CHAPTER

선택 미적분 개념 이해

I

WEEK 1

1.0 선택 미적분 과목에 대한 개괄

I단원 수열의 극한은 선택 미적분에서 처음 학습하는 개념이다. 수학적인 개념 순서상 수열의 극한을 학습한 뒤에 함수의 극한을 학습하는 것이 바람직하지만, 교육과정의 구성이 이렇게 되어 있으므로 아무 말 않고 이러한 순서로 학습하기로 한다.

I단원의 내용은 II, III단원의 내용 중 기껏해야 III단원에서 학습하는 '급수와 정적분 사이의 관계'와 연관된다.
또한 I단원의 내용은 다루는 개념의 양이 매우 적고, 다루는 개념의 난이도도 어렵지 않으므로 개념을 '잘 몰라서' 틀리는 문제는 출제되기 어렵다. 즉, 이 단원에서 출제되는 문제는 전적으로 '문제해결능력'과 '사고력'의 측면에서의 어려움이 유발되는 경우가 많다는 것이다.

특히, 재작년부터 자취를 감추어버린 '등비급수 도형 문제'는 4점 단골 주제였는데 이 문제가 출제되지 않게 됨으로써 3개의 4점 문제 중 한 자리에는 I단원 내용을 소재로 하는 4점 문제가 출제되고 있다. 등비급수 도형 문제를 해결하기 위한 교과 개념이 정해져 있음에도 불구하고 이 문제가 자취를 감추기 전까지도 골칫거리 문제였던 것처럼, 등비급수 도형 문제가 사라졌지만 상황이 크게 달라진 것 같지는 않은 것 같다. 이는 결국 문제해결능력의 향상 없이는 평가원이 출제하는 4점 문제를 수월하게 해결할 수 없다는 반증이라고 생각된다.

한편, 등비급수 자리에 출제되는 I단원 소재의 4점 문제의 특징으로 보여지는 것은 몇몇 문제에서 알 수 있듯이 '올바른 개념 이해'까지도 요구하고 있는 것으로 보인다. 그러므로 되게 단순하다. 공부에 관한 철학은 공통 과목과 동일하다.

정확한 개념의 이해 + 문제해결능력과 사고력의 증진

해야 하는 공부를 하면, 저절로 여러 가지 상황에 대비할 수 있다. 어떤 상황이 벌어질 것인지를 예측하고 시뮬레이션하는 것은 지금 해야 할 일이 아니다. 지금 단계에서는 그러한 공부보다는 단순하고 효율적으로 해야 할 당연한 것들을, 매일매일 최선을 다해 해나아가면 될 뿐이다.

II, III단원의 내용은 수학2에서 학습한 미분, 적분의 개념을 토대로 조금씩 더 나아간 내용들을 학습한다. 수학2와 비교해보았을 때 새롭게 배우는 내용들은, 기존에 알고 있던 미적분의 개념의 토대 위에 상대적인 위치를 정확히 하여 머릿 속에 넣어두어야 하며, 각각의 쓰임새를 명확히 알아두어야 한다. 기존에 알고 있던 것으로 새로 배운 것을 모두 대체하려고 해서는 안 된다. 그러한 행위는 새로 배우는 내용을 모욕하고 무시하는 것이기 때문이다. 곱셈의 방법과 원리를 배웠는데 덧셈으로만 숫자 계산을 하고 있으면 안 된다는 것이다. 새로 배우는 것은 나름의 용도가 있고, 그 용도에 알맞게 출제하는 것이 출제 원칙이기도 하다.

각 단원의 내용마다 특정 문제해결능력을 평가하기에 좋은 내용들이 있는데, 그런 것들을 다루기 전에

I, II, III 단원 내용의 뼈대를 정확히 알아 두어야 할 필요

가 있다. 그것으로 선택 미적분 공부를 시작해보자. 먼저 II 단원 미분법 내용을 학습해보도록 한다.

1.1 II단원 : 문제의 소재가 되는 대상의 확장

미적분 과목에서는 미분을 통해 다룰 수 있는 함수가 다항함수에서 여러 가지 함수1)로 확장된다.
미적분 과목에서는 다루는 함수의 형태가 여러 가지의 형태2)로 확장된다.
대상만 바뀐 것이므로 수학2에서 학습한 극한, 미분에 관련한 기초적인 내용과 방법, 사고가 중요하다.

문제 1.01 1997학년도 수능 자연 4번

$\lim_{x \to 0} \frac{\sin(3x^3 + 5x^2 + 4x)}{2x^3 + 2x^2 + x}$ 의 값은?

문제 1.02 2010학년도 6월 모의고사 미분과적분 27번

$\lim_{x \to 0} \frac{e^{1-\sin x} - e^{1-\tan x}}{\tan x - \sin x}$ 의 값은?

