

20회 수학 가형 정답

1	4	2	2	3	2	4	1	5	2
6	5	7	3	8	3	9	5	10	2
11	4	12	1	13	4	14	1	15	3
16	4	17	2	18	4	19	1	20	5
21	2	22	3	23	6	24	12	25	17
26	30	27	50	28	35	29	32	30	17

해설

1. 정답 ④

【출제의도】 삼각함수의 성질을 알고 계산하기

$$\cos\theta = 2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1 = \frac{1}{8}$$

2. 정답 ②

【출제의도】 함수의 극한값 계산하기

$$\begin{aligned} -x = t \text{로 치환하면} \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x - \sqrt{x^2 - 1}}{x + 1} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{-t - \sqrt{t^2 - 1}}{-t + 1} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t + \sqrt{t^2 - 1}}{t - 1} = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{t^2}}}{1 - \frac{1}{t}} = 2 \end{aligned}$$

3. 정답 ②

$$\begin{aligned} \int_{-a}^a (2x+3)dx &= \int_{-a}^a 2x dx + \int_{-a}^a 3 dx \\ &= 3a - (-3a) = 6a = 6 \end{aligned}$$

$$\therefore a = 1$$

4. 정답 ①

【출제의도】 합성함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구한다.

주어진 조건에서 $f'(2) = 2$ 이다.

$g(x) = f(\sqrt{x})$ 라 하면

$$g'(x) = f'(\sqrt{x}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

따라서 구하는 미분계수는

$$\begin{aligned} g'(4) &= f'(\sqrt{4}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{4}} \\ &= f'(2) \cdot \frac{1}{4} \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} \\ &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

5. 정답 ②

맨 앞자리에는 1이 오고, 맨 뒤에는 3이 오지 않도록 하려면 1□□□□□1, 1□□□□□2이고 빈칸에 나머지 수가 들어가면 된다.

(i) 1□□□□□1 : 빈칸에 2, 2, 3, 3, 3

이 오는 경우의 수이므로 $\frac{5!}{2! \times 3!} = 10$ 가지

(ii) 1□□□□□2 : 빈칸에 1, 2, 2, 3, 3

이 오는 경우의 수이므로 $\frac{5!}{3!} = 20$ 가지

(i)과 (ii)에 의해 모두 30 가지이다.

6. 정답 ⑤

【출제의도】 타원을 이해하고 있는가를 묻는 문제이다.

$$\overline{AF} = a, \quad \overline{OF} = \frac{1}{2}a, \quad \overline{AO} = b = \frac{\sqrt{3}}{2}a \text{이므로}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

7. 정답 ③

철수가 받은 두 점수의 합이 70인 경우는 다음과 같다.

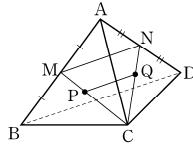
관람객 투표	A($\frac{1}{2}$)	B($\frac{1}{3}$)	C($\frac{1}{6}$)
심사위원	C($\frac{1}{6}$)	B($\frac{1}{3}$)	A($\frac{1}{2}$)
확률	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{12}$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{1}{12} + \frac{1}{9} + \frac{1}{12} = \frac{5}{18}$$

8. 정답 ③

⌋, ⊥, 직선 CD와 직선 BQ, 직선 AD와 직선 BC는 서로 만나지도 평행하지도 않으므로 포인 위치에 있다.



⌋, 직선 CP와 CQ가 선분 AB, AD와 만나는 점을 각각 M, N이라 하면 M, N은 각각 선분 AB, AD의 중점이므로 중점연결정리에 의해 $\overline{MN} \parallel \overline{BD}$ 이다.

또한, $\overline{CP} : \overline{CM} = \overline{CQ} : \overline{CN} = 2 : 3$ 이므로

$\triangle CPQ$ 와 $\triangle CMN$ 은 닮음이 되어 $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$ 이다.

따라서, $\overline{PQ} \parallel \overline{MN}$ 이고, $\overline{MN} \parallel \overline{BD}$ 이므로

$\overline{PQ} \parallel \overline{BD}$

9. 정답 ⑤

(i) 연속하는 100개의 자연수를 a_1, a_2, \dots, a_{100} 으로 놓으면

$$1 \leq |a_i - a_j| \leq 99 \quad (i, j = 1, 2, \dots, 100, i \neq j)$$

따라서, 확률변수 X 가 취할 수 있는 값은 1, 2, 3, ..., 99이다.

