm{Q'S'H}=90^\circ$가 되니까 그냥 구해도 됩니다.

선분HS′의 길이가 3이므로 $3\times\frac{1}{2}\times\frac{15}{2}=\frac{45}{4}$가 정답입니다.



풀이(2)
두 점P,Q를 각각 $(-\sqrt{3},0,0)$, $(\sqrt{3},0,0)$으로 설정시켜서 대수적으로 바라봐도 됩니다. $\overline{RS}//\overline{BQ}$이므로 직선RS는 직선BQ를 평행이동한것과 동일합니다. 따라서 직선BQ의 방정식은 $z=3y, x=\sqrt{3}$가 됩니다. 직선RS의 방향벡터는 직선BQ의 방향벡터와 평행하므로 직선RS의 방정식은 $z=3y+\frac{3\sqrt{10}}{2}, x=\frac{\sqrt{3}}{2}$가 됩니다. 따라서 점P의 평면$x=\frac{\sqrt{3}}{2}$위로의 정사영을 P′라 하면, $\overline{PP'}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$가 되고, 점P′과 직선RS사이의 거리를 점과 직선사이의 거리 공식으로 구하면 $\frac{3\sqrt{10}}{2\sqrt{1+9}}=\frac{3}{2}$가 되므로,

삼각형의 높이$=\sqrt{\left(\frac{3}{2}\right)^2+(\overline{PP'})^2}=\sqrt{\frac{9}{4}+\frac{27}{4}}=\sqrt{\frac{36}{4}}=3$

가 됩니다. 따라서 이번에도 마찬가지로 정답은 $45+4=49$