

수학 영역(가형)

제 2 교시

성명	
----	--

수험번호						3			
------	--	--	--	--	--	---	--	--	--

1

1. 방정식 $\log_3(x-11) = 3\log_3 2$ 를 만족 시키는 x 의 값은? [2점]

- ① 18 ② 19 ③ 20 ④ 21 ⑤ 22

3. 두 벡터 $\vec{a} = (-1, 3)$ 과 $\vec{b} = (2, 1)$ 에 대하여 내적 $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b})$ 의 값은? [2점]

- ① 11 ② 13 ③ 15 ④ 17 ⑤ 19

2. 함수 $f(x) = \sqrt{7} \sin x - 3\cos x$ 의 최댓값은? [2점]

- ① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

4. 정적분 $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2x (\sin x + 1) dx$ 의 값은? [3점]

- ① $\frac{1}{3}$ ② $\frac{2}{3}$ ③ 1 ④ $\frac{4}{3}$ ⑤ $\frac{5}{3}$

5. 1부터 6까지의 자연수가 하나씩 적혀 있는 6장의 카드가 있다. 이 카드를 모두 한 번씩 사용하여 일렬로 나열할 때, 2가 적혀 있는 카드는 4가 적혀 있는 카드보다 왼쪽에 나열하고 홀수가 적혀 있는 카드는 작은 수부터 크기 순서로 왼쪽부터 나열하는 경우의 수는? [3점]

- ① 56 ② 60 ③ 64 ④ 68 ⑤ 72

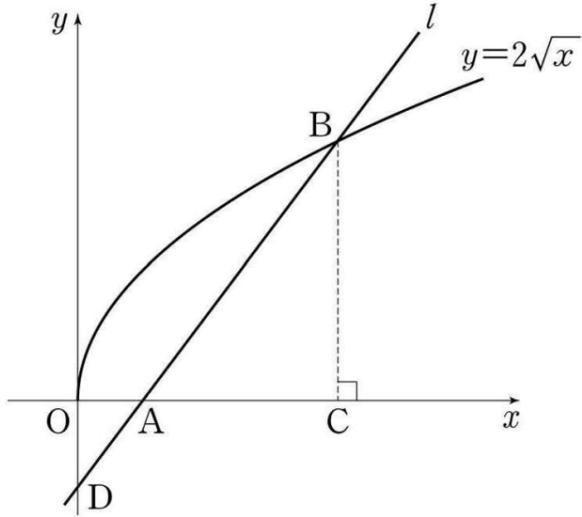
6. 한 개의 주사위를 A 는 4번 던지고 B 는 3번 던질 때, 3의 배수의 눈이 나오는 횟수 각각 a, b 라 하자. $a+b$ 의 값이 6일 확률은? [3점]

- ① $\frac{10}{3^7}$ ② $\frac{11}{3^7}$ ③ $\frac{4}{3^6}$ ④ $\frac{13}{3^7}$ ⑤ $\frac{14}{3^7}$

7. 곡선 $y = \left(\ln \frac{1}{ax}\right)^2$ 의 변곡점이 직선 $y = 2x$ 위에 있을 때, 양수 a 의 값은? [3점]

- ① e ② $\frac{5}{4}e$ ③ $\frac{3}{2}e$ ④ $\frac{7}{4}e$ ⑤ $2e$

[8 ~ 9] 점 $A(1, 0)$ 을 지나고 기울기가 양수인 직선 l 이 곡선 $y = 2\sqrt{x}$ 와 만나는 점을 B , 점 B 에서 x 축에 내린 수선의 발을 C , 직선 l 이 y 축과 만나는 점을 D 라 하자. 8번과 9번의 두 물음에 답하시오.