(ii) 연속하는 100개의 홀수를 b_1, b_2, \dots, b_{100} 으로 놓으면

$$2 \leq |b_k - b_l| \leq 198 \quad (k, l = 1, 2, \dots, 100, k \neq l)$$

따라서, 확률변수 Y 가 취할 수 있는 값은 2, 4, 6, ..., 198이다.

(iii) 연속하는 100개의 짝수를 c_1, c_2, \dots, c_{100} 으로 놓으면

$$2 \leq |c_m - c_n| \leq 198 \quad (m, n = 1, 2, \dots, 100, m \neq n)$$

따라서, 확률변수 Z 가 취할 수 있는 값은 2, 4, 6, ..., 198이다.

따라서, $Y = Z = 2X$ 이므로

$$V(Y) = V(Z) = 4V(X)$$

$$\therefore V(X) < V(Y) = V(Z)$$

10. 정답 ②

두 변 OA, OB가 이루는 각의 크기를 θ 라 하면

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta = 6\cos\theta = 2 \text{에}$$

$$\cos\theta = \frac{1}{3}$$

$$\therefore \sin\theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$\therefore (\text{넓이}) = \left| \vec{a} \right| \left| \vec{b} \right| \sin\theta = 4\sqrt{2}$$

11. 정답 ④

$$\sin\left(\frac{\pi}{3} \pm \theta\right) = \sin\frac{\pi}{3}\cos\theta \pm \cos\frac{\pi}{3}\sin\theta$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta \pm \frac{1}{2}\sin\theta \text{ (복부호동순)이므로}$$

준

$$= \sin^2\theta + 2 \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 \cos^2\theta + 2 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 \sin^2\theta$$

$$= \frac{3}{2}\sin^2\theta + \frac{3}{2}\cos^2\theta = \frac{3}{2}$$

12. 정답 ①

【출제의도】 도함수를 이용하여 함수의 증가와 감소 이해하기

조건 (나)에 의하여 $f(x) = ax^2 + b$ 라 하면

$$f(0) = -2 \text{이므로 } b = -2$$

$$f(x) = ax^2 - 2, \quad f'(x) = 2ax$$

$$f(f'(x)) = f'(f(x)) \text{이므로 } a = \frac{1}{2} \text{이다.}$$

$$\text{따라서 } f(x) = \frac{1}{2}x^2 - 2 \text{이다.}$$

$F'(x)$ 가 감소하는 구간은 부등식 $F'(x) < 0$

즉, $f(x) < 0$ 을 만족하는 구간이므로

$$\frac{1}{2}x^2 - 2 < 0, \quad -2 < x < 2$$

\therefore 감소하는 구간의 길이는 4

13. 정답 ④

$$\text{쌍곡선 } \frac{x^2}{a} - \frac{y^2}{2} = 1 \text{에 접하고 기울기가 3인 직}$$

$$\text{선의 방정식은 } y = 3x \pm \sqrt{a3^2 - 2}$$

이 때,

$$\sqrt{9a - 2} = 5 \text{ 이어야 하므로 } 29a - 2 = 25$$

$$\therefore a = 3$$

이 때 쌍곡선의 두 초점의 좌표는 $(\pm\sqrt{5}, 0)$ 이므로

구하는 두 초점 사이의 거리는 $2\sqrt{5}$ 이다.

14. 정답 ①

$$\frac{1}{x} = t \text{라 하자}$$

$$\text{준식} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(b + ct^2)}{t^a} = 2$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^a = 0$$

$$\text{이므로 } \lim_{t \rightarrow 0} \ln(b + ct^2) = \ln b = 0, \quad \therefore b = 1$$

$$\text{준식} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{\ln(1 + ct^2)}{t^a} = 2 \text{에서 } a = 2, c = 2$$

따라서 $a + b + c = 5$

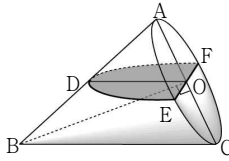
15. 정답 ③

[출제의도] 경우의 수를 구할 수 있는가를 묻는 문제이다.