문제 1.03 2001학년도 수능 자연 4번

$f(x) = (x^2+1)e^x$ 일 때, $f'(0)$의 값은?

1) 지수함수, 로그함수, 삼각함수
2) 몫, 합성함수꼴, 그리고 새로운 형태인 매개변수로 표현된 형태, 음함수 형태

문제 1.04 2000학년도 수능 자연 11번

곡선 $x^3 - xy^2 = 10$ 위의 점 $(-2,\ 3)$에서의 접선의 기울기는?

문제 1.05 2007학년도 9월 모의고사 미분과적분 27번

y가 x의 함수일 때, 곡선 $e^x \ln y = 1$ 위의 점 $(0,\ e)$에서의 접선의 기울기는?

문제 1.06 1998학년도 수능 자연 4번

함수 $y = \dfrac{\ln x}{x}$가 최댓값을 가질 때의 x의 값은?

문제 1.07 2003학년도 수능 자연 29번

x에 대한 방정식 $\ln x - x + 20 - n = 0$이 서로 다른 두 실근을 갖도록 하는 자연수 n의 개수를 구하시오.

문제 1.08 2009학년도 9월 모의고사 미분과적분 29번

$a>0$, $b>0$, $a \neq 1$, $b \neq 1$일 때, 함수

$$f(x)=\frac{b^x+\log_a x}{a^x+\log_b x}$$

에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $1<a<b$이면 $x>1$인 모든 x에 대하여 $f(x)>1$이다.
ㄴ. $b<a<1$이면 $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$이다.
ㄷ. $\lim_{x\to+0} f(x)=\log_a b$

문제 1.09 2009학년도 수능 미분과적분 28번

함수 $f(x)=4\ln x+\ln(10-x)$에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. 함수 $f(x)$의 최댓값은 $13\ln 2$이다.
ㄴ. 방정식 $f(x)=0$은 서로 다른 두 실근을 갖는다.
ㄷ. 함수 $y=e^{f(x)}$의 그래프는 구간 $(4, 8)$에서 위로 볼록하다.

문제 1.10 2021학년도 수능 가형 28번

두 상수 a, $b\,(a<b)$에 대하여 함수 $f(x)$를 $f(x)=(x-a)(x-b)^2$ 이라 하자.
함수 $g(x)=x^3+x+1$의 역함수 $g^{-1}(x)$에 대하여 합성함수 $h(x)=(f\circ g^{-1})(x)$가 다음 조건을 만족시킬 때, $f(8)$의 값을 구하시오.

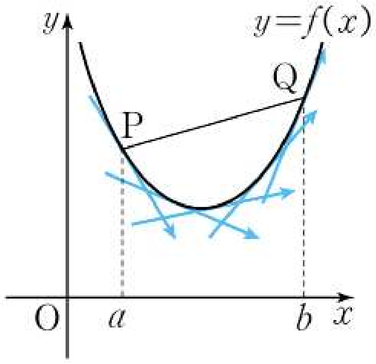
(가) 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.
(나) $h'(3)=2$

1.2 II단원 : 곡선과 직선의 위치관계 (오목볼록)

미적분 과목의 미분 단원에서 수학2 과목과의 핵심적인 차이는 이계도함수 $f''(x)$를 이용하여 원함수 $f(x)$의 정보를 파악할 수 있다는 것이다. 특히, 이계도함수의 부호를 이용하여 곡선의 오목볼록을 조사할 수 있는데, 곡선의 오목볼록의 정의는 그 자체로 곡선과 직선의 위치관계를 규명할 수 있는 내용임을 이해해야 한다.

어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여 두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이 선분 PQ보다 아래쪽에 있으면 곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다고 하고, $f'(x)$는 증가한다. $f''(x)>0$이면 $f'(x)$가 증가하므로 $f''(x)>0$이 되는 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록하게 된다.

위의 교과서 내용으로부터 알 수 있는 사실을 정리하면 다음과 같다.



(1) 아래로 볼록의 정의

어떤 구간에서 곡선 $y=f(x)$ 위의 임의의 서로 다른 두 점 P, Q에 대하여
두 점 P, Q를 잇는 곡선 부분이 선분 PQ보다 아래쪽에 있으면
곡선 $y=f(x)$는 이 구간에서 아래로 볼록하다

(2) 아래로 볼록의 판정

어떤 구간에서 $f''(x)>0$ $\underset{\text{(i)}}{\Rightarrow}$ 그 구간에서 $f'(x)$가 증가 $\underset{\text{(ii)}}{\Rightarrow}$ 그 구간에서 곡선 $y=f(x)$는 아래로 볼록

(i)은 수학2에서 알려져 있는 사실이므로 그대로 받아들이면 되고, (ii)는 증명하여 이해할 수 있어야 한다.