8. 점 $B(t, 2\sqrt{t})$ 에 대하여 삼각형 BAC 의 넓이를 $f(t)$ 라 할 때, $f'(9)$ 의 값은? [3점]

- ① 3 ② $\frac{10}{3}$ ③ $\frac{11}{3}$ ④ 4 ⑤ $\frac{13}{3}$

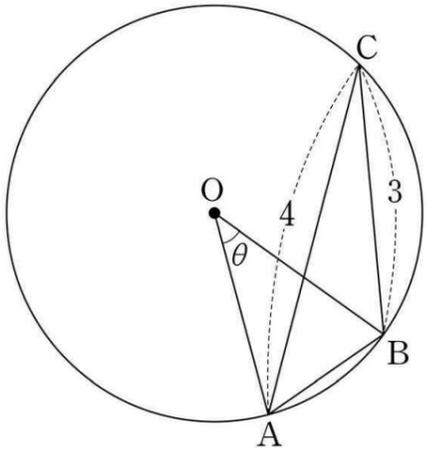
9. $\overline{AB} : \overline{AD} = 3 : 1$ 일 때, 점 B 의 x 좌표를 a 라 하자. 곡선 $y = 2\sqrt{x}$ 와 x 축 및 직선 $x = a$ 로 둘러 싸인 도형을 밑면으로 하는 입체 도형이 있다. 이 입체도형을 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면이 항상 정삼각형 일 때, 이 도형의 부피는? [3점]

- ① $5\sqrt{3}$ ② $6\sqrt{3}$ ③ $7\sqrt{3}$ ④ $8\sqrt{3}$ ⑤ $9\sqrt{3}$

10. 고구마피자, 새우피자, 불고기피자 중에서 m 개를 주문하는 경우의 수가 36일 때, 고구마피자, 새우피자, 불고기피자를 적어도 하나씩 포함하여 m 개를 주문하는 경우의 수는? [3점]

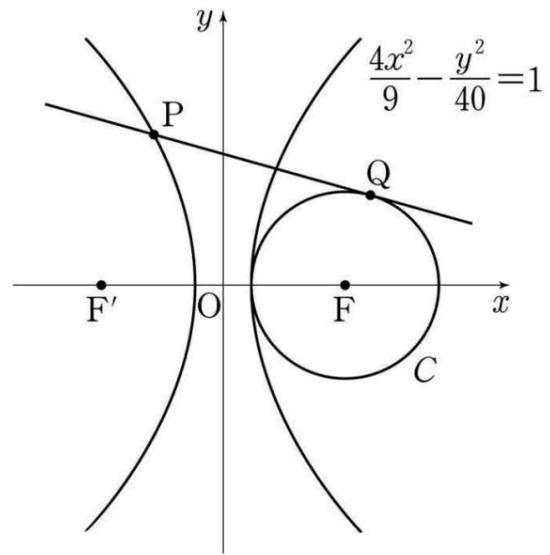
- ①12 ②15 ③18 ④21 ⑤24

11. 그림과 같이 중심이 O 인 원 위에 세 점 A, B, C 가 있다. $\overline{AC}=4$, $\overline{BC}=3$ 이고 삼각형 ABC 의 넓이가 2이다. $\angle AOB = \theta$ 일 때, $\sin\theta$ 의 값은? (단, $0 < \theta < \pi$) [3점]



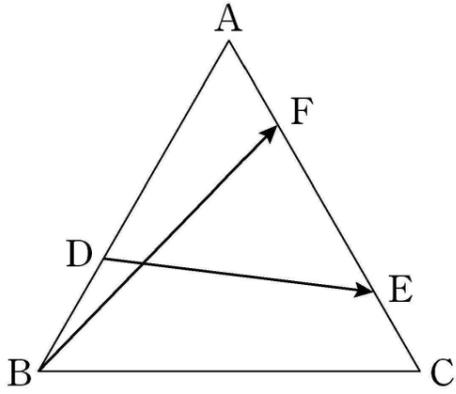
- ① $\frac{2\sqrt{2}}{9}$ ② $\frac{5\sqrt{2}}{18}$ ③ $\frac{\sqrt{2}}{3}$
 ④ $\frac{7\sqrt{2}}{18}$ ⑤ $\frac{4\sqrt{2}}{9}$