정삼각형에 칠한 색을 결정하는 경우의 수는 ${}_8C_2 = 28$
나머지 6가지 색으로 등변사다리꼴을 칠하는 경우의 수는
 ${}_6C_3 \times (3-1)! = 240$
따라서 구하는 경우의 수는 $28 \times 240 = 6720$

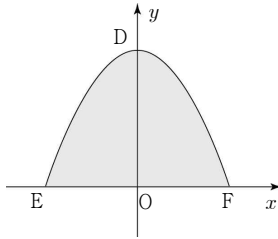
16. 정답 ④

[출제의도] 정적분을 이용하여 수학 내적 문제 해결하기



삼각형 ABC에 대하여 $\overline{BC} = 3$ 이고 $\overline{BC} \parallel \overline{DO}$,
 $\overline{OA} = \overline{OC}$ 이므로

삼각형의 중점연결정리에 의하여 $\overline{DO} = \frac{1}{2}\overline{BC} = \frac{3}{2}$
좌표평면에 포물선을 나타내면



이 포물선은 $(0, \frac{3}{2})$ 을 꼭짓점으로 하고 $(1, 0)$ 을 지나

므로, 포물선의 방정식은 $y = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}$

따라서 구하고자 하는 단면의 넓이는
 $S = \int_{-1}^1 \left(-\frac{3}{2}x^2 + \frac{3}{2}\right) dx = 2$

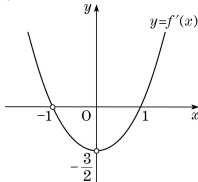
17. 정답 ②

[출제의도] 주어진 함수와 도함수를 이용하여 함수의 극한값을 구한다.

함수 $f(x)$ 는 $x = -1$ 과 $x = 0$ 에서만 불연속이고,

$f'(x) = \frac{1}{2}(3x^2 - 3)$ (단, $x \neq -1, x \neq 0$)

따라서 도함수 $f'(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



ㄱ. 함수 $f(x)$ 는 $x = 0$ 에서 불연속이므로 $x = 0$ 에서 미분가능하지 않다.

ㄴ. 함수 $y = f'(x)$ 의 그래프에서

$$\lim_{x \rightarrow 0} f'(x) = -\frac{3}{2}$$

ㄷ. $f'(x) = t$ 라 하면 $x \rightarrow -1+0$ 일 때 $t \rightarrow -0$ 이다.

$$\therefore \lim_{x \rightarrow -1+0} f(f'(x)) = \lim_{t \rightarrow -0} f(t) = -1$$

따라서 옳은 것은 ㄴ이다.

18. 정답 ④

모든

$$\text{확률의 합이 } 1 \text{ 이므로 } p + \frac{1}{4} + q + \frac{1}{12} = 1$$

$$\therefore p + q = \frac{2}{3}$$

$$E(X) = \frac{1}{4} + 2q + \frac{1}{4} = 2q + \frac{1}{2},$$

$$V(X) = \frac{1}{4} + 4q + \frac{3}{4} - (2q + \frac{1}{2})^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 4q - (2q + \frac{1}{2})^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$16q^2 - 8q + 1 = (4q - 1)^2 = 0$$

$$\therefore q = \frac{1}{4}, p = \frac{5}{12}$$

$$\therefore 3p + q = 3 \times \frac{5}{12} + \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

19. 정답 ①

$$\therefore \overrightarrow{OP} = (1-t)\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

$$= \overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{AB}$$

($0 \leq t \leq 1$)이므로 점 P가
그리는

도형은 선분 AB이다. [참]

$$\therefore \overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$$

$$= s\overrightarrow{OA} + 2t\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{OB}\right) \text{ 이므로}$$

점 P가 그리는 도형은 선분
AB'

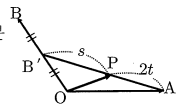
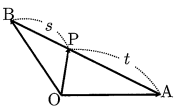
$$(\text{이 때, } \overrightarrow{OB'} = \frac{1}{2}\overrightarrow{OB}) \text{ 이고,}$$

그 길이는 선분 AB의 길이보다 작은 경우도 있다. [거짓]

ㄷ. 양수 s, t 가 $s + 2t \leq 1$
이면

점 P가 그리는 영역은 삼각형
OAB'이므로 삼각형 OAB에
포함 된다. [거짓]

따라서 옳은 것은 ㄱ이다.