볼록성은 교과 개념 내에서 곡선과 직선의 위치관계를 설명해줄 수 있는 내용임을 이해한다면, 다음의 말을 이해할 수 있다.

곡선과 곡선의 위치관계를 설명하는 방식은 방정식과 부등식을 이용하는 방법뿐이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 오직 한 점에서 만난다는 것을 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$이 접한다고 이해하는 것을 생각해보자. 만약 곡선 $y=f(x)$가 아래로 볼록하고, $y=g(x)$가 위로 볼록한 상황에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 오직 한 점에서 만난다고 해서 두 곡선 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$이 접한다고 이야기해서는 안 된다. 이유는 매우 간단하다. 우리는 '접한다'는 수학적 용어에서 목적어가 될 수 있는 수학적 대상으로 곡선과 곡선을 다루지 않기 때문이다.

두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$가 오직 한 점에서 만난다는 것은 방정식 $f(x)=g(x)$의 근이 오직 하나라는 것으로 이해되는 것이 가장 간명하며 오류가능성이 없다.

문제 1.11 2004학년도 수능 자연 21번

함수 $y=\dfrac{16}{x}$ 의 그래프와 함수 $y=-x^2+a$ 의 그래프가 서로 다른 두 점에서 만날 때, 상수 a 의 값은?

문제 1.12 2005학년도 9월 모의고사 미분과적분 26번

$0<x<\dfrac{\pi}{4}$ 인 모든 x 에 대하여 부등식 $\tan 2x > ax$ 를 만족하는 a 의 최대값은?

문제 1.13 2002학년도 수능 자연 9번

$1\le x\le 2$ 인 모든 실수 x 에 대하여 부등식 $\alpha x\le e^x\le \beta x$ 가 성립하도록 상수 α, β 를 정할 때, $\beta-\alpha$ 의 최솟값은?

문제 1.14 2022학년도 6월 모의고사 미적분 27번

두 함수

$$f(x)=e^x, \quad g(x)=k\sin x$$

에 대하여 방정식 $f(x)=g(x)$의 서로 다른 양의 실근의 개수가 3일 때, 양수 k의 값은?

문제 1.15 2025학년도 수능 미적분 28번 (변형)

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = -x + e^{1-x^2}$$

이다. 양수 t에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(t,\ f(t))$에서의 접선과 곡선 $y = f(x)$ 및 y축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 $g(t)$라 하자. $g(t)$를 표현하시오.

문제 1.16 2019학년도 수능 가형 20번

점 $\left(-\frac{\pi}{2},\ 0\right)$에서 곡선 $y=\sin x\ (x>0)$에 접선을 그어 접점의 x좌표를 작은 수부터 크기순으로 모두 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. 모든 자연수 n에 대하여 〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은?

ㄱ. $\tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$

ㄴ. $\tan a_{n+2} - \tan a_n > 2\pi$

ㄷ. $a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3}$

문제 1.16에 대한 보조 기출문제 (2019학년도 9월 모의고사 가형 20번)

열린 구간 $(0,\ 2\pi)$에서 정의된 함수 $f(x)=\cos x+2x\sin x$가 $x=\alpha$와 $x=\beta$에서 극값을 가진다.
〈보기〉에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? (단, $\alpha<\beta$)

ㄱ. $\tan(\alpha+\pi)=-2\alpha$

ㄴ. $g(x)=\tan x$라 할 때, $g'(\alpha+\pi)<g'(\beta)$이다.

ㄷ. $\frac{2(\beta-\alpha)}{\alpha+\pi-\beta}<\sec^2\alpha$

문제 1.17 2024학년도 수능 미적분 30번

실수 전체의 집합에서 미분가능한 함수 $f(x)$의 도함수 $f'(x)$가

$$f'(x) = |\sin x|\cos x$$

이다. 양수 a에 대하여 곡선 $y = f(x)$ 위의 점 $(a, f(a))$에서의 접선의 방정식을 $y = g(x)$라 하자. 함수

$$h(x) = \int_0^x \{f(t) - g(t)\}dt$$

가 $x = a$에서 극대 또는 극소가 되도록 하는 모든 양수 a를 작은 수부터 크기순으로 나열할 때, n번째 수를 a_n이라 하자. $\frac{100}{\pi} \times (a_6 - a_2)$의 값을 구하시오.

정답표									
1	4	2	e	3	1	4	18	5	$-\frac{1}{4}$
6	$-e$	7	e	8	ㄱㄷ	9	ㄱㄴ	10	72
11	12	12	2	13	$e\left(\frac{e}{2}-1\right)$	14	$\sqrt{2}e^{\frac{9\pi}{4}}$	15	강의참조
16	ㄱㄴㄷ	17	125						