12. 그림과 같이 쌍곡선 $\frac{4x^2}{9} - \frac{y^2}{40} = 1$ 의 두 초점은 F, F' 이고 점 F 를 중심으로 하는 원 C 는 쌍곡선과 한 점에서 만난다. 제2사분면에 있는 쌍곡선 위의 점 P 에서 원 C 에 접선을 그었을 때 접점을 Q 라 하자. $\overline{PQ}=12$ 일 때, 선분 PF 의 길이는? [3점]



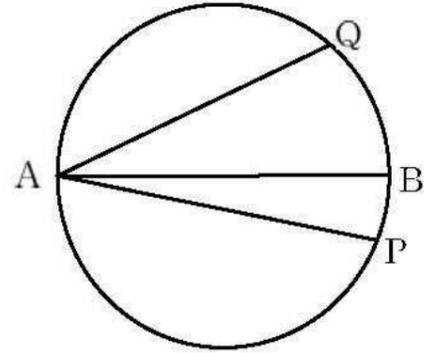
- ① 10 ② $\frac{21}{2}$ ③ 11 ④ $\frac{23}{2}$ ⑤ 12

13. 한 변의 길이가 3인 정삼각형 ABC 에서 변 AB 를 2:1로 내분하는 점을 D 라 하고, 변 AC 를 3:1과 1:3으로 내분하는 점을 각각 E, F 라 할 때, $|\overrightarrow{BF} + \overrightarrow{DE}|^2$ 의 값은? [3점]



- ① 17 ② 18 ③ 19 ④ 20 ⑤ 21

14. 지름 AB 의 길이가 10인 원이 있다. 원 위의 점 P, Q 에 대하여 $\overline{AP} = 8$ 이고, $\angle QAB = 2\angle PAB$ 이다. 선분 AQ 의 길이는? [4점]



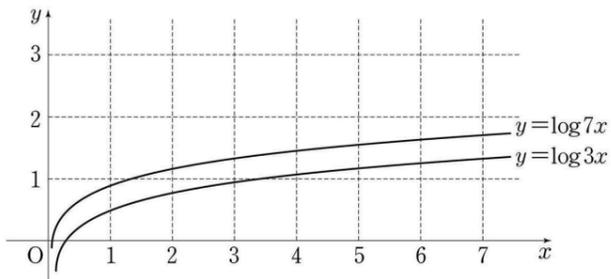
- ① 2 ② $\frac{11}{5}$ ③ $\frac{12}{5}$ ④ $\frac{13}{5}$ ⑤ $\frac{14}{5}$

6

수학 영역(가형)

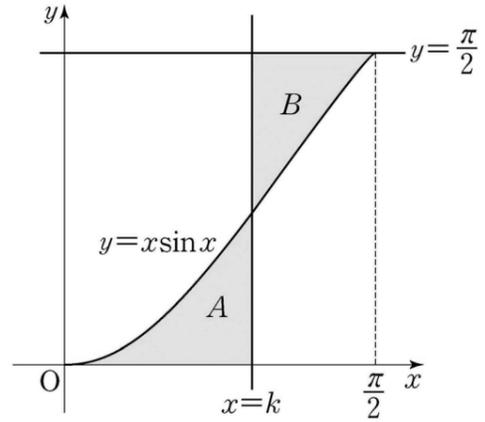
15. 좌표평면에서 다음 조건을 만족시키는 정사각형 중 두 함수 $y = \log 3x$, $y = \log 7x$ 의 그래프와 모두 만나는 것의 개수는?
[4점]

- (가) 꼭짓점의 x 좌표, y 좌표가 모두 자연수 이고 한 변의 길이가 1이다.
(나) 꼭짓점의 x 좌표는 모두 100 이하이다.