20. 정답 ⑤

[출제의도] 삼각함수의 합을 곱으로 고쳐 계산하기

$$\tan \frac{\theta}{2} = \frac{1}{2} \quad (0 < \theta < \frac{\pi}{2}) \text{ 이므로}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5}, \cos \frac{\theta}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5} \text{ 이다.}$$

$$\sin \frac{\theta}{2} + \sin \frac{3\theta}{2} = 2\sin \theta \cos \frac{\theta}{2} = 4\sin \frac{\theta}{2} \cos^2 \frac{\theta}{2}$$

$$= 4 \times \frac{\sqrt{5}}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{16\sqrt{5}}{25}$$

21. 정답 ②

곡선 $y = 2^x$ 와 곡선 $y = \log_2 x$ 는 직선 $y = x$ 에 대해
대칭이므로 각각의 곡선과 x 축, y 축, 직선 BC와 직

선 AD에 의해 정해지는 넓이는 $\int_1^8 \log_2 x dx$ 로

같다.

$$(\text{구하는 넓이}) = 64 - 2 \int_1^8 \log_2 x dx$$

$$= 64 - \frac{2}{\ln 2} [x \ln x - x]_1^8 = 16 + \frac{14}{\ln 2}$$

22. 정답 3

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta} = \frac{\frac{p}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = p = 3$$

23. 정답 6

$$\therefore \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+3x) + 9x}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{3}{2} \times \frac{\ln(1+3x)}{3x} + \frac{9}{2} \right) = 6$$

24. 정답 12

[출제의도] 도함수를 활용하여 극값과 접선의 방정식의
성질 이해하기

$$f(x) = \frac{1}{4}(x-1)^4 + C \text{ 에서 } M = f(1) = C$$

$$f'(0) = -1, f'(2) = 1$$

$$x = 0 \text{에서의 접선은 } y = -x + \frac{1}{4} + C$$

$$x = 2 \text{에서의 접선은 } y = (x-2) + \frac{1}{4} + C$$

$$-x + \frac{1}{4} + C = x - 2 + \frac{1}{4} + C \text{ 에서 } x = 1 \text{ 이므로}$$

$$N = C - \frac{3}{4} \therefore 16(M - N) = 12$$

25. 정답 17

$$y = \frac{1}{2}x^2 (x \geq 0) \text{의 역함수는 } y = \sqrt{2x} \text{ 이고,}$$

두 그래프의 교점은 $\frac{1}{2}x^2 = \sqrt{2x}$ 에서

$(0, 0), (2, 2)$ 이다.

$0 \leq x \leq 2$ 에서 $\sqrt{2x} \geq \frac{1}{2}x^2$ 이므로

$$(\text{부피}) = \int_0^2 \left\{ \pi \cdot (\sqrt{2x})^2 - \pi \cdot \left(\frac{1}{2}x^2 \right)^2 \right\} dx$$

$$= \pi \cdot \int_0^2 \left(2x - \frac{1}{4}x^4 \right) dx = \pi \left[x^2 - \frac{1}{20}x^5 \right]_0^2$$

$$= \frac{12}{5}\pi$$

$$\therefore p + q = 5 + 12 = 17$$

26. 정답 30

전체의 경우에서 A, B가 모두 같은 동아리에 가입하는
경우를 빼면 된다.

A, B가 각각 동아리를 선택하는 경우는 ${}_4C_2$ 이므로
 ${}_4C_2 \times {}_4C_2 - {}_4C_2 = 30$ 가지

27. 정답 50

[출제의도] 타원의 성질 이해하기

장축의 길이는 정삼각형의 한 변의 길이의 5배와 같으
므로 $a^2 = 25$ 이고

[그림2]에서 점 A의 좌표가 $(4, \sqrt{3})$ 이므로