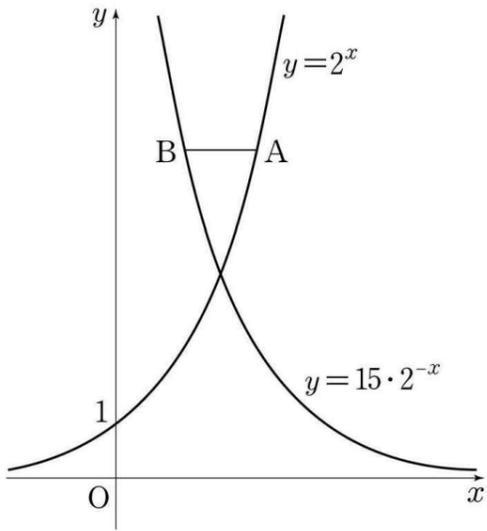
- ① 77 ② 79 ③ 81 ④ 83 ⑤ 85

16. 그림과 같이 곡선 $y = x \sin x$ ($0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$)에 대하여 이 곡선과 x 축, 직선 $x = k$ 로 둘러싸인 영역을 A , 이 곡선과 직선 $x = k$, 직선 $y = \frac{\pi}{2}$ 로 둘러싸인 영역을 B 라 하자. A 의 넓이와 B 의 넓이가 같을 때, 상수 k 의 값은? (단, $0 \leq k \leq \frac{\pi}{2}$) [4점]



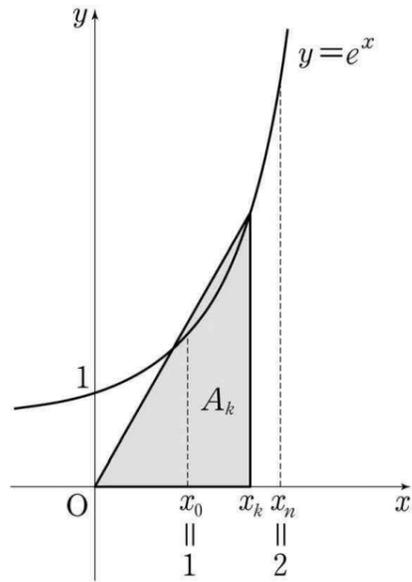
- ① $\frac{\pi}{4} - \frac{1}{\pi}$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{2} - \frac{2}{\pi}$
④ $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{\pi}$ ⑤ $\frac{\pi}{2} - \frac{1}{\pi}$

17. 그림과 같이 함수 $y=2^x$ 의 그래프 위의 한 점 A를 지나고 x 축에 평행한 직선이 함수 $y=15 \cdot 2^{-x}$ 의 그래프와 만나는 점을 B라 하자. 점 A의 x 좌표를 a 라 할 때, $1 < \overline{AB} < 100$ 을 만족시키는 2 이상의 자연수 a 의 개수는? [4점]



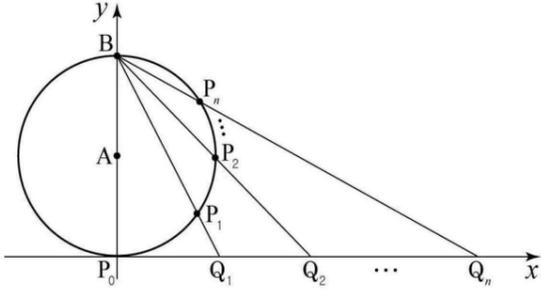
- ① 40 ② 43 ③ 46 ④ 49 ⑤ 52

18. 함수 $f(x) = e^x$ 이 있다. 2 이상인 자연수 n 에 대하여 닫힌 구간 $[1, 2]$ 를 n 등분한 각 분점(양 끝점도 포함)을 차례로 $1 = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = 2$ 라 하자. 세 점 $(0, 0), (x_k, 0), (x_k, f(x_k))$ 를 꼭짓점으로 하는 삼각형의 넓이를 $A_k (k=1, 2, \dots, n)$ 이라 할 때, $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n A_k$ 의 값은? [4점]



- ① $\frac{1}{2}e^2 - e$ ② $\frac{1}{2}(e^2 - e)$ ③ $\frac{1}{2}e^2$
 ④ $e^2 - e$ ⑤ $e^2 - \frac{1}{2}e$

19. 그림과 같이 중심이 $A(0, 1)$ 이고 반지름의 길이가 1인 원 위의 점 P_n 과 x 축 위의 점 Q_n 은 다음 규칙을 만족한다.



- (가) 점 P_0 은 원점이고, 점 P_n 은 제 1사분면의 점이다.
- (나) 호 $P_{n-1}P_n$ 의 길이를 l_n 이라 할 때, $l_{n+1} = r l_n$ 이다.
- (다) 점 Q_n 은 점 $B(0, 2)$ 와 점 P_n 을 이은 직선이 x 축과 만나는 점이다.

$Q_2(2, 0)$ 이고 $\sum_{n=1}^{\infty} l_n = \frac{8}{15} \pi$ 일 때, 상수 r 의 값은? [4점]

- ① $\frac{1}{6}$ ② $\frac{1}{5}$ ③ $\frac{1}{4}$ ④ $\frac{1}{3}$ ⑤ $\frac{1}{2}$

20. 자연수 n 에 대하여 함수 $y = f(x)$ 를 매개변수 t 로 나타내면

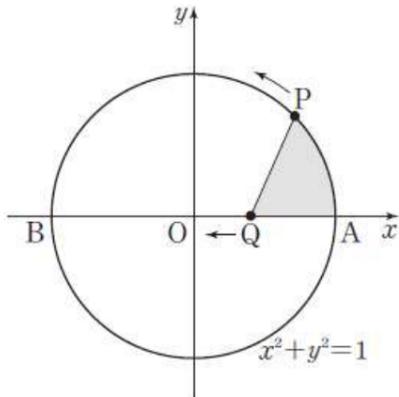
$$\begin{cases} x = e^t \\ y = (2t^2 + nt + n)e^t \end{cases}$$

이고 $x \geq e^{-\frac{n}{2}}$ 일 때, 함수 $y = f(x)$ 는 $x = a_n$ 에서 최솟값 b_n 을

갖는다. $\frac{b_3}{a_3} + \frac{b_4}{a_4} + \frac{b_5}{a_5} + \frac{b_6}{a_6}$ 의 값은? [4점]

- ① $\frac{23}{2}$ ② 12 ③ $\frac{25}{2}$ ④ 13 ⑤ $\frac{27}{2}$

21. 그림과 같이 좌표평면에서 원 $x^2 + y^2 = 1$ 위의 점 P는 점 A(1, 0)에서 출발하여 원 둘레를 따라 시계 반대 방향으로 매초 $\frac{\pi}{2}$ 의 일정한 속력으로 움직이고 있다. 점 Q는 점 A에서 출발하여 점 B(-1, 0)을 향하여 매초 1의 일정한 속력으로 x축 위를 움직이고 있다. 점 P와 점 Q가 동시에 점 A에서 출발하여 t초가 되는 순간, 선분 PQ, 선분 QA, 호 AP로 둘러싸인 어두운 부분의 넓이를 S라 하자. 출발한 지 1초가 되는 순간, 넓이 S의 시간(초)에 대한 변화율은? (4점)



- ① $\frac{\pi}{4} - 1$ ② $\frac{\pi}{4}$ ③ $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$
 ④ $\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}$ ⑤ $\frac{\pi}{4} + 1$

단답형

22. 직선 $y = x$ 에 대하여 대칭인 두 직선 $y = ax, y = bx$ 가 이루는 각이 $\frac{\pi}{6}$ 일 때, $3(a^2 + b^2)$ 의 값을 구하시오. [3점]

23. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{2x} + 10x - 1}{x}$ 의 값을 구하시오. [3점]

24. 함수 $f(x) = \ln(\tan x)$ ($0 < x < \frac{\pi}{2}$)의 역함수 $g(x)$ 에 대하여

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{4g(8h) - \pi}{h} \text{의 값을 구하시오. [3점]}$$

25. 삼각방정식 $\sqrt{6} \sin x - \sqrt{2} \cos x - 2 = 0$ 의 모든 실근의 합을

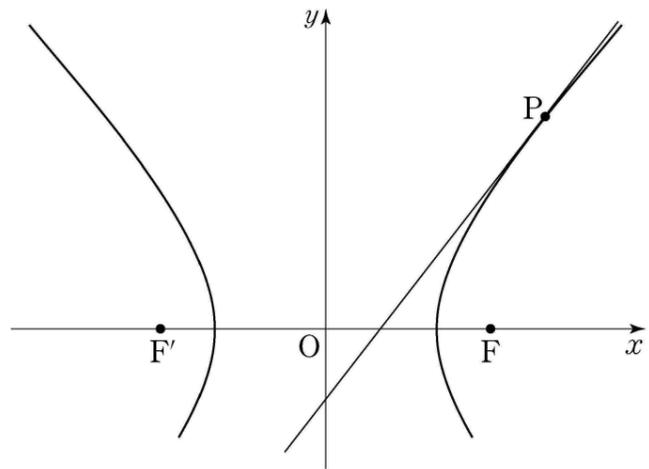
$$\frac{q}{p}\pi \text{라 할 때, } p+q \text{의 값을 구하시오. (단, } 0 \leq x \leq 2\pi \text{이고, } p \text{와}$$

q 는 서로소인 자연수이다.) [3점]

26. 그림과 같이 두 초점이 $F(3,0)$, $F'(-3,0)$ 인 쌍곡선

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ 위의 점 } P(4, k) \text{에서의 접선과 } x \text{축과의 교점이}$$

선분 $F'F$ 를 2:1로 내분할 때, k^2 의 값을 구하시오. (단, a, b 는 상수이다.) [4점]



27. 양의 실수 a 와 두 실수 b, c 에 대하여 함수 $f(x) = (ax^2 + bx + c)e^x$ 은 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) $f(x)$ 는 $x = -\sqrt{3}$ 과 $x = \sqrt{3}$ 에서 극값을 갖는다.
 (나) $0 \leq x_1 < x_2$ 인 임의의 두 실수 x_1, x_2 에 대하여 $f(x_2) - f(x_1) + x_2 - x_1 \geq 0$ 이다.

세 수 a, b, c 의 곱 abc 의 최댓값이 $\frac{k}{e^3}$ 라 할 때, $60k$ 의 값을 구하시오 [4점]

28. 자연수 n 에 대하여 $abc = 2^n$ 을 만족 시키는 1보다 큰 자연수 a, b, c 의 순서쌍 (a, b, c) 의 개수가 28일 때, n 의 값을 구하시오. [4점]

29. 좌표평면에서 포물선 $y^2 = 16x$ 위의 점 A 에 대하여 점 B 는 다음 조건을 만족시킨다.

- (가) 점 A 가 원점이면 점 B 도 원점이다.
 (나) 점 A 가 원점이 아니면 점 B 는 점 A , 원점 그리고 점 A 에서의 접선이 y 축과 만나는 점을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심이다.

점 A 가 포물선 $y^2 = 16x$ 위를 움직일 때 점 B 가 나타내는 곡선을 C 라 하자. 점 $(3, 0)$ 을 지나는 직선이 곡선 C 와 두 점 P, Q 에서 만나고 $\overline{PQ} = 20$ 일 때, 두 점 P, Q 의 x 좌표의 값의 합을 구하시오. [4점]

30. 두 연속함수 $f(x), g(x)$ 가

$$g(e^x) = \begin{cases} f(x) & (0 \leq x < 1) \\ g(e^{x-1}) + 5 & (1 \leq x \leq 2) \end{cases}$$

를 만족시키고, $\int_1^{e^2} g(x) dx = 6e^2 + 4$ 이다.

$$\int_1^e f(\ln x) dx = ae + b \text{ 일 때, } a^2 + b^2 \text{의 값을 구하시오.}$$

(단, a, b 는 정수이다.) [4점]

※ 확인사항

문제지와 답안지의 해당란을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